ISPETTORATO DELL'ARMA DI ARTIGLIERIA

N. 4200

BALISTICA ESTERNA

VOLUME I

BALISTICA RAZIONALE

LA LIBRERIA DELLO STATO

ISPETTORATO DELL'ARMA DI ARTIGLIERIA

N. 4200

BALISTICA ESTERNA

VOLUME I

BALISTICA RAZIONALE

LA LIBRERIA DELLO STATO

ISPETTORATO DELL'ARMA DI ARTIGLIERIA

Il Ten. Col. Francesco GALANZINO, del Servizio Tecnico di Artiglieria, ha dato veste di pubblicazione alle lezioni di balistica esterna, da lui tenute ai corsi superiori tecnici di Artiglieria.

L'opera, oltre alla materia dei testi classici di balistica, tratta dei procedimenti di calcolo e sperimentali più moderni in uso in Italia ed all'estero; essa perciò ha interesse per tutti gli ufficiali di Artiglieria e per gli aspiranti al Servizio Tecnico in particolare.

Questo Ispettorato, con l'approvazione delle Superiori Autorità, ne ha curata la presente edizione.

Roma, lì 4 dicembre 1942-XXI.

L'ISPETTORE DELL'ARMA D'ARTIGLIERIA
(UBALDO FAUTILLI)

PREFAZIONE

Il presente libro è la raccolta delle lezioni da me svolte al Corso Superiore Tecnico d'Artiglieria.

Per la sua compilazione mi sono servito non solo dei classici testi italiani (SIACCI, BIANCHI, CAVALLI, BRUNO) *ma sono ricorso anche a quelli stranieri ed, in particolare, al* CRANZ *ed allo* CHARBONNIER.

È composto di tre volumi:

1) *Balistica razionale;*
2) *Balistica sperimentale;*
3) *Tavole numeriche.*

Nel primo volume sono sviluppati i principali fondamenti della balistica esterna, con speciale riguardo alla soluzione SIACCI.

Sono stati anche trattati ampiamente i principali metodi di calcolo per archi, italiani ed esteri, compresi i più recenti e per alcuni di essi sono messi a confronto i risultati finali del calcolo.

Numerosi esempi facilitano la comprensione delle teorie svolte.

Ho ritenuto utile aggiungere un capitolo contenente alcuni elementi di meteorologia elementare e ciò allo scopo di far meglio comprendere gli argomenti che ho in seguito trattati.

Il continuo progredire degli studi sulla aerodinamica, che tanto da vicino interessano la balistica esterna, avrebbe richiesto un più ampio svolgimento di tale materia, nonchè del secondo problema balistico, trattato solo qualitativamente. Non ho ritenuto di farlo perchè il lettore potrà trovare una completa ed esauriente trattazione in proposito nella publicazione del Prof. FILIPPO BURZIO *« Complementi di balistica esterna » Vol. 1° « Il secondo problema balistico – Rotazione dei proietti » Pubblicazione n. 2666 del Ministero Guerra.*

Nel secondo volume è contenuto quanto di più recente è stato fatto in materia di balistica sperimentale ed applicata e di cui sono venuto a personale conoscenza.

Nel terzo sono riunite le tavole numeriche di più comune impiego in balistica esterna.

In particolare sono state ristampate le « Tavole dei fattori di Tiro », del Comandante FASELLA, *la cui unica edizione (Genova 1901) è esaurita e pressochè introvabile.*

Di esse mi sono servito per numerosi esercizi svolti nel primo volume, perchè, d ristretti limiti di interpolazione, permettono di conseguire risultati quasi uguali quelli che si ottengono con la tavola balistica generale del SIACCI.

Nella compilazione del primo volume mi è stato d'aiuto il Magg. Ing. MAR DONGHI, *alla redazione del secondo volume ha collaborato il Tenente Colonne Ing.* GIUSEPPE BOFFA. *Sento perciò il dovere di ringraziare i due ufficiali suddet*

Ringrazio inoltre il Tenente Colonnello d'artiglieria UMBERTO SELAN *ed Capitano d'artiglieria Prof. Dott.* LIVIO GRATTON *dell'Ispettorato dell'Arma p l'aiuto che mi hanno dato nella correzione delle bozze di stampa.*

ISTITUTO SUPERIORE TECNICO
ARMI E MUNIZIONI
1942-XXI

T. Col. F. Galanzino.

INDICE

Capitolo X – **Riduzione delle formule in funzione dell'ascissa.**

CAPITOLO XI – **Resistenza quadratica.**

CAPITOLO XII – **Variazioni dei parametri della traiettoria.**

CAPITOLO XIII *A* – **Formule di variazione nel calcolo di traiettorie per punti.**

CAPITOLO XIII *B* – **Calcolo delle variazioni col metodo G. H. M.**

INTRODUZIONE

1 – Notizie storiche.

La balistica, (dal greco βαλλω - getto, lancio), studia il moto del proietto, intendendo per proietto un corpo pesante, lanciato da una bocca da fuoco nello spazio in una direzione qualsiasi.

Il moto del proietto nell'interno della bocca da fuoco è oggetto di studio della balistica interna; la balistica esterna, di cui noi ci occupiamo, studia il moto all'esterno della bocca da fuoco.

Intorno al problema generale che la balistica esterna si propone di risolvere si affaticarono per prime le menti di grandi italiani: TARTAGLIA e GALILEO; e non a caso GALILEO e, dopo di Lui, NEWTON, gettarono al tempo stesso i fondamenti della balistica, e della meccanica celeste: l'affinità tra le due scienze è così stretta, che il secondo libro dei « Principî della Filosofia Naturale » di Newton non è, in realtà, che un trattato di balistica; GALILEO intravide, molto prima di NEWTON, ciò che quest'ultimo generalizzò poi, estendendolo al mondo dei pianeti; ma mentre la meccanica celeste si sviluppa nella sfera della matematica pura, perchè le sue speculazioni si riferiscono a fenomeni che hanno i caratteri dell'eternità e della perfezione assoluta, la balistica non può prescindere dalla transitorietà e variabilità dei fenomeni fisici, che si svolgono sulla superficie terrestre; tanto che ci si può chiedere se, come scienza applicativa, l'apporto che può derivare al suo progredire dalle discipline sperimentali, non sia almeno altrettanto importante come quello teorico dovuto alla meccanica razionale ed alla dinamica.

Più precisamente, si potrebbero distinguere nella balistica esterna tre branche e cioè:

1 – balistica esterna fisica, basata sui principî della meccanica dei fluidi, e della fisico-matematica, che studia i fenomeni dovuti alla resistenza dell'aria sulla superficie dei proietti, nonchè i fenomeni sonori;

2 – balistica esterna razionale, che introduce le leggi della fisica nelle equazioni generali del moto;

3 – balistica esterna sperimentale, che verifica le deduzioni della balistica fisica ed il grado di attendibilità delle teorie balistiche.

Un rapido sguardo allo sviluppo della balistica esterna vale a darci la misura del cammino compiuto in quattro secoli. Fino dal 1537 TARTAGLIA afferma per primo che la traiettoria percorsa dal proietto non può essere in alcuna sua parte perfettamente rettilinea; osserva però che in alcuni tratti essa è così poco curva, da potersi considerare quasi retta – e disegna la traiettoria come composta di due tratti rettilinei – uno secondo la linea di proiezione – l'altro – il finale–

verticale, raccordandoli con un arco di cerchio. Egli segna giustamente la massima curvatura in prossimità del punto più alto, e l'estremità del ramo discendente verticale. Inoltre, TARTAGLIA provò sperimentalmente che l'angolo di massima gittata era di 45°; e dedusse il principio che con angoli complementari si ottenevano gittate eguali: principio dimostrato esatto in seguito. Egli si occupò anche della fabbricazione degli esplosivi, enunciando principî di balistica interna validi tutt'ora, come quello che ogni bocca da fuoco dovrebbe essere troncata là ove termina la combustione della carica di lancio.

Circa un secolo dopo TARTAGLIA, con l'apparizione di GALILEO, la balistica compie un primo gigantesco passo. GALILEO getta le basi della dinamica, e la balistica assume forma matematica. Astraendo dalla resistenza dell'aria, GALILEO concepisce il moto del proietto come risultante di due movimenti – uno orizzontale ed uniforme, l'altro verticale ed uniformemente vario. Ne deduce che in queste condizioni la traiettoria è una parabola di 2° grado, curva già ben nota e della quale si conoscevano parecchie proprietà interessanti. La soluzione di GALILEO fu perciò accolta con grande favore; essa apparve per la prima volta (1632), in un'opera di BONAVENTURA CAVALIERI – ma tutta la teoria fu poi raccolta da GALILEO stesso nell'opera *Dialoghi e discorsi intorno a due nuove scienze* (Leida 1638 – Opere di GALILEO GALILEI ediz. naz. vol. VIII).

GALILEO intravede l'importanza della resistenza dell'aria sul moto del proietto, dichiarando che l'influenza di tale resistenza è tanto più grande, quanto più grande è la velocità iniziale e quanto minore il peso del proietto; asserzione che corrisponde pienamente a ciò che in realtà avviene. È da notare che, date le piccole velocità iniziali di allora, la legge parabolica era molto prossima al vero; ciò spiega come, anche dopo GALILEO, gli scrittori di cose d'artiglieria ritenessero la resistenza dell'aria come trascurabile.

Con NEWTON (1710), il problema balistico si sdoppia in problema fisico ed analitico; il problema fisico è da lui impostato esperimentando sulla caduta di corpi pesanti; ne deduce che la resistenza dell'aria risulta proporzionale al quadrato delle velocità. Riesce però a determinare analiticamente la traiettoria soltanto nell'ipotesi di resistenza proporzionale alla prima potenza della velocità, concludendo che la traiettoria si avvicina più all'iperbole che alla parabola, cioè ad una curva di 2° grado dotata di asintoto.

NEWTON aveva infrattanto esposto alcune proprietà sulle flussioni (flussione; corrisponde a derivata) ma non aveva pubblicato nulla; il matematico tedesco LEIBNITZ, giunto alle stesse conclusioni, diede subito alle stampe la sua teoria. Ne sorse così una disputa, in merito alla priorità di questo nuovo strumento del calcolo, la quale condusse ad una sfida tra BERNOULLI, discepolo di LEIBNITZ, ed il professore di fisica KEILL dell'università di Oxford; a BERNOULLI fu richiesto di integrare l'equazione del moto di un proietto in un mezzo omogeneo che opponesse una resistenza proporzionale al quadrato della velocità. Nel 1719, BERNOULLI dava la soluzione del problema più generale e cioè per resistenza proporzionale ad una potenza qualsiasi della velocità. Il problema analitico era dunque già bene avviato. Veniva ripreso da EULERO nel 1753 con le sue memorie (LEONARDO EULERO « *Opera Omnia* 2ª serie – vol. XIV – *Ricerche sulla vera curva che descrivono i corpi lanciati nell'aria* ») in cui, basandosi sulla soluzione di BERNOULLI e

sulla formula di NEWTON per la resistenza quadratica, dimostra che calcolando per archi successivi alcune traiettorie, si possono ricavare gli elementi di traiettoria di un proietto qualunque, dando una tabella delle funzioni che servono per questo calcolo.

Partendo dallo studio di EULERO, il generale OTTO costruì in seguito (1844), una serie di tabelle modificate che resero segnalati servizi.

Quasi contemporaneo del BERNOULLI, nel 1741, il fisico inglese ROBINS inventa il pendolo balistico, atto a determinare sperimentalmente la velocità del proietto in un punto qualsiasi della traiettoria. Il problema fisico occupa intensamente gli studiosi ed una commissione francese; (1839-1840), presieduta da Didion, costruisce un nuovo e più perfezionato pendolo, per mezzo del quale si eseguiscono numerose esperienze. Ma, a quest'epoca. l'invenzione dovuta al generale GIOVANNI CAVALLI, cioè la rigatura delle bocche da fuoco, segna una vera rivoluzione e di conseguenza nuove complicazioni nei problemi della balistica. I proietti sferici, fino allora unicamente impiegati, davano luogo a grandi dispersioni nel tiro, dovuto, come ci si rese conto, a rotazioni irregolari assunte dal proietto uscendo dall'anima attorno ad un asse qualunque.

Si era cercato perciò di dare al proietto una rotazione iniziale attorno ad un asse stabile, proponendo proietti eccentrici, lenticolari ed altri mezzi; ma la soluzione di CAVALLI, per cui la rigatura elicoidale conferisce al proietto oblungo una rotazione intorno al suo asse, che, essendo asse di inerzia minimo è anche asse di rotazione stabile, risultò ben presto la migliore. Tanto più è da apprezzare la geniale intuizione del CAVALLI, in quanto erano ancora pressocchè sconosciute le proprietà del giroscopio.

Inoltre il proietto oblungo aveva, ad egual calibro, un peso maggiore del proietto sferico, era meglio atto a vincere la resistenza dell'aria e doveva quindi raggiungere portate superiori; il che fu brillantemnte confermato da esperienze eseguite dal CAVALLI stesso.

Ma l'adozione della rigatura, dando luogo contemporaneamente ad un forte movimento di rotazione del proietto, veniva a complicare il problema analitico del moto.

Gli studi di SAINT ROBERT e di MAYEWSKY dimostrarono che in generale, l'influenza del movimento di rotazione sul movimento di traslazione era piccola; inoltre, da esperienze eseguite in Francia, (a Gâvre nel 1859-1861), ed in Italia, (1869-1870), si riscontrò che le leggi del moto, valide per i proietti sferici potevano applicarsi anche a proietti oblunghi, correggendole con un coefficiente costante indipendente dalla velocità, e dipendente soltanto, (per quanto fu possibile accertare con i mezzi e nelle condizioni delle esperienze di quell'epoca), dalla forma e dalle dimensioni del proietto.

È da notare che nelle esperienze del 1859-1861, istituite per verificare il comportamento dei proietti oblunghi, furono per la prima volta usati i cronografi elettrici in luogo del pendolo balistico: tali cronografi permettono la misura della velocità senza bisogno di fermare il proietto; quindi, con due cronografi, si può effettivamente misurare la velocità di uno stesso proietto in due punti della stessa traiettoria e dedurre, con maggior precisione, l'effetto della resistenza dell'aria. Quasi contemporaneamente, il conte di SAINT ROBERT, pubblicava (1855) il suo trattato *Del moto dei proietti nei mezzi resistenti* (ripubblicato nelle *Memorie scien-*

tifiche dello stesso autore 1872 - vol. I), dando forma semplice ed elegante alle equazioni differenziali del movimento e ricavandone le proprietà della traiettoria.

Il problema analitico veniva ripreso, nel corso dei primi anni del XIX secolo, da eminenti matematici come Borda e Legendre; essi tentavano di migliorare il metodo di Eulero, introducendo nuove espressioni della resistenza, o proponendo sviluppi in serie.

Ma doveva l'Italia per opera di Francesco Siacci, ufficiale di artiglieria e potente analista, insegnante di balistica per un ventennio alla Scuola di Applicazione di Artiglieria e Genio in Torino, assicurarsi il primato nel mondo in materia di balistica. Egli, eminentemente pratico, si studiò di trovare una soluzione breve ed accessibile del problema fondamentale della balistica esterna, per cui la soluzione di tutti i problemi del tiro si riduceva all'impiego di una semplice tavola numerica che egli chiamò « Tavola balistica » Siacci pubblicò il risultato delle sue ricerche nel 1880, in un articolo intitolato « Balistica e Pratica – Nuovo metodo per risolvere i problemi del tiro » corredato dalla sua tavola balistica ed ottenne un successo, solo paragonabile a quello di Galileo con la sua soluzione parabolica. L'articolo fu tradotto in Europa ed in America; furono calcolate altre tavole balistiche più estese, o basate su altre forme di resistenza; Siacci stesso continuò a perfezionare il suo metodo fino alla tabella del 1896, calcolata con una nuova forma di resistenza da lui trovata, che teneva conto di tutte le esperienze antiche e recenti sulla resistenza dell'aria.

Nel 1901, riprendendo il problema di d'Alembert, (che nel 1744 riusciva a trovare quattro formule di resistenza che permettevano di ridurre il problema balistico alle quadrature), ne diede altre 14; fu il suo ultimo lavoro. Siacci morì nel 1907. Ma il metodo di Siacci resta l'unico che permetta di risolvere tutti i problemi del tiro, ed il calcolo della traiettoria in un solo arco.

Per applicarlo, basterebbe sciogliere il calcolo dalle esperienze antiche, in base alle quali Siacci calcolò la funzione resistente, aggiornandolo con nuove esperienze sui proietti moderni, che mettano in rilievo l'influenza prodotta dalle attuali forme dei proietti sulla ritardazione dovuta alla resistenza del mezzo.

Alla scuola di Siacci si formarono valorosi discepoli, Parodi, Ettore Cavalli ed il Bianchi, tutti insegnanti alla Scuola di applicazione di Artiglieria e Genio di Torino.

Allo stato attuale degli studi, la trattazione completa del problema balistico, cioè del moto del proietto lanciato nello spazio con forte velocità e dotato al tempo stesso di moto di rotazione intorno al suo asse, si presenta assai complessa, tanto che non si è ancora avuta una soluzione soddisfacente. È perciò necessario, per evitare le gravi difficoltà analitiche che si presentano, sdoppiare il problema e studiare separatamente il moto di traslazione (problema balistico principale) e quello di rotazione (2° problema balistico).

Noi tratteremo quindi il problema balistico principale, e qualitativamente, il 2° problema.

2 - Definizioni.

Traiettoria — La curva percorsa nello spazio dal centro di gravità del proietto nel suo movimento.

L'origine **O** della traiettoria è il centro della bocca del pezzo pronto allo sparo.

Orizzonte del pezzo — Il piano orizzontale passante per **O**.

Punto di caduta (C) — Il secondo punto in cui la traiettoria incontra l'orizzonte del pezzo.

Linea di tiro (OB) — Prolungamento dell'asse della bocca da fuoco a punteria ultimata e pronta allo sparo.

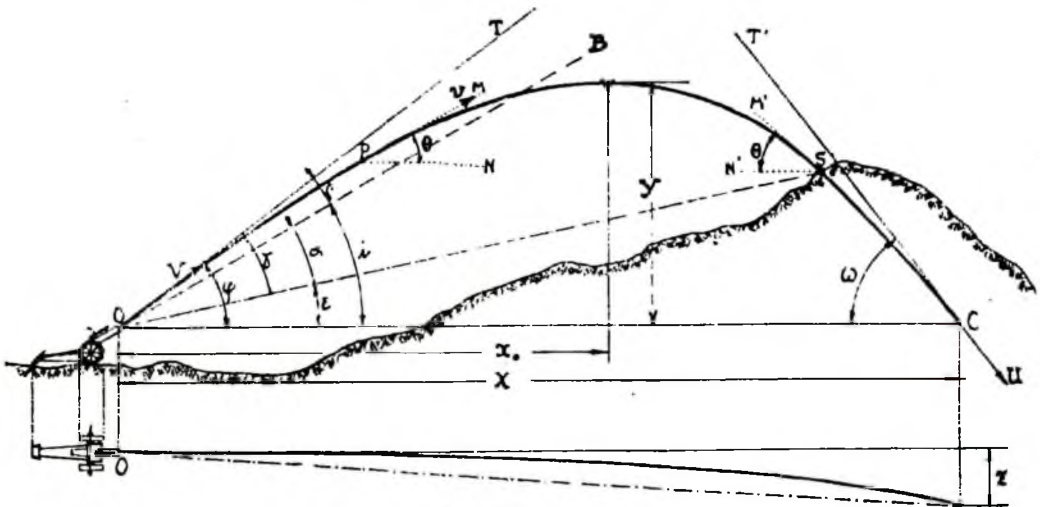


FIG. 1

Piano di tiro — Il piano verticale che contiene la linea di tiro.

Angolo di tiro ($\widehat{BOC} = i$) — L'angolo che la linea di tiro fa con l'orizzonte.

Velocità iniziale (V) — La velocità del proietto all'origine. Il vettore rappresentativo di V è tangente alla traiettoria in **O** ed è diretto nel senso del movimento del proietto.

Linea di proiezione (OT) — Prolungamento dell'asse della bocca da fuoco nel momento in cui il proietto abbandona l'arma; coincide con la tangente in **O**.

Piano di proiezione — Piano verticale che contiene la linea di proiezione.

Angolo di proiezione ($\widehat{TOC} = \varphi$) — Angolo che la linea di proiezione fa con l'orizzonte. Questo angolo può essere positivo o negativo.

Angolo di rilevamento ($\widehat{TOB} = \rho$) — Angolo che la linea di proiezione fa con la linea di tiro, misurato sul piano di tiro; può essere positivo o negativo, secondo che si tratta di un rialzamento o di un abbassamento dell'arma all'atto dello sparo.

Dalla figura si ha: $\varphi = i \pm \rho$.

Gittata (X) — La distanza orizzontale dal punto di caduta all'origine.

Punto di arrivo (S)	Il punto in cui la traiettoria incontra il bersaglio; in generale è diverso dal punto di caduta C.
Linea di sito (OS)	La retta che congiunge l'origine con il punto di arrivo.
Angolo di sito ($\widehat{SOC} = \varepsilon$)	L'angolo che la linea di sito fa con l'orizzonte; è positivo o negativo secondochè il punto di arrivo si trova al disopra o al disotto dell'orizzonte del pezzo.
Angolo di partenza ($\gamma = \varphi - \varepsilon$)	L'angolo che la linea di proiezione fa con la linea di sito.
Inclinazione θ	L'angolo acuto che il vettore velocità nel punto considerato fa con l'orizzonte ($\widehat{MPN}$ oppure $\widehat{M'SN'}$). L'inclinazione nel punto O coincide con l'angolo di proiezione; è nulla nel punto più elevato della traiettoria (vertice), d'ordinata massima Y. Nel tratto dall'origine al vertice (ramo ascendente), l'inclinazione è positiva; nel tratto dal vertice al punto di caduta (ramo discendente) l'inclinazione è negativa.
Angolo di caduta ω	Il valore numerico dell'inclinazione $\widehat{T'CO}$ nel punto di caduta.
Angolo di arrivo ($\widehat{M'SO} = \varepsilon + \theta$)	L'angolo acuto che la tangente alla traiettoria nel punto di arrivo fa con la linea di sito. L'angolo di caduta ω è il valore particolare che assume l'angolo di arrivo per $\varepsilon = o$.
Angolo di elevazione	Angolo che la linea di tiro fa con la lina di sito. Si ha: $\alpha = i - \varepsilon \qquad \varphi = \rho + \alpha + \varepsilon$
Velocità residua (v)	La velocità di traslazione in un punto della traiettoria.
Velocità di caduta (U)	La velocità nel punto di caduta.
Durata (T)	Il tempo che il proietto impiega per passare dall'origine al punto di caduta.
Forza viva alla bocca	$\frac{1}{2} m V^2 = \frac{1}{2} \frac{p}{g} V^2$ (dove m e p sono la massa e il peso del proietto).
Forza viva residua	$\frac{1}{2} mv^2$

3 – La misura degli angoli.

Misurare una grandezza significa paragonarla ad un'altra grandezza della stessa specie, scelta come unità di misura.

Le unità di misura sono arbitrarie, però si cerca di assumerle in modo tale che le operazioni di misura siano pratiche, rapide e comode.

Per quanto concerne la misura degli angoli, sia per l'artiglieria che per le armi portatili, si impiegano generalmente i gradi sessagesimali, i millesimi esatti od i millesimi convenzionali.

a) Gradi. – La divisione del cerchio in 360 gradi è molto antica e risale ai primi astronomi caldei.

I 360 gradi corrispondono, secondo quegli studiosi, ai 360 giorni dell'anno sidereo: un grado era, nei loro intendimenti, lo spostamento della volta celeste in un giorno sidereo.

Il grado è perciò una unità di misura squisitamente convenzionale, pure consentendo misure esatte quanto si vuole, tanto che è ancor oggi l'unità di misura in uso in topografia, in geodesia, in astronomia.

b) Millesimi. – È però possibile esprimere la grandezza di un angolo in un modo più semplice, e cioè darne la misura sotto forma di rapporto. Se si considera una circonferenza di raggio 1000, un arco della lunghezza 1 è visto dal centro sotto l'angolo di $\frac{1}{1000}$; questo rapporto definisce la unità di misura angolare: il millesimo esatto.

Un arco della lunghezza del raggio, cioè un radiante, sottenderà al centro un angolo che vale 1000 millesimi e poichè tutta la circonferenza è espressa da $2\pi \cdot 1000$, essa contiene:

$$2 \times 3.14159\cdots \times 1000 = 6283,18\cdots \text{ millesimi.}$$

La circonferenza non ne contiene perciò un numero esatto, e soltanto gli strumenti di puntamento, che utilizzano un arco di circonferenza, come quelli di elevazione, possono impiegare tale unità di misura.

Dovendosi graduare l'intera circonferenza, si è convenuto di ottenere un numero intero di parti e cioè 6000, 6200 e 6400 parti. Noi abbiamo adottato la divisione in 6400 parti che, oltre ad essere la più vicina alla divisione in millesimi esatti, consente la divisione esatta per 8 e per 16. L'unità così definita, cioè $\frac{1}{6400}$ della circonferenza, si chiama millesimo convenzionale. Con tale unità l'angolo di 45° corrisponde ad 800 millesimi, quello di 90° a 1600^{∞} ecc.

Questo secondo tipo di millesimo è adottato per la misura degli angoli azimutali e va generalizzandosi anche per quelli zenitali.

L'adozione del millesimo (esatto o convenzionale) quale unità di misura angolare consente di determinare rapidamente l'ampiezza di un piccolo angolo, sia zenitale che azimutale, essendo noto che per piccoli angoli, i valori del seno e della tangente sono pressochè eguali a quello dell'arco e quindi la lunghezza dell'arco, espresso in millesimi esatti o convenzionali, rappresenta anche il valore del seno e della tangente del medesimo. Pertanto avendo un bersaglio distante D dalla batteria col dislivello h (batteria-bersaglio), l'angolo di sito ε è definito dalla $tg\,\varepsilon = \frac{h}{D}$ e cioè $\varepsilon^{\infty} = \frac{h}{D}$. Ancora: se è nota l'ampiezza l (espressa in metri), di un bersaglio, e si determina, con uno strumento di puntamento, l'angolo β in millesimi sotto il quale è visto il bersaglio dalla batteria, la distanza D batteria-bersaglio è esattamente: $D = \frac{l}{tg\,\beta}$ e per quanto detto sopra: $D_{Km} = \frac{l}{\beta^{\infty}}$. Se invece fossero noti D ed l, potrebbe determinarsi β.

In rapporto al grado si ha:

millesimo esatto $= \frac{1}{6,283} = 0,05730$ gradi.

1 grado = 17,453 millesimi esatti.

millesimo convenzionale $= \frac{1}{6400} = 0,05625$ gradi.

1 grado = 17,778 millesimi convenzionali.

CAPITOLO I

MOVIMENTO NEL VUOTO

1 – Premesse.

Il proietto, lungo la sua traiettoria, è soggetto a due forze: il peso e la resistenza del mezzo; la prima agisce verticalmente in basso e tende ad abbassarlo, la seconda, che nel problema balistico principale considereremo direttamente opposta alla velocità, tende a ritardarne il moto.

Questa seconda forza, in genere, ha maggiore influenza della prima, quindi a rigore non potrebbe mai esser trascurata; però, nello studiare il moto del proietto astraendo dalla resistenza, si perviene ad espressioni che possono servire, in mancanza d'altro, a dare un limite da cui si discostano od a cui convergono certe quantità del tiro nell'aria.

Inoltre, quando si tratti di proietti lanciati con piccole velocità iniziali e con notevoli angoli di proiezione, è preponderante l'influenza del peso sulla resistenza e quindi, in taluni casi, possono essere impiegate le formule dedotte per il vuoto anche per la risoluzione dei problemi dell'aria.

Il problema del tiro nel vuoto è puramente teorico, però è facile e fornisce espressioni assai semplici e che possono esser ritenute, in qualche caso, abbastanza approssimate.

La conoscenza di queste espressioni può dare, grosso modo, una idea circa la soluzione dei problemi della balistica e fornire, in prima approssimazione, la soluzione di alcuni problemi pratici del tiro.

La conoscenza delle leggi del movimento di un proietto nel vuoto ha costituito per molto tempo tutta la balistica esterna.

La impossibilità della determinazione sperimentale della velocità del proietto, i valori assai piccoli di questa, e la lieve influenza della resistenza del mezzo, permettevano, scegliendo caso per caso un conveniente valore della velocità iniziale, di ottenere compensazioni sufficienti tra le gittate e le durate, in modo da avere, pur con formule assai semplici, una soluzione soddisfacente del problema balistico.

Come si è accennato, l'invenzione del pendolo balistico, che permise di determinare la velocità in qualsiasi punto della traiettoria, pose in evidenza l'influenza della resistenza opposta dal mezzo al moto dei proietti, perchè ne era possibile la determinazione sperimentale e quindi obbligò gli studiosi a tener conto di questa nuova forza ed a cercare soluzioni più approssimate di quella parabolica.

Sull'importanza della resistenza dell'aria, valgono i seguenti due esempi:

1) Un proiettile di piombo per fanteria con rivestimento di acciaio (peso gr. 10.00), lanciato con un angolo di proiezione di $\sim 32^{\circ}$, con velocità iniziale di 895 m/s, ha una gittata di m. 3400. Lo stesso proiettile, lanciato nel vuoto con la stessa velocità iniziale raggiungerebbe la gittata max. di m. 82.000 circa. La gittata in aria è quindi il 4,2 % di quella nel vuoto.

2) Se lo stesso proiettile, cioè con la stessa forma e dimensioni, fosse di alluminio (peso gr. 2,64) e lo si potesse lanciare con la velocità iniziale di 2000 m/s e con 32° di angolo di proiezione, il ramo ascendente della traiettoria risulterebbe straordinariamente teso; per $x = 174$ m. si avrebbe $\theta = 31°56'$, mentre la velocità sarebbe già ridotta a 780 m/s; al vertice, (di ordinate $x_0 = 1154$ m.; $y = 563$ m.), la velocità sarebbe di soli 63 m/s; il ramo discendente riuscirebbe fortemente curvo; l'angolo di caduta $\omega = 77°$ (in luogo di 32° nel vuoto); la velocità di caduta m. 72 m/s, (in luogo di 2000 nel vuoto); la gittata massima m. 1606 in luogo di m. 410.000 circa nel vuoto, cioè il 0,44 %. (Calcolo del Capit. Weissmann dell'istituto Fisico della Tecnische Hochschule di Berlino).

Se questo proiettile di alluminio potesse raggiungere la velocità di 3000 m/s esso, nell'oscurità diverrebbe luminoso, perchè l'aumento di temperatura risulterebbe di ~ 4400° (contro 380° per un proiettile di 895 m/s di velocità).

2 – Elementi della traiettoria.

a) Equazione in coordinate cartesiane.

Il problema del moto del proietto nel vuoto può essere enunciato nel modo seguente:

« Determinare la traiettoria di un grave lanciato nel vuoto con velocità V e con angolo di proiezione φ ».

Analogamente a quanto viene fatto in meccanica, considereremo tutta la massa del proietto concentrata nel suo baricentro, al quale viene applicata la forza peso diretta verticalmente in basso.

Supponiamo la gravità costante in grandezza ed in direzione, poichè gli errori che derivano da questa ipotesi, come dimostreremo in seguito, sono trascurabili.

Ciò posto, essendo il proietto soggetto ad una forza contenuta in un piano verticale, il suo baricentro descriverà una curva piana e quindi, per il nostro studio, potremo riferirci a due assi coordinati aventi l'origine alla bocca del pezzo.

Indicheremo sempre con x le ascisse e con y le ordinate della traiettoria; φ sarà l'angolo formato dal prolungamento dell'asse del pezzo al momento dello sparo con l'orizzonte (angolo di proiezione); v la velocità che all'inizio del moto verrà indicata con V (vel. iniziale); t il tempo.

Nel vuoto, un proietto con velocità V, se non fosse soggetto alla gravità, si muoverebbe per inerzia indefinitamente secondo una retta.

Invece, per effetto della accelerazione della gravità, il proietto si abbassa.

Consideriamo il moto di un punto materiale nelle condizioni sopra indicate.

Evidentemente, essendo il peso p verticale, non vi sarà alcuna forza agente nella direzione delle ascisse; perciò il moto orizzontale, essendo l'accelerazione zero, sarà uniforme, mentre quello verticale sarà modificato dalla forza p e quindi dall'accelerazione corrispondente.

Considerando le forze, si potrà scrivere per il noto principio di meccanica:

$$\frac{p}{g}\,\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \qquad \frac{p}{g}\,\frac{d^2y}{dt^2} = -\,p$$

od anche:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -g \qquad [1]$$

le quali esprimono i due teoremi:

1°) *Il movimento nel vuoto è indipendente non solo dalla forma del proietto, ma anche dal peso e dalle sue dimensioni. Infatti nel vuoto tutti i corpi lanciati con la stessa velocità raggiungono la stessa gittata.*

2°) *Nel vuoto il moto orizzontale è uniforme e quello verticale è uniformemente vario.*

Integrando le due equazioni [1] si ha:

$$\frac{dx}{dt} = \text{cost.} \qquad \frac{dy}{dt} = -gt + \text{cost.}$$

L'integrazione verrà eseguita dall'origine ad un punto generico e quindi, notando che nell'origine, per $t = 0$, la velocità orizzontale è uguale a $V \cos \varphi$ e quella verticale è V sen φ, sarà:

$$\frac{dx}{dt} = V \cos \varphi \qquad [2]$$

$$\frac{dy}{dt} = V \operatorname{sen} \varphi - gt \qquad [3]$$

Dalla equazione [2] si deduce una proprietà molto importante e cioè che nel vuoto la velocità orizzontale è costante.

Integrando ancora una volta si ha:

$$\int_0^x dx = \int_0^t V \cos \varphi \, dt\,; \qquad x = Vt \cos \varphi \qquad [4]$$

$$\int_0^y dy = \int_0^t V \operatorname{sen} \varphi \, dt - \int_0^t gt \, dt \qquad y = Vt \operatorname{sen} \varphi - \frac{1}{2} gt^2 \qquad [5]$$

Ricavando t dalla [4] $\left(t = \frac{x}{V \cos \varphi}\right)$ e sostituendo nella [5] si ha:

$$y = V \operatorname{sen} \varphi \frac{x}{V \cos \varphi} - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{V^2 \cos^2 \varphi}$$

$$y = x \operatorname{tg} \varphi - \frac{g x^2}{2 V^2 \cos^2 \varphi} \qquad [6]$$

Esaminando questa equazione, vediamo che essa rappresenta una curva di secondo grado nella quale ad ogni valore reale della x corrisponde sempre uno ed uno solo valore reale della y; quindi si tratta di una parabola ad asse verticale, il cui vertice coincide con quello della traiettoria.

Essendo una parabola, ad asse verticale, i due rami saranno simmetrici.

b) Abbassamento.

Esaminando l'equazione [6] della traiettoria appare evidente che la quantità $x \operatorname{tg} \varphi - y = AP$ (fig. 2) rappresenta di quanto si abbassa il proietto lungo la verticale. Se il moto avvenisse lungo la linea di proiezione, dopo il tempo t il proietto si troverebbe nel punto A, ma per effetto della gravità esso si abbassa e qua-

lora cadesse lungo la verticale, nel tempo t si sarebbe abbassato di $\frac{1}{2} gt^2$; con la composizione dei due moti ne deriva che il proietto dopo il tempo t sarà in P.

Si deduce che:

$$\frac{1}{2} gt^2 = \frac{gx^2}{2 V^2 \cos^2 \varphi} = x \, tg \, \varphi - y$$

Se prendiamo come assi coordinati la linea di proiezione e la verticale e riferiamo il punto P a questi due assi, vediamo che:

$$x' = \frac{x}{\cos \varphi} \qquad [7]$$

$$y' = \frac{gx^2}{2 V^2 \cos^2 \varphi} = \frac{gx'^2}{2 V^2} \qquad [8]$$

Dalla [8] si deduce una proprietà molto importante, e cioè: «*Gli abbassamenti a pari distanza sulla linea di proiezione sono indipendenti da* φ *e sono uguali, sempre che, ben inteso, si spari con la stessa* V ».

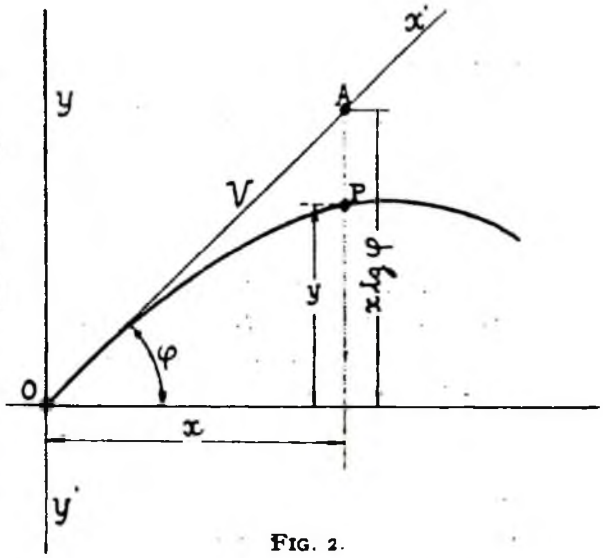


FIG. 2.

Questo teorema, dedotto nel vuoto, può essere applicato con sufficiente approssimazione anche nell'aria, quando si tratti di proietti pesanti e con piccola V, ed un'applicazione si ha subito per la costruzione delle traiettorie grafiche col metodo degli abbassamenti.

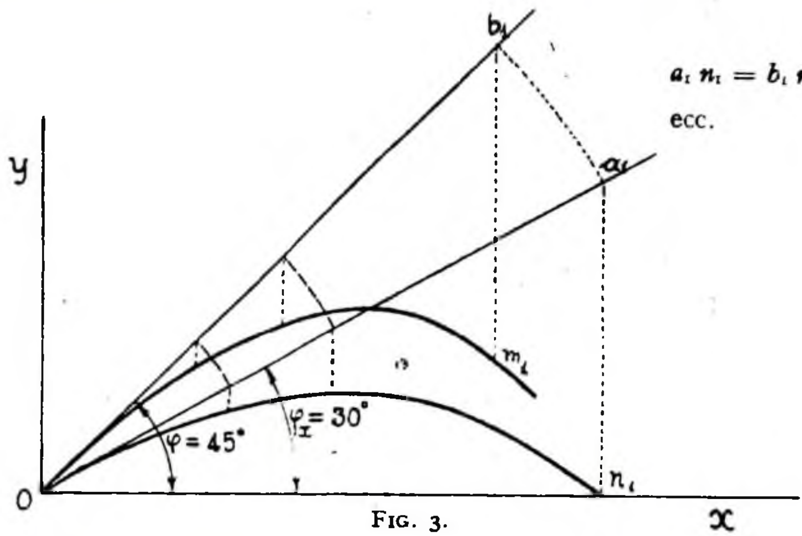


FIG. 3.

Infatti, se gli abbassamenti a pari distanza sulla linea di proiezione si mantengono costanti, disponendo di una tavola di tiro sarà facile, per vari valori della x, ricavare i corrispondenti $\varphi_x = \alpha + \rho$ e quindi $\frac{x}{\cos \varphi_x} = x'$ ed ancora $x \, tg \, \varphi_x = y'$; portando sulla linea di proiezione della traiettoria che si vuol costruire la x' e da tale punto la y' verticalmente in basso, si ha un punto della traiettoria.

Più rapidamente si può ricorrere alla soluzione grafica indicata in figura 3.

c) GITTATA.

È la distanza dall'origine del 2° punto d'incontro della traiettoria con l'orizzonte del pezzo.

Risolvendo l'equazione della traiettoria rispetto ad x, avendo posto $y = 0$, si hanno due radici di cui una non interessa perchè si ha per $x = 0$; dalla:

$$x \, tg \, \varphi - \frac{g x^2}{2 \, V^2 \cos^2 \varphi} = 0$$

dividendo per x e risolvendo rispetto ad essa si ha:

$$X = \frac{V^2 \operatorname{sen} 2 \varphi}{g} \qquad [9]$$

che rappresenta la gittata la quale è proporzionale al quadrato della velocità iniziale e cresce col crescere di φ, da 0° a 45°. Aumentando oltre i 45°, la X diminuisce per ridursi a 0 per $\varphi = 90°$. Dalla formula appare che X è massima per $\varphi = 45°$, nel qual caso

$$\bar{X} = \frac{V^2}{g} \qquad [10]$$

uguale al doppio dell'altezza alla quale perverrebbe un mobile lanciato verticalmente in alto con velocità V.

Infatti sappiamo che nella caduta dei gravi:

$$V = gt \qquad y = \frac{1}{2} g t^2 \qquad t = \frac{V}{g} \qquad y = \frac{1}{2} g \frac{V^2}{g^2} = \frac{V^2}{2 \, g} \qquad [11]$$

Notiamo ancora che siccome $\operatorname{sen} 2 \varphi = \operatorname{sen} (180° - 2 \varphi)$, si hanno due angoli che danno uguale gittata e precisamente φ e $90° - \varphi$, cioè: « *angoli complementari danno gittate uguali* ».

Inoltre, per $\varphi = 15°$ e $\varphi = 75°$ si ha:

$$\operatorname{sen} 2 \varphi = \operatorname{sen} 30° = \frac{1}{2} \, ; \qquad \operatorname{sen} 2 \varphi = \operatorname{sen} 150° = \frac{1}{2} \, .$$

$$X = \frac{V^2}{2 \, g} \qquad [12]$$

Cioè con angoli di proiezione $\varphi = 15°$ *e* $75°$ *la gittata è metà della gittata massima.*

La formula della traiettoria può esser resa indipendente dalla V; infatti dalla:

$$y = x \, tg \, \varphi - \frac{g x^2}{2 \, V^2 \cos^2 \varphi} \, ; \qquad X = \frac{V^2 \operatorname{sen} 2 \varphi}{g}$$

si ha:

$$V^2 = \frac{g X}{\operatorname{sen} 2 \varphi}$$

e sostituendo nella 1ª.

$$y = x \, tg \, \varphi - \frac{g x^2 \operatorname{sen} 2 \varphi}{2 \, g \, X \cos^2 \varphi} = x \, tg \, \varphi - \frac{x^2 \operatorname{sen} \varphi}{X \cos \varphi}$$

$$y = x \, tg \, \varphi \left(1 - \frac{x}{X}\right) \qquad [13]$$

Questa formula permette una utile applicazione anche nell'aria, Infatti se supponiamo di avere un ostacolo innanzi alla batteria a distanza x ed alto h si può controllare se sparando a distanza X, la traiettoria oltrepassa l'ostacolo.

L'angolo φ è noto dalla tavola di tiro; quindi applicando la relazione [13], se y risulta maggiore dell'altezza h dell'ostacolo il proietto passa e passerà a maggior ragione nell'aria perchè, come vedremo a suo tempo, la traiettoria nell'aria è tutta sopra a quella del vuoto avente uguale φ ed X (evidentemente la V sarà diversa).

Applicazione 1ª.

$X = 3000 \qquad x = 200 \qquad h = 30\,m. \qquad \varphi = 10° \qquad tg\,\varphi = 0{,}176$

$\frac{x}{X} = \frac{1}{15} \qquad 1 - \frac{x}{X} = \frac{14}{15} \qquad x\,tg\,\varphi = 35{,}2$

$y = 32{,}8$

Applicazione 2ª.

Quale pendenza occorrerebbe dare all'ultimo tratto di una strada ferrata perchè una locomotiva lanciata ad una velocità proporzionale a $\cos\varphi$ compia il massimo cammino senza toccare terra?

In altri termini quale deve essere φ che dà il massimo X?

La velocità secondo il binario inclinato di φ sarà: $V_1 = V\cos\varphi$

$$X = \frac{V_1^2 \operatorname{sen} 2\varphi}{g} = \frac{(V\cos\varphi)^2 \operatorname{sen} 2\varphi}{g} = \frac{V^2}{g}\cos^2\varphi \operatorname{sen} 2\varphi$$

Occorre ora trovare il massimo di questa espressione:

Deriviamo rispetto a φ ed eguagliamo a 0

$$2\cos^2\varphi\cos 2\varphi - 2\cos\varphi \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen} 2\varphi = 0$$
$$\cos^2\varphi\cos 2\varphi - 2\cos^2\varphi \operatorname{sen}^2\varphi = 0$$
$$\cos^2\varphi - \operatorname{sen}^2\varphi - 2\operatorname{sen}^2\varphi = 0$$
$$1 - \operatorname{sen}^2\varphi - 3\operatorname{sen}^2\varphi = 0$$
$$1 - 4\operatorname{sen}^2\varphi = 0$$
$$\operatorname{sen}\varphi = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \qquad \varphi = 30^0.$$

Se $V = 30$ m/s,

$$X = \frac{V^2}{g}\cos^2\varphi \operatorname{sen} 2\varphi \qquad \cos^2\varphi = 0{,}75$$
$$\operatorname{sen} 2\varphi = 0{,}866$$
$$X = \frac{900}{9{,}81} \times 0{,}75 \times 0{,}866 = 59\text{ m. circa.}$$

d) ALTEZZA DEL TIRO.

Giacchè la traiettoria è una parabola, essa sarà simmetrica ed il vertice sarà a distanza dall'origine di $\frac{X}{2} = x_0$. Se indichiamo con Y l'ordinata e sostituiamo ad x il valore $\frac{X}{2}$ nella [13] si avrà:

$$Y = \frac{X}{2}\,tg\,\varphi\left(1 - \frac{X}{2X}\right) = \frac{X}{4}\,tg\,\varphi$$

che è l'ordinata del vertice.

La quantità $X tg\,\varphi$ rappresenta, come appare chiaramente dalla figura, l'abbassamento totale, per cui l'altezza del vertice è $\frac{1}{4}$ dell'abbassamento totale.

Se nell'espressione dell'abbassamento si pone $x = \frac{X}{2}$ si ha:

$$\frac{X}{2} tg\, \varphi - Y = Y \qquad [14]$$

Cioè l'abbassamento corrispondente al vertice è uguale all'altezza del tiro.
Ciò poteva dedursi anche considerando la nota proprietà della parabola per la quale è: (fig. 4)

$$DA = AB;$$

A questa proprietà faremo spesso ricorso anche per il tiro nell'aria.

Facendo $\varphi = 45°$ si otterrà:

$$Y = \frac{1}{4} X \text{ poichè } tg\, \varphi = 1$$

Se nella: $Y = \frac{1}{4} X tg\, \varphi$ si pone invece:

$$X = \frac{V^2 \operatorname{sen} 2\varphi}{g}$$

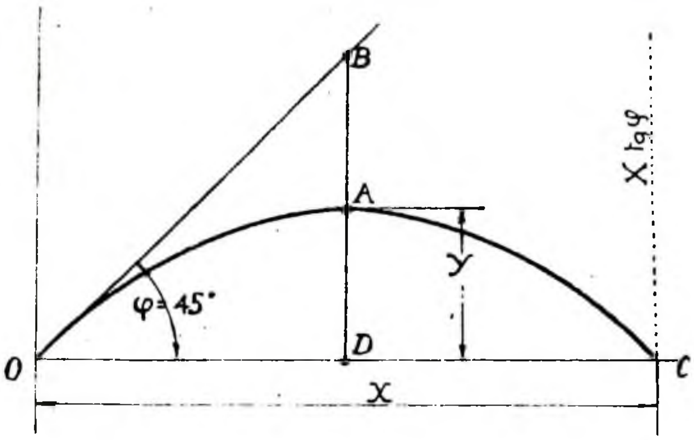


FIG. 4.

si ottiene:

$$Y = \frac{1}{4} \frac{V^2 \operatorname{sen} 2\varphi}{g} tg\, \varphi = \frac{V^2}{4} \frac{2 \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi \operatorname{sen} \varphi}{\cos \varphi} = \frac{V^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}{2g} \qquad [15]$$

notiamo che: $V \operatorname{sen} \varphi$ è la componente verticale della velocità, quindi:

«L'altezza del tiro è uguale all'altezza dovuta alla componente verticale della velocità».

L'altezza del tiro cresce con φ ed è massima per $\varphi = 90°$ nel qual caso:

$$Y = \frac{V^2}{2g} = \frac{\bar{X}}{2} \qquad [16]$$

Consideriamo come caso particolare il tiro verticale, il tiro cioè nell'ipotesi di $\varphi = 90°$.

L'ascissa sarà sempre $x = 0$ giacchè: $x = Vt \cos \varphi$; l'inclinazione pure sarà sempre $\frac{\pi}{2}$.

Le sole variabili sono perciò Y, t.

In tale caso nel moto ascendente si avrà:

$$y = Vt - \frac{1}{2} gt^2 \qquad [17]$$

$$v = V - gt \qquad [18]$$

Risolvendo la prima rispetto a t, si ha:

$$\frac{1}{2} gt^2 - Vt + y = 0 \qquad t = \frac{V - \sqrt{V^2 - 2gy}}{g}$$

da cui si ricava ancora sostituendo nella [18]:

$$v = V - g\left(\frac{V - \sqrt{V^2 - 2gy}}{g}\right)$$

od anche:

$$v = V - V + \sqrt{V^2 - 2gy}$$

da cui:

$$v = \sqrt{V^2 - 2gy} \qquad [19]$$

Dalla [18] si ha ancora $t = \frac{V - v}{g}$ per cui:

$$y = V \frac{V - v}{g} - \frac{1}{2} g \frac{(V - v)^2}{g^2} = \frac{V^2 - v V}{g} - \frac{1}{2g} (V^2 + v^2 - 2 V v)$$

cioè:

$$y = \frac{2 V^2 - 2 v V - V^2 - v^2 + 2 V v}{2 g} = \frac{V^2 - v^2}{2 g} \qquad [20]$$

Al vertice, essendo $v = 0$, si avrà:

$$y = \frac{V^2}{2 g} = \frac{\overline{X}}{2} \qquad t = \frac{V}{g} \qquad [21]$$

e) Fuoco e direttrice.

Per una nota proprietà della parabola, la tangente nel vertice è il luogo dei piedi delle perpendicolari abbassate dal fuoco sulla tangente, per cui, tracciata la tangente nell'origine, dal punto d'incontro di essa con la tangente in *V*, si abbassi la normale che incontrerà l'asse della parabola in *F* (fuoco) il prolungamento di detta retta incontrerà l'asse delle *y* in *D*; l'orizzontale passante per *D* sarà la direttrice della parabola. Infatti perchè ciò sia vero è necessario che $OD = OF$. Giacchè la tangente di una parabola è ugualmente inclinata sull'asse e sulla congiungente il punto considerato col fuoco, sarà: (fig. 5)

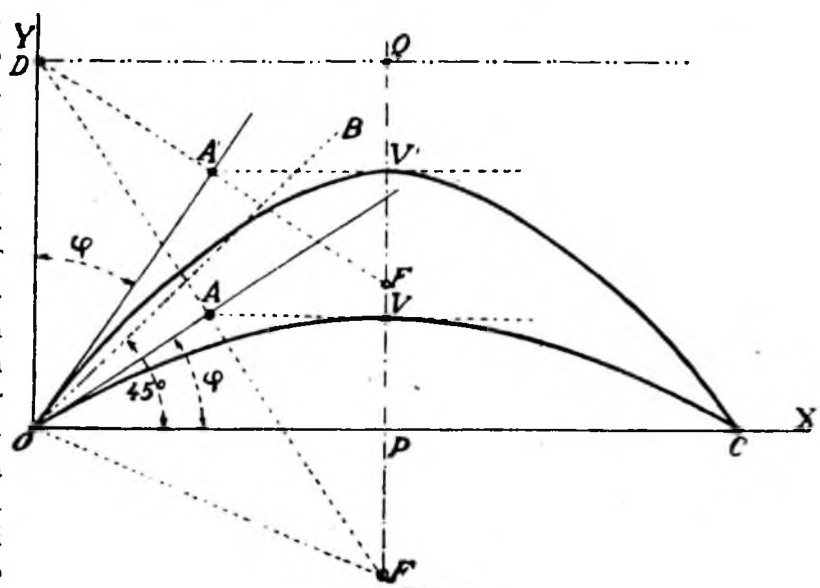


Fig. 5.

$$AOD = AOF, \quad \text{ancora} \quad \varphi = DFQ$$

perchè i due angoli hanno i lati normali, inoltre la OA è normale a DF quindi il triangolo FOD è isoscele e $OD = OF$.

Determiniamo ora le coordinate del fuoco e l'equazione della direttrice.

Essendo: $FV = VQ$ dal triangolo FDQ:

$$FV = VQ = \frac{1}{2} FQ$$

$$AV = \frac{DQ}{2} = \frac{X}{4}$$

Dal triangolo AVF si ha:

$$FV = \frac{AV}{tg\,\varphi} = \frac{X}{4\,tg\,\varphi} = \frac{V^2 \operatorname{sen} 2\varphi \cos\varphi}{4 g \operatorname{sen}\varphi} = \frac{2 V^2 \cos^2\varphi}{4 g} = \frac{V^2 \cos^2\varphi}{2 g}$$

L'ordinata del fuoco è y_o:

$$y_o = Y - FV = -\frac{V^2 \cos^2 \varphi}{2g} + Y = -\frac{V^2 \cos^2 \varphi}{2g} + \frac{X}{4} tg\, \varphi =$$

$$= -\left(\frac{V^2 \cos^2 \varphi}{2g} - \frac{2 V^2 \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi}{4g} \cdot \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\cos \varphi}\right) =$$

$$= -\left(\frac{V^2 \cos^2 \varphi}{2g} - \frac{V^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}{2g}\right) = -\frac{V^2}{2g} \cos 2\varphi =$$

$$= -\frac{\bar{X}}{2} \cos 2\varphi \qquad [22]$$

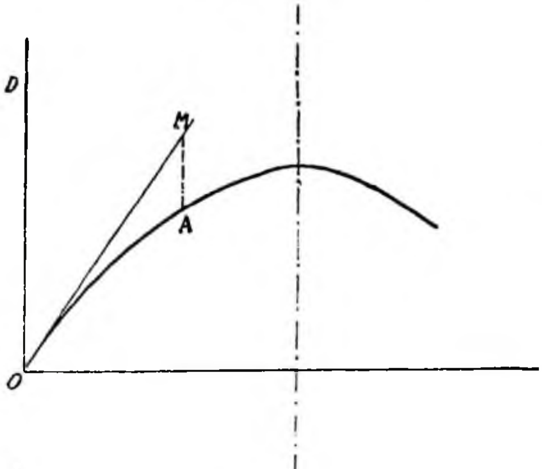


FIG. 6.

mentre l'ascissa è x_o:

$$x_o = \frac{V^2 \operatorname{sen} 2\varphi}{2g} = \frac{\bar{X}}{2} \operatorname{sen} 2\varphi \qquad [23]$$

Dall'espressione [22] si rileva che:

per : $\varphi < 45^\circ$ $\cos 2\varphi > 0$ ed $y_o < 0$ quindi il fuoco è al disotto dell'orizzonte del pezzo.

per : $\varphi = 45^\circ$ $y_o = 0$

per : $\varphi > 45^\circ$ $y_o < 0$ quindi il fuoco è al disopra dell'orizzonte del pezzo.

L'altezza della direttrice è:

$$y = PQ = Y + VQ$$

$$Y = \frac{1}{4} X\, tg\, \varphi \qquad VQ = \frac{X}{4\, tg\, \varphi}$$

quindi:

$$y = \frac{1}{4}\left(X\, tg\, \varphi + \frac{X}{tg\, \varphi}\right) = \frac{V^2 \operatorname{sen} 2\varphi}{4g}\left(\frac{\operatorname{sen} \varphi}{\cos \varphi} + \frac{\cos \varphi}{\operatorname{sen} \varphi}\right) =$$

$$= \frac{V^2 \operatorname{sen} 2\varphi}{4g} \cdot \frac{\operatorname{sen}^2 \varphi + \cos^2 \varphi}{\operatorname{sen} \varphi \cos \varphi} = \frac{V^2 \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi}{2g \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi} \qquad y = \frac{\bar{X}}{2} \qquad [24]$$

Questa altezza è quella che si raggiunge lanciando verticalmente il proietto con velocità V ed è indipendente da φ, per cui tutte le traiettorie con egual V e diverso φ hanno la stessa direttrice che segna il limite oltre il quale non si può giungere con la V considerata.

Teorema di Cassini.

« *La distanza OM percorsa sulla linea di proiezione è media proporzionale fra l'abbassamento AM ed il quadruplo della distanza della direttrice dall'origine* ».

Infatti: ponendo $OP = 4\, OD$ (fig. 6)
si ha:

$$OP = 4 \frac{\bar{X}}{2} = \frac{2 V^2}{g} \qquad OM = Vt \qquad \overline{OM}^2 = V^2 t^2 \qquad AM = \frac{1}{2} g t^2$$

da cui: $t^2 = \frac{2 AM}{g}$ quindi

$$\overline{OM}^2 = \frac{2 V^2}{g} AM = \qquad OM^2 = OP \cdot AM \qquad [25]$$

f) INCLINAZIONE.

Chiamando con θ l'inclinazione generica della traiettoria sarà:

$$tg\,\theta = \frac{dy}{dx}$$

per cui differenziando la

$$y = x\,tg\,\varphi - \frac{g\,x^2}{2\,V^2 \cos^2\varphi}$$

si avrà:

$$\frac{dy}{dx} = tg\,\varphi - \frac{g\,x}{V^2 \cos^2\varphi} \qquad [26]$$

od anche dalla:

$$y = x\,tg\,\varphi\left(1 - \frac{x}{X}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = tg\,\varphi\left(1 - \frac{2\,x}{X}\right) = \frac{2}{X}\,tg\,\varphi\left(\frac{X}{2} - x\right) = tg\,\theta$$

da cui si vede che a valori uguali e di segno opposto di $\frac{X}{2} - x$ corrispondono valori di θ uguali e di segno opposto, ciò che era prevedibile essendo i due rami della traiettoria simmetrici.

In particolare, per $x = X$ si ha:

$$\omega = \varphi \qquad [27]$$

g) VELOCITÀ.

La velocità in un punto qualunque della traiettoria può ricavarsi dalla:

$$\frac{dx}{dt} = v\cos\theta \ \text{ cioè: } \ v\cos\theta = V\cos\varphi$$

od anche, considerando il teorema delle forze vive, essendo p la forza ed y lo spostamento,

$$\int_{v\,\mathrm{sen}\,\varphi}^{v\,\mathrm{sen}\,\theta} d\left[\frac{1}{2}\,m\,(v\,\mathrm{sen}\,\theta)^2\right] = -\int_0^y p\,dy \qquad [28]$$

$$\frac{1}{2}\,m\,(v\,\mathrm{sen}\,\theta)^2 - \frac{1}{2}\,m\,(V\,\mathrm{sen}\,\varphi)^2 = -\,py$$

$$(v\,\mathrm{sen}\,\theta)^2 - (V\,\mathrm{sen}\,\varphi)^2 = -\,2\,g\,y \qquad [29]$$

$$(v\cos\theta)^2 - (V\cos\varphi)^2 = 0 \qquad [30]$$

Sommando la [29] con la [30] si ha:

$$v^2 = V^2 - 2\,gy \qquad [31]$$

dalla quale si deduce che:

1° *per* $y = 0 \quad v = V$
cioè la velocità di caduta è uguale a quella iniziale.
2° *per* $y = Y$ *la* v *è minima.*
3° *ad ordinate uguali corrispondono velocità uguali.*

h) TEMPO.

Dalla $x = Vt \cos \varphi$ si ricava:

$$t = \frac{x}{V \cos \varphi} = \frac{x'}{V} \qquad [32]$$

onde:

Il tempo che impiega il proietto a raggiungere un punto qualunque della traiettoria è uguale al tempo che impiegherebbe cadendo liberamente a percorrere l'abbassamento del punto.

Il tempo che il proietto impiega a raggiungere il vertice è:

$$t_2 = \frac{X}{2 V \cos \varphi} = t_1 \qquad [33]$$

quindi, in particolare, ***archi corrispondenti del ramo ascendente e di quello discendente sono percorsi in tempi uguali.***

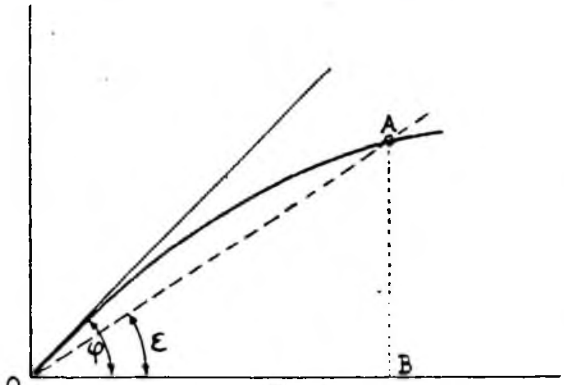


FIG. 7.

Applicazione:

Un proietto è lanciato con angolo di proiezione φ e velocità iniziale V tali che la traiettoria passa per un punto A di sito ε.

Si sa che se il proietto percorresse la linea di sito con velocità uniforme uguale alla velocità iniziale, giungerebbe nel punto A dopo un tempo τ. Quale è il tempo occorrente al proietto per giungere nel punto A? (fig. 7)

$$OA = V\tau \qquad OB = x = V\tau \cos \varepsilon$$

$$t = \frac{x}{V \cos \varphi} = \frac{V\tau \cos \varepsilon}{V \cos \varphi} \qquad t = \tau \frac{\cos \varepsilon}{\cos \varphi} \qquad [34]$$

Applicazione:

Determinare l'ordinata y_1 del punto A, per il quale si ha che il tempo impiegato dal proietto a percorrere l'arco di traiettoria $A_1 A_2$ è uguale a quello dal punto A_2 al punto di caduta (fig. 8).

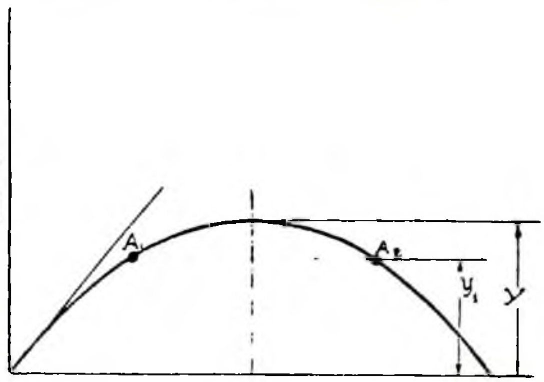


FIG. 8.

Si vede facilmente che:

$$y_1 = \frac{3}{4} Y$$

i) DURATA.

Se si pone $x = X$; $t = T$ risulta:

$$T = \frac{X}{V \cos \varphi} \qquad [35]$$

e volendo l'espressione della durata indipendente dalla V poichè:

$$X = \frac{V^2 \operatorname{sen} 2\varphi}{g} \qquad V = \sqrt{\frac{gX}{\operatorname{sen} 2\varphi}}$$

$$T = \sqrt{\frac{X^2 \operatorname{sen} 2\varphi}{g X \cos^2\varphi}} = \sqrt{\frac{2 X \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi}{g \cos^2\varphi}} = \sqrt{\frac{2 X \, tg\, \varphi}{g}} \qquad [36]$$

Volendo invece la T indipendente dalla X.

$$T = \frac{V^2 \operatorname{sen} 2\varphi}{g V \cos\varphi} = \frac{2 V^2 \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi}{g V \cos\varphi} = \frac{2 V \operatorname{sen}\varphi}{g} \qquad [37]$$

Queste formule applicate al calcolo di durate relative a proietti lanciati con piccole velocità iniziali, rispondono abbastanza bene.

Applicazione 1ª:

Mortaio da 210/8; Granata da 210; $V = 180$ m/s; $\rho = 8^{00}$.
Determinare le durate corrispondenti alle seguenti gittate:

$$= \sqrt{\frac{2 X \, tg\, \varphi}{g}}$$

X	1000	1500	2000	2500
α	153^{00}	244^{00}	350^{00}	483^{00}
φ	9° 3′	14° 10′	20° 8′	27° 37′
$\log X$	3,00000	3,17609	3,30103	3,39794
$\log 2$	0,30103	0,30103	0,30103	0,30103
$\log tg\,\varphi$	$\bar{1}$,20216	$\bar{1}$,40212	$\bar{1}$,56420	$\bar{1}$,71863
$\operatorname{colg} g$	$\bar{1}$,00855	$\bar{1}$,00855	$\bar{1}$,00855	$\bar{1}$,00855
$\log \frac{2 X \, tg\, \varphi}{g}$	1,51174	1,88779	2,17481	2,42615
$\log \sqrt{\frac{2 X \, tg\, \varphi}{g}}$	0,75587	0,94389	1,08740	1,21308
T	5,70	8,79	12,23	16,33
$T_{tab.}$	5,75	8,80	12,30	16,60

Applicazione 2ª:

Mortaio da 210/8; Granata da 210.
Dati: $V = 180$ m/s; $T = 12''$; si vuole φ.

$$T = \frac{2 V \operatorname{sen}\varphi}{g} \qquad \operatorname{sen}\varphi = \frac{g T}{2 V}$$

$\log g = 0{,}99145$
$\log T = 1{,}07918$
$\operatorname{colg} V = \bar{3}{,}44370$

$\log \operatorname{sen}\varphi = \bar{1}{,}51433 \qquad \varphi = 19^\circ\, 5'$

Dalle tavole di tiro si ha: $\varphi = 19^\circ\, 25'$

Applicazione 3ª:

Mortaio da 210/8; Granata da 210.

Dati: $V = 217$ m/s; $T = 10''$; si vuole φ

$\log g$	0,99145
$\log T$	1,00000
colg V	$\bar{3}$,36251
log sen φ	$\bar{1}$,35396

$\varphi = 13^\circ\ 3'$

Dalle tavole di tiro si ha: $\varphi = 13^\circ\ 6'$

Come appare chiaramente dagli esempi fatti, i valori di T, che si ricavano applicando le formule dal vuoto, sono molto prossimi a quelli tabulari purchè, beninteso, si tratti di proiettili relativamente pesanti lanciati con piccole velocità iniziali.

3 – Elementi della traiettoria in funzione del sito e dell'inclinazione.

a) Equazione della traiettoria.

Se dividiamo l'equazione della traiettoria [6] per x e poniamo

$$tg\,\varepsilon = \frac{y}{x}$$

si ha:

$$tg\,\varepsilon = tg\,\varphi - \frac{gx}{2\,V^2\cos^2\varphi}$$

da cui

$$x = \frac{2\,V^2\cos^2\varphi}{g}\,(tg\,\varphi - tg\,\varepsilon) \qquad [38]$$

altra forma della equazione della traiettoria, che da l'ascissa del punto della traiettoria cui corrisponde l'angolo di sito ε.

Notando ancora che $tg\,\varphi = \frac{\text{sen}\,\varphi}{\cos\varphi}$ e $tg\,\varepsilon = \frac{\text{sen}\,\varepsilon}{\cos\varepsilon}$ si ha:

$$x = \frac{2\,V^2\cos^2\varphi}{g} \cdot \frac{\text{sen}\,(\varphi - \varepsilon)}{\cos\varphi\cos\varepsilon} = \frac{2\,V^2\cos\varphi\,\text{sen}\,(\varphi - \varepsilon)}{g\cos\varepsilon} \qquad [39]$$

Se si ricorda che $2\,\text{sen}\,\alpha\cos\beta = \text{sen}\,(\alpha + \beta) + \text{sen}\,(\alpha - \beta)$ si avrà:

$$2\,\text{sen}\,(\varphi - \varepsilon)\cos\varphi = \text{sen}\,(2\,\varphi - \varepsilon) - \text{sen}\,\varepsilon$$

per cui

$$x = \frac{V^2}{g} \cdot \frac{\text{sen}\,(2\,\varphi - \varepsilon) - \text{sen}\,\varepsilon}{\cos\varepsilon} \qquad [40]$$

formula questa assai importante che permette di determinare l'angolo di proiezione φ necessario a battere con velocità V un punto $P\,(x, y)$

Infatti si ricava:

$$\text{sen}\,(2\,\varphi - \varepsilon) = \text{sen}\,\varepsilon + \frac{gx}{V^2}\cos\varepsilon$$

L'applicazione di questa formula non è troppo agevole; volendola rendere logaritmica basta porre

$$tg\,\psi = \frac{gx}{V^2} = \frac{x}{\overline{X}} \qquad [41]$$

per cui si ha

$$\text{sen}\,(2\,\varphi - \varepsilon) = \text{sen}\,\varepsilon + tg\,\psi \cos \varepsilon = \frac{\text{sen}\,(\psi + \varepsilon)}{\cos \psi} \qquad [42]$$

che è logaritmica.

b) Gittata sopra un piano inclinato.

Volendosi la gittata sopra un piano inclinato dell'angolo di sito ε basterà dividere la [38] per cos ε cioè:

$$X_i = \frac{2\,V^2 \cos^2 \varphi}{g \cos \varepsilon} \left(tg\,\varphi - tg\,\varepsilon\right)$$

c) Gittata massima.

La massima gittata si ha quando è massima l'espressione della [40]

$$x = \frac{V^2}{g} \cdot \frac{\text{sen}\,(2\,\varphi - \varepsilon) - \text{sen}\,\varepsilon}{\cos \varepsilon}$$

il che si verifica quando sen $(2\,\varphi - \varepsilon) = 1$ cioè

$$(2\,\varphi - \varepsilon) = 90^0 \qquad \varphi = 45^0 + \frac{\varepsilon}{2}$$

da cui:

La linea di proiezione che dà la gittata massima su un piano inclinato è la bisettrice dell'angolo formato dalla linea di sito e dalla verticale (vedi fig. 9).

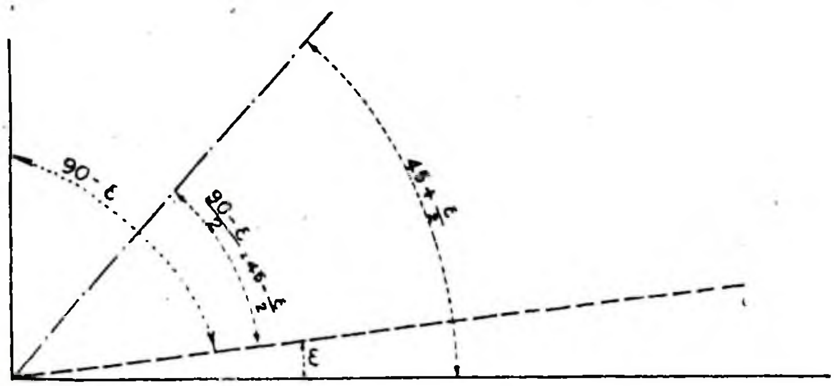


Fig. 9.

In questo caso si ha

$$\bar{x} = \frac{V^2}{g} \cdot \frac{1 - \text{sen}\,\varepsilon}{\cos \varepsilon}$$

e quindi la distanza massima raggiunta sulla linea di sito sarà

$$\overline{X}_i = \frac{\bar{x}}{\cos \varepsilon} = \frac{V^2}{g} \cdot \frac{1 - \text{sen}\,\varepsilon}{\cos^2 \varepsilon} = \frac{V^2}{g} \cdot \frac{1 - \text{sen}\,\varepsilon}{1 - \text{sen}^2\,\varepsilon} = \frac{V^2}{g} \cdot \frac{1}{1 + \text{sen}\,\varepsilon} \qquad [43]$$

ma $\frac{V^2}{g} = \overline{X}$ quindi

$$\overline{X}_i \cdot (1 + \text{sen}\,\varepsilon) = \overline{X} = \overline{X}_i + \overline{X}_i\,\text{sen}\,\varepsilon \qquad [44]$$

e poichè $X_1 \operatorname{sen} \varepsilon = h$ dislivello del punto d'arrivo sarà

$$\overline{X} = \overline{X_1} + h \qquad [45]$$

La gittata massima su una linea di sito più il dislivello del punto d'arrivo, è uguale ad una costante rappresentata dalla gittata massima sull'orizzonte.

Se è $\varepsilon < 0$ naturalmente la somma diventa una differenza.

Si può così stabilire se è possibile colpire un punto situato fuori dell'orizzonte del pezzo.

Applicazione:

È possibile lanciare dalla sommità della piramide di Cheophe una pietra che ne raggiunga la base?

L'altezza della piramide è m. 137,2, la lunghezza del lato della base quadrata è m. 227,5.

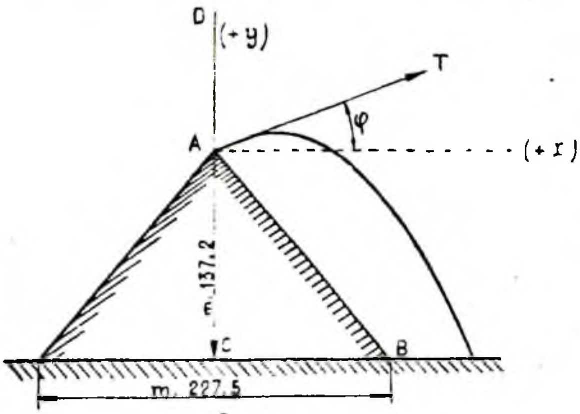


FIG. 10.

L'angolo di sito del bersaglio è di — 50° 20'.

L'angolo che dà la massima gittata su una linea di sito si è visto esser uguale alla bisettrice dell'angolo DAB.

$\widehat{DAT} = \frac{1}{2} \widehat{DAB}$ da cui, sostituendo

$$\frac{90^\circ + 50^\circ 20'}{2} = 70^\circ 10' \text{ quindi}$$

$$\varphi = 90^\circ - 70^\circ 10' = 19^\circ 50'$$

La velocità media con la quale si lancia una pietra è di 24 m/s; quindi dalla

$$x = \frac{2 V^2 \cos^2 \varphi}{g} \cdot (tg\, \varphi - tg\, \varepsilon)$$

si ricava:

$$\begin{aligned}
\log 2 &= 0,30103 \\
\log V^2 &= 2,76042 \\
\log \cos^2 \varphi &= \bar{1},94688 \\
\operatorname{colog} g &= \bar{1},00855 \\
\log \frac{2 V^2 \cos^2 \varphi}{g} &= 2,01688 \\
\log (tg\, \varphi - tg\, \varepsilon) &= 0,19496 \\
\log x &= 2,21184 \\
x &= 162,9
\end{aligned}$$

$$tg\, \varphi - tg\, \varepsilon = tg\, 19^\circ 50' - (-\, tg\, 50^\circ 20')$$

$$\begin{aligned}
tg\, 19^\circ 50' &= 0,3607 \\
tg\, 50^\circ 20' &= 1,2059 \\
tg\, \varphi - tg\, \varepsilon &= 1,5666
\end{aligned}$$

Se considero $V = 20$ m/s ottengo $X = 113,1$

Allo stesso risultato si poteva pervenire applicando la [45]

$$\overline{X} = \overline{X}_1 + h$$

ove

$$\overline{X} = \frac{V^2}{g} = \frac{400}{9.81} = 40,8$$

$$h = -137,2;\ \overline{X}_1 = \frac{CB}{\cos\varepsilon} = \frac{113,75}{\cos 50^\circ 20'} = 182,4$$

quindi:

$$\overline{X}_1 + h = 182,4 - 137,2 = 45,2$$

perciò il lancio è possibile poichè $\overline{X}_1 + h > \overline{X}$

d) Angoli di proiezione che danno gittate uguali.

Dalla

$$x = \frac{V^2}{g}\ \frac{\text{sen}\,(2\,\varphi - \varepsilon) - \text{sen}\,\varepsilon}{\cos\varepsilon}$$

si rileva che due sono gli angoli che danno gittate uguali su una linea di sito; se φ_1 è uno di essi, l'altro sarà:

$$2\,\varphi_2 - \varepsilon = 180^\circ - (2\,\varphi_1 - \varepsilon)$$

$$\varphi_2 - \frac{\varepsilon}{2} = 90^\circ - \varphi_1 + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\varphi_2 - \varepsilon = 90 - \varphi_1 \qquad [46]$$

Il primo membro della [46] è l'angolo che una delle linee di proiezione fa con la linea di sito, mentre l'altro è quello che l'altra linea di proiezione fa con la verticale, cioè:

Una delle due linee di proiezione con le quali si ottiene la stessa gittata sulla linea di sito fa con la linea di sito un angolo uguale a quello che l'altra linea di proiezione fa con la verticale.

Se $\varepsilon = 0$ il teorema è ancora verificato e si ricade nel caso già visto.

e) Altre formule in funzione dell'inclinazione

Dalla [6]

$$y = x \cdot tg\,\varphi - \frac{g \cdot x^2}{2\,V^2 \cos^2\varphi}$$

dividendo per x e ponendo $\frac{y}{x} = tg\,\varepsilon$ si ha

$$tg\,\varphi - tg\,\varepsilon = \frac{gx}{2\,V^2\cos^2\varphi} \qquad [47]$$

Derivando rispetto ad x la [6] si ha

$$\frac{dy}{dx} = tg\,\theta = tg\,\varphi - \frac{gx}{V^2\cos^2\varphi}$$

cioè

$$tg\,\varphi - tg\,\theta = \frac{gx}{V^2\cos^2\varphi} \qquad [48]$$

quindi

$$2\,(tg\,\varphi - tg\,\varepsilon) = tg\,\varphi - tg\,\theta$$

$$2\,tg\,\varphi - 2\,tg\,\varepsilon = tg\,\varphi - tg\,\theta$$

$$tg\,\varepsilon = \frac{tg\,\varphi + tg\,\theta}{2}$$

cioè:

La tangente dell'angolo di sito è la media aritmetica della tangente dell'angolo di proiezione e dell'inclinazione nel punto considerato.

Ancora ricavando x dalla [48]
si ha

$$x = \frac{V^2 \cos^2 \varphi}{g} \cdot (tg\,\varphi - tg\,\theta) \qquad [49]$$

e poichè

$$y = x\,tg\,\varepsilon = x\,\frac{tg\,\varphi + tg\,\theta}{2} \qquad [50]$$

si ha

$$y = \frac{V^2 \cos^2 \varphi}{2\,g} \cdot (tg^2\,\varphi - tg^2\,\theta) \qquad [51]$$

formula che occorre ricordare perchè ad essa si ricorre in prima approssimazione ne calcolo della traiettoria per archi successivi.

Poichè

$$t = \frac{x}{V \cos \varphi} \qquad [52]$$

si avrà, sostituendo ad x il suo valore ricavato dalla [49]

$$t = \frac{V \cos \varphi}{g} \cdot (tg\,\varphi - tg\,\theta) \qquad [53]$$

od anche dato che $V \cos \varphi = \frac{x}{t}$

$$t = \frac{x}{gt}\,(tg\,\varphi - tg\,\theta) \qquad [54]$$

$$t^2 = \frac{x}{g}\,(tg\,\varphi - tg\,\theta) \qquad\qquad T^2 = \frac{X}{g}\,(tg\,\varphi + tg\,\omega) \qquad [55]$$

Applicazione:

Mortaio da 210/8; Granata da 210; peso: kg. 101; V = 180 m/s.
Calcolare la durata in funzione di X: φ ed ω:

X φ	1000 9° 3′	1500 14° 10′	2000 20° 8′
$tg\,\varphi$	0, 159	0, 252	0, 367
$tg\,\omega$	0, 167	0, 265	0, 390
$tg\,\varphi + tg\,\omega$	0, 326	0, 517	0, 757
$\log\,(tg\,\varphi + tg\,\omega)$	$\bar{1}$, 51322	$\bar{1}$, 71349	$\bar{1}$, 87910
$\log X$	3, 00000	3, 17609	3, 30103
colog g	$\bar{1}$, 00855	$\bar{1}$, 00855	$\bar{1}$, 00855
$\log T^2$	1, 52177	1, 89813	2, 18868
$\log T$	5, 76088	0, 94907	1, 09434
T	5, 77	8, 89	12, 43
T tab.	5, 75	8, 80	12, 30

4 - Inviluppo.

Si consideri un fascio di traiettorie descritte con la stessa velocità iniziale ma con diversi angoli di proiezione.

Questo fascio ha caratteristiche ben definite, e le sue traiettorie avranno gittate man mano crescenti fino all'angolo di 45°, indi decresceranno:

Un limite oltre il quale con esse non è possibile giungere, sarà rappresentato dalla orizzontale passante per l'altezza massima del tiro che, com'è noto, è data da $\frac{V^2}{2g}$. Ma un altro limite assai meglio definito è rappresentato dall'inviluppo.

L'inviluppo è la curva tangente a tutte le traiettorie, quindi è il luogo dei punti di gittata massima sulle varie linee di sito.

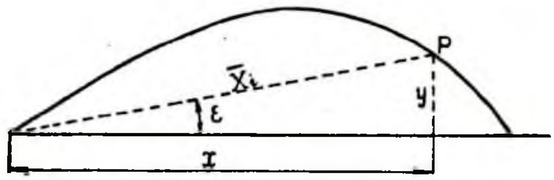


Fig. 11.

Basandoci su questa proprietà ci è possibile determinare l'equazione di detta curva:

Consideriamo (fig. 11) il punto P sulla linea inclinata sull'orizzonte dell'angolo ε. Per un noto teorema già visto sappiamo che la gittata massima sulla linea di sito più il dislivello del punto è costante ed uguale ad $\overline{X}$ per cui sarà:

$$\overline{X}_i = \overline{X} - y$$

inoltre

$$x^2 + y^2 = \overline{X}_i^2$$

per cui

$$\overline{X}_i^2 = \overline{X}^2 + y^2 - 2\,\overline{X}\,y = x^2 + y^2$$

$$\overline{X}^2 - 2\,\overline{X}\,y = x^2 \text{ da cui}$$

$$y = \frac{\overline{X}^2 - x^2}{2\,\overline{X}} \qquad [56]$$

L'inviluppo è quindi una parabola che ha per asse l'asse delle y

Per $y = 0 \quad x = \pm\,\overline{X}$ e $\frac{dy}{dx} = \mp 1$

da ciò si deduce che essendo

$$\frac{dy}{dx} = tg\,\theta = 1 \qquad \theta = 45^\circ$$

L'equazione dell'inviluppo può anche essere ricavata direttamente servendosi del calcolo differenziale.

Infatti per trovare l'equazione dell'inviluppo di una famiglia di curve basta eguagliare a zero la 1ª derivata dell'equazione della curva fatta rispetto alla variabile indipendente (nel nostro caso φ) e sostituire il valore della variabile così trovato nell'equazione primitiva.

Dalla

$$y = x \cdot tg\,\varphi - \frac{g \cdot x^2}{2\,V^2 \cos^2\varphi}$$

differenziando rispetto a φ si ha:

$$\frac{dy}{d\varphi} = \frac{x}{\cos^2\varphi} - \frac{g \cdot x^2}{2V^2} \cdot \frac{2 \operatorname{sen}\varphi \cdot \cos\varphi}{\cos^4\varphi} = \frac{x}{\cos^2\varphi} - \frac{g \cdot x^2}{V^2 \cos^2\varphi} \cdot tg\,\varphi =$$

$$= \frac{x}{\cos^2\varphi} \cdot \left(1 - \frac{g \cdot x}{V^2} tg\,\varphi\right) = 0$$

e poichè

$$\frac{V^2}{g} = \bar{X}$$

sarà

$$1 - \frac{x}{\bar{X}} tg\,\varphi = 0 \qquad tg\,\varphi = \frac{\bar{X}}{x}$$

Sostituendo questo valore nell'equazione della traiettoria

$$y = x \cdot tg\,\varphi - \frac{g \cdot x^2}{2V^2 \cos^2\varphi}$$

si ha:

$$y = x\frac{\bar{X}}{x} - \frac{g \cdot x^2}{2V^2}\left(1 + \frac{\bar{X}^2}{x^2}\right) = \bar{X} - \frac{x^2}{2\bar{X}} - \frac{x^2}{2\bar{X}} \cdot \frac{\bar{X}^2}{x^2} =$$

$$= \bar{X} - \frac{x^2}{2\bar{X}} - \frac{\bar{X}}{2} = \frac{\bar{X}}{2} - \frac{x^2}{2\bar{X}} = \frac{\bar{X}^2 - x^2}{2\bar{X}}$$

Per avere le coordinate dal punto in cui la traiettoria corrispondente all'angolo di proiezione φ tocca l'inviluppo basta far coesistere le due equazioni cioè porre

$$\frac{\bar{X}^2 - x^2}{2\bar{X}} = x \quad tg\,\varphi - \frac{g \cdot x^2}{2V^2 \cos^2\varphi}$$

da cui

$$\bar{X}^2 - x^2 = 2\bar{X}\,x\,tg\,\varphi - \frac{x^2}{\cos^2\varphi}$$

$$X^2 = x^2 + 2\,x\,X\,tg\,\varphi - x^2(1 + tg^2\varphi) =$$

$$= x^2 + 2\,x \quad X\,tg\,\varphi - x^2 - x^2\,tg^2\,\varphi$$

cioè

$$\bar{X}^2 + x^2\,tg^2\,\varphi - 2\,x\,\bar{X}\,tg\,\varphi = 0$$

cioè

$$(\bar{X} - x tg\,\varphi)^2 = 0$$

per l'ascissa si ha

$$x = \frac{\bar{X}}{tg\,\varphi} \qquad [57]$$

per avere l'ordinata basta sostituire nell'equazione dell'inviluppo questo valore e sarà

$$y = \frac{\bar{X}^2 - x^2}{2\bar{X}} \qquad y = \frac{\bar{X}^2 - \bar{X}^2 \cot g^2\varphi}{2\bar{X}} = \frac{\bar{X}^2}{2\bar{X}} \cdot (1 - \cot g^2\varphi) \qquad [58]$$

Per avere la tangente nel punto considerato ci serviamo della espressione

$$tg\,\varepsilon = \frac{y}{x} = \frac{tg\,\varphi + tg\,\theta}{2}$$

nella quale si sostituiscono ad y ed x i valori trovati; quindi

$$tg\,\varepsilon = \frac{\frac{X}{2}(1 - \cotg^2 \varphi)}{X \cotg \varphi} = \frac{1}{2}\,\frac{1 - \cotg^2 \varphi}{\cotg \varphi} = \frac{tg\,\varphi + tg\,\theta}{2}$$

$$\frac{\frac{tg^2 \varphi - 1}{tg^2 \varphi}}{\frac{1}{tg\,\varphi}} = \frac{tg^2 \varphi - 1}{tg\,\varphi} = tg\,\varphi + tg\,\theta$$

$$tg^2 \varphi - 1 = tg^2 \varphi + tg\,\varphi \cdot tg\,\theta$$

$$tg\,\varphi \cdot tg\,\theta = -1 \qquad [59]$$

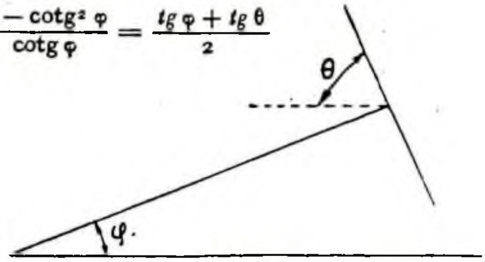


FIG. 12.

cioè:

La tangente comune alla traiettoria ed all'inviluppo nel loro punto comune è perpendicolare alla linea di proiezione della traiettoria.

5 – Linee di eguale angolo di partenza.

Variando l'angolo di sito e mantenendo costante la velocità e l'angolo di partenza si ottiene una serie di punti che uniti determinano una linea, detta linea di egual elevazione o di egual angolo di partenza.

Se consideriamo una linea di sito qualsiasi, il punto della linea d'egual angolo di partenza è colpito da due traiettorie che, come s'è visto precedentemente, hanno, per angoli di proiezione $\gamma + \varepsilon$ e $90 - \gamma$. Ora questa seconda traiettoria è indipendente da ε e giacchè γ è costante *la linea d'egual elevazione od angolo di partenza è una traiettoria che ha per angolo di proiezione il complemento dell'angolo di partenza considerato* per cui la linea è tanto più prossima alla verticale quanto più piccolo è l'angolo di partenza.

Questo teorema, molto importante, serve a dare un'idea circa l'andamento delle linee di egual elevazione anche nell'aria.

6 – Linee di egual tempo.

Dalla formula $t = \frac{x}{V \cos \varphi} = \frac{x'}{V}$ si nota che il tempo è indipendente dall'angolo di proiezione.

D'altra parte gli abbassamenti $A'M'$, AM sono uguali, quindi i punti $M'M$ ecc. hanno tempi uguali (fig. 13).

Detti punti stanno su una circonferenza di centro R sotto l'origine della traiettoria ad una distanza OR eguale all'abbassamento AM.

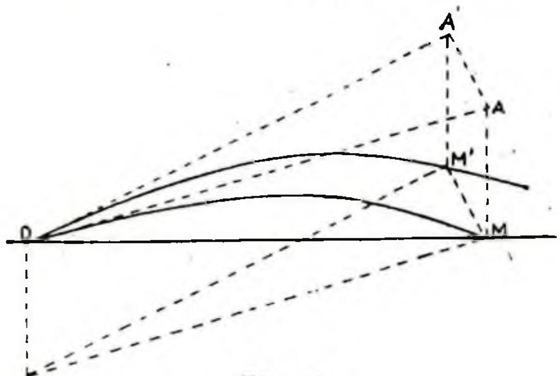


FIG. 13.

7 – Gittata sopra un piano sottostante all'origine.

Se h è la distanza del piano dall'origine ed X_1 la gittata su di esso, dalla

$$y = x \cdot tg\,\varphi - \frac{g \cdot x^2}{2\,V^2 \cos^2 \varphi}$$

si ha

$$- h = X_s \cdot tg\,\varphi - \frac{g \cdot \bar{X}_s^2}{2\,V^2 \cos^2 \varphi}$$

La gittata massima $\bar{X}_s$ si ricava ricordando che il punto di massima gittata è anche punto dell'inviluppo e quindi, ricorrendo alla formula già trovata si avrà dalla

$$y = \frac{\bar{X}^2 - x^2}{2\,\bar{X}}$$

$$- h = \frac{\bar{X}^2 - \bar{X}_s^2}{2\,\bar{X}}$$

da cui

$$\bar{X}_s^2 = \bar{X}^2 + 2\,h\,\bar{X}$$

cioè

$$\bar{X}_s = \sqrt{\bar{X} \cdot (\bar{X} + 2\,h)} \qquad [60]$$

L'angolo di proiezione φ che dà la gittata $\bar{X}_s$ si ottiene considerando che esso vale $\frac{\pi}{4} + \frac{\varepsilon}{2}$

ove $tg\,\varepsilon = - \frac{h}{\bar{X}_s}$; allora

$$tg\,\varphi = tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varepsilon}{2}\right) = \frac{1 + \operatorname{sen}\varepsilon}{\cos\varepsilon} = tg\,\varepsilon + \frac{1}{\cos\varepsilon} = tg\,\varepsilon + \sqrt{1 - tg^2\,\varepsilon} =$$

$$= - \frac{h}{\bar{X}_s} + \sqrt{1 + \frac{h^2}{\bar{X}_s^2}} = - \frac{h}{\bar{X}_s} + \sqrt{\frac{\bar{X}_s^2 + h^2}{\bar{X}^2_s}}$$

e giacchè $\bar{X}_s^2 = \bar{X}^2 + 2\,h\,\bar{X}$ sarà

$$tg\,\varphi = - \frac{h}{\bar{X}_s} + \frac{1}{\bar{X}_s}\sqrt{\bar{X}^2 + 2\,h^2\,\bar{X} + h^2} = \frac{-h + \bar{X} + h}{\bar{X}_s} =$$

$$tg\,\varphi = \frac{\bar{X}}{\bar{X}_s} \qquad [61]$$

Applicazione:

Mortaio da 210; Granata da 210; $V = 217$ m/s.

Trovare la massima gittata di una batteria posta a quota di 500 metri s.l.m. e che spara sul mare.

La gittata massima della carica che si considera sull'orizzonte è 4030 metri.

$$\bar{X}_s = \sqrt{\bar{X}\,(\bar{X} + 2\,h)} \qquad \bar{X} = 4030$$

$$\bar{X} + 2\,h = 5030$$

$$\bar{X}_s = \sqrt{4030 \times 5030} = \sqrt{2027090} = 4502$$

L'angolo di proiezione che dà questa gittata è:

$$tg\,\varphi = \frac{4030}{4502}$$

$$\log 4030 = 3{,}60531$$
$$\text{colog}\, 4502 = \bar{4}{,}34659$$
$$\log tg\,\varphi = \bar{1}{,}95190$$
$$\varphi = 41^{\circ}\, 50'$$

8 - Fascio di traiettorie con la stessa φ.

Questo fascio è caratterizzato dal fatto che tutte le traiettorie hanno comune la tangente nell'origine e non ammettono un inviluppo.

Le linee ausiliarie del fascio hanno un andamento completamente diverso da quello già visto.

Non ha senso il parlare di linee d'egual angolo di partenza.

Le linee d'eguale inclinazione si ricavano notando che

$$tg\,\varepsilon = \frac{tg\,\varphi + tg\,\theta}{2}$$

dalla quale si deduce che

$$y = \frac{x}{2}\,(tg\,\varphi + tg\,\theta)$$

che è l'equazione d'una retta passante per l'origine.

Le linee d'egual tempo si ricavano notando che:

$$y = x \cdot tg\,\varphi - \frac{1}{2}\,g \cdot t^2;$$

questa equazione essendo g e t costanti, è una retta di coefficiente angolare $tg\ \varphi$, e per $x = 0$ è:

$$y = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

cioè taglia l'asse delle y, sotto l'origine di una quantità eguale allo spazio che un grave avrebbe percorso nel tempo t cadendo liberamente.

9 - Applicazioni varie.

Applicazione 1ª;

Data la velocità V, determinare l'angolo φ per colpire un punto di coordinate x y

Si ricava φ dall'equazione

$$y = x \cdot tg\,\varphi - \frac{g \cdot x^2}{2\,V^2 \cos^2 \varphi} = x \cdot tg\,\varphi - \frac{g \cdot x^2}{2\,V^2}\,(1 + tg^2\,\varphi)$$

$$y - x \cdot tg\,\varphi + \frac{g \cdot x^2}{2\,V^2} + \frac{g \cdot x^2}{2\,V^2} tg^2\,\varphi = 0\,;$$

moltiplicando tutto per $\frac{2\,V^2}{g x^2}$ si ha:

$$tg^2\,\varphi - \frac{2\,V^2}{g \cdot x} \cdot tg\,\varphi + \frac{2\,V^2}{g \cdot x^2} \cdot y + 1 = 0$$

od anche

$$tg^2\,\varphi - \frac{2\,\overline{X}}{x} \cdot tg\,\varphi + \frac{2\,\overline{X}}{x^2} \cdot y + 1 = 0$$

che risolta rispetto a $tg\ \varphi$ dà

$$tg\,\varphi = \frac{\overline{X}}{x} \pm \sqrt{\left(\frac{\overline{X}}{;}\right)^2 - \frac{2\,\overline{X}}{x^2} \cdot y - 1}$$

Perchè $tg\ \varphi$ sia reale occorre che $\frac{\overline{X}^2}{x^2} - \frac{2\,\overline{X}}{x^2} \cdot y - 1 > 0$

Se fosse < 0 il punto non si potrebbe colpire.

Qualora invece $\frac{\overline{X}^2}{x^2} - \frac{2\overline{X}}{x^2} \cdot y - 1 = 0$

il punto giacerebbe su una parabola rappresentata dall'equazione:

$$\overline{X}^2 - 2 \cdot \overline{X} \cdot y - x^2 = 0$$

da cui

$$y = \frac{X^2 - x^2}{2\,\overline{X}}$$

e questa è l'equazione dell'inviluppo trovata precedentemente.

Ancora, risolvendo l'equazione

$$\overline{X}^2 - 2 \cdot \overline{X} \cdot y - x^2 = 0$$

rispetto ad $\overline{X}$ si ha:

$$\overline{X} = y \pm \sqrt{y^2 + x^2}$$

e poichè si tratta di un punto dell'inviluppo si può porre

$$\overline{X}_i = \sqrt{y^2 + x^2}$$

quindi

$$\overline{X} = y \pm \overline{X}_i$$

che è la nota proprietà già trovata, quando non si tenga conto della soluzione negativa.

Se consideriamo due punti aventi le stesse ascisse e giacenti su due traiettorie descritte con egual V e con angoli φ e φ_x si potrà scrivere

$$y = x \cdot tg\,\varphi - \frac{g \cdot x^2}{2\,V^2 \cos^2\varphi}$$

e quindi

$$tg\,\varphi - tg\,\varepsilon = \frac{g \cdot x}{2\,V^2 \cos^2\varphi}$$

e per $\varepsilon = 0$

$$tg\,\varphi_x = \frac{g \cdot x}{2V^2 \cos^2 \varphi_x}$$

e dividendo l'una per l'altra

$$\frac{tg\,\varphi - tg\,\varepsilon}{tg\,\varphi_x} = \frac{\cos^2 \varphi_x}{\cos^2 \varphi};$$

formula che troveremo identica anche nell'aria e che servirà per risolvere numerosi problemi del tiro.

Applicazione 2ª:

Far passare la traiettoria per un punto di coordinate x y nel quale l'inclinazione sia θ

$$tg\,\varepsilon = \frac{y}{x} \qquad 2\,tg\,\varepsilon = tg\,\varphi + tg\,\theta$$

da cui

$$tg\,\varphi = 2\,tg\,\varepsilon - tg\,\theta$$

Per avere V si ricorre alla

$$tg\,\theta = tg\,\varphi - \frac{g \cdot x}{V^2 \cos^2 \varphi}$$

da cui

$$\frac{V^2 \cos^2 \varphi}{g\,x} = \frac{1}{tg\,\varphi - tg\,\theta}$$

$$V^2 = \frac{g \cdot x}{\cos^2 \varphi \cdot (tg\,\varphi - tg\,\theta)} = \frac{g \cdot x}{\cos^2 \varphi \dfrac{\text{sen}\,(\varphi - \theta)}{\cos \varphi \cdot \cos \theta}} = \frac{g \cdot x \cdot \cos \theta}{\text{sen}\,(\varphi - \theta) \cos \varphi}$$

Questo problema può essere risolto anche graficamente

Infatti $\widehat{BOH} = \varphi$ perchè:

$$tg\,\varphi = \frac{BH}{OH} = \frac{BA + AH}{OH} = \frac{OD + AH}{OH} =$$

$$= \frac{CO - CD + AH}{OH} = 2 \cdot \frac{AH}{OH} - \frac{CD}{OH} =$$

$$= 2\,tg\,\varepsilon - tg\,\theta$$

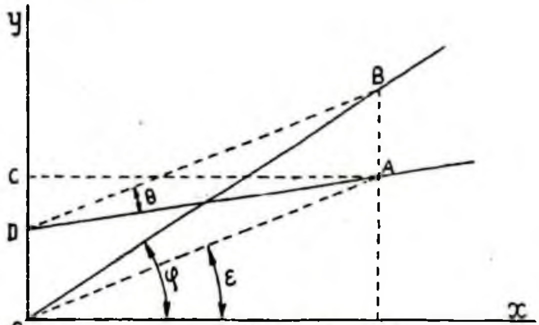


FIG. 14.

Applicazione:

Dati $x = 1650$ m.; $y = 820$ m.; $\theta = 15°$, determinare φ e V.

$\log 2y$	$= 3{,}21484$	$\log g$	$= 0{,}99145$
$\text{colog}\,x$	$= \bar{4}{,}78252$	$\log x$	$= 3{,}21748$
$\log 2\,tg\,\varepsilon$	$= \bar{1}{,}99736$	$\log \cos \theta$	$= \bar{1}{,}98494$
$2\,tg\,\varepsilon$	$= 0{,}9939$	log num.re	$= 4{,}19387$
$tg\,\theta$	$= 0{,}2679$	colog denomin.	$= 0{,}53828$
$tg\,\varphi$	$= 0{,}7260$	$\log V^2$	$= 4{,}73215$
φ	$= 35° 59'$	$\log V$	$= 2{,}36608$
		V	$= 232{,}3$

$\varphi - \theta = 20° 59'$

$\log \text{sen}\,(\varphi - \theta) = \bar{1}{,}55367$

$\log \cos \varphi = \bar{1}{,}90805$

log denomin. $= \bar{1}{,}46172$

Vediamo ora mediante i valori di V e φ trovati di determinare la y corrispondente alla x data da 1650;

$$y = x \cdot tg\,\varphi - \frac{g \cdot x^2}{2\,V^2 \cos^2 \varphi}$$

$\log g$	$= 0{,}99145$	$\log 2$	$= 0{,}30103$	$\log x$	$= 3{,}21748$
$\log x^2$	$= 6{,}43496$	$\log V^2$	$= 4{,}73215$	$\log tg\,\varphi$	$= \bar{1}{,}86073$
$\log g \cdot x^2$	$= 7{,}42641$	$\log \cos^2 \varphi$	$= \bar{1}{,}81628$	$\log x\, tg\,\varphi$	$= 3{,}07821$
$\mathrm{colog}\, 2\,V^2 \cos^2 \varphi$	$= 5{,}15063$	$\log 2\,V^2 \cos^2 \varphi$	$= 4{,}84946$	$x\, tg\,\varphi$	$= 1197{,}3$
$\log \frac{g \cdot x^2}{2\,V^2 \cos^2 \varphi}$	$= 2{,}57704$			$\frac{g \cdot x^2}{2\,V^2 \cos^2 \varphi}$	$= 377{,}6$
$\frac{g \cdot x^2}{2\,V^2 \cos^2 \varphi}$	$= 377{,}6$			y	$= 819{,}7$

Applicazione 3ª:

Far passare la traiettoria per due punti dati;

in questo caso $\frac{a}{b} = tg\,\varepsilon$; $\frac{a_1}{b_1} = tg\,\varepsilon_1$

$$tg\,\varphi - tg\,\varepsilon = \frac{g \cdot x}{2\,V^2 \cos^2 \varphi} \qquad tg\,\varphi - tg\,\varepsilon_1 = \frac{g \cdot x_1}{2\,V^2 \cos^2 \varphi} \qquad \frac{tg\,\varphi - tg\,\varepsilon}{tg\,\varphi - tg\,\varepsilon_1} = \frac{x}{x_1}$$

quindi

$$x_1\, tg\,\varphi - x_1\, tg\,\varepsilon = x \cdot tg\,\varphi - x\, tg\,\varepsilon_1$$

$$tg\,\varphi\,(x_1 - x) = x_1\, tg\,\varepsilon - x \cdot tg\,\varepsilon_1 \qquad tg\,\varphi = \frac{x_1\, tg\,\varepsilon - x\, tg\,\varepsilon_1}{x_1 - x}$$

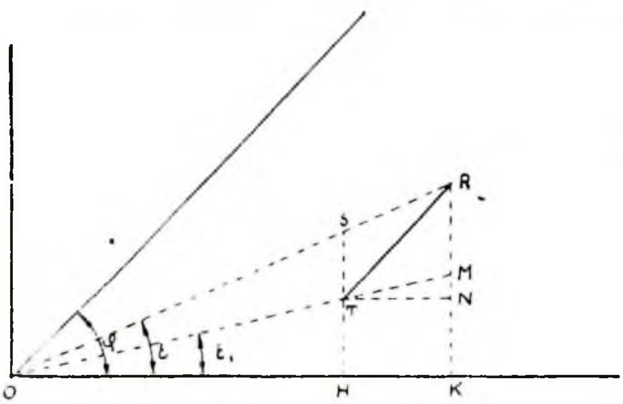
Trovato φ con la solita formula;

$$tg\,\varphi - tg\,\varepsilon = \frac{g \cdot x}{2\,V^2 \cos^2 \varphi}$$

si ricava

$$V^2 = \frac{g \cdot x}{\cos^2 \varphi\,(tg\,\varphi - tg\,\varepsilon)} = \frac{g \cdot x \cos \varphi \cos \varepsilon}{\cos^2 \varphi\, \mathrm{sen}\,(\varphi - \varepsilon)} = \frac{g \cdot x \cos \varepsilon}{\mathrm{sen}\,(\varphi - \varepsilon) \cos \varphi}$$

Questo problema può essere risolto anche graficamente



$$tg\,\varphi = \frac{RN}{HK} = \frac{RK - HT}{OK - OH} =$$

$$= \frac{x_1 \cdot tg\,\varepsilon - x \cdot tg\,\varepsilon_1}{x_1 - x}$$

FIG. 14.

Applicazione:

Dati: $x = 1000$; $y = 870$; $x_1 = 2000$; $y_1 = 520$: trovare φ e V

$\log y$	$= 2{,}93952$	$\log y_1$	$= 2{,}71600$
$\mathrm{colog}\, x$	$= \bar{3}{,}00000$	$\mathrm{colog}\, x_1$	$= \bar{4}{,}69897$
$\log tg\, \varepsilon$	$= \bar{1}{,}93952$	$\log tg\, \varepsilon_1$	$= \bar{1}{,}41497$
$\log x_1$	$= 3{,}30103$	$\log x$	$= 3,$
$\log x_1\, tg\, \varepsilon$	$= 3{,}24055$	$\log x\, tg\, \varepsilon_1$	$= 2{,}41497$

$$x_1\, tg\, \varepsilon = 1740$$
$$x\, tg\, \varepsilon_1 = 260$$
$$\text{Numeratore} = 1480$$

$$tg\, \varphi = \frac{1480}{1000} = 1{,}480 \qquad \varphi = 55^\circ\, 57'$$

Dalla

$$V^2 = \frac{g \cdot x \cdot \cos \varepsilon}{\mathrm{sen}\,(\varphi - \varepsilon) \cos \varphi} \qquad \varphi - \varepsilon = 55^\circ 57' - 41^\circ 1' = 14^\circ 56'$$

si ha:

$\log g$	$= 0{,}99145$	$\log$ num.re	$= 3{,}86912$
$\log x$	$= 3{,}00000$	colog denom.re	$= 0{,}84077$
$\log \cos \varepsilon$	$= \bar{1}{,}87767$		
$\log$ num.re	$= 3{,}86912$	$\log V^2$	$= 4{,}70989$
$\log \mathrm{sen}\,(\varphi - \varepsilon)$	$= \bar{1}{,}41111$	$\log V$	$= 2{,}35495$
$\log \cos \varphi$	$= \bar{1}{,}74812$		
$\log$ denom.re	$= \bar{1}{,}15923$	V	$= 226{,}4$

10 - Variazioni dovute alla gravità.

In quanto precede, abbiamo sempre ritenuto che la direzione della gravità rimanesse costante, mentre effettivamente essa converge al centro della terra.

Si è pure detto che, date le piccole altezze del tiro rispetto al raggio terrestre, l'errore che si commetteva poteva essere trascurato; vogliamo vedere ora di quale entità è detto errore.

Qualora si tenga conto della convergenza della gravità, le equazioni del moto scritte dianzi non sono valide, perchè la forza peso ammette una componente orizzontale, e non è più vero che il moto orizzontale sia uniforme.

In tale caso (fig. 16) sarà:

$$\frac{p}{g}\, \frac{d^2x}{dt^2} = -p\, \mathrm{sen}\, \psi$$

cioè

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g\, \mathrm{sen}\, \psi$$

donde si vede che integrando $\quad Vt \cos \varphi > x$

Se r_0 è il raggio terrestre sarà

$$tg\, \psi = \frac{x}{r_0 + y}$$

e se $y > 0$, trascurandolo, sarà pure

$$tg\, \psi < \frac{x}{r_0}$$

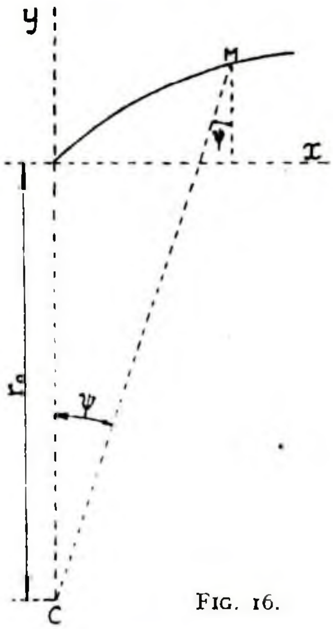


FIG. 16.

Ma dalla geometria si ha che la tangente è > del seno: quindi scriveremo

$$\mathrm{sen}\, \psi < tg\, \psi < \frac{x}{r_0}$$

e, per quanto s'è visto prima, $x < Vt \cos \varphi$

$$\operatorname{sen} \psi < tg\, \psi < \frac{x}{r_0} < \frac{Vt \cos \varphi}{r_0}.$$

Quindi, riferendoci alla

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g \operatorname{sen} \psi$$

se a sen ψ si sostituisce una quantità maggiore,

$$\frac{d^2x}{dt^2} > -g\frac{Vt \cos \varphi}{r_0}$$

donde integrando

$$\frac{dx}{dt} - V \cos \varphi > -g\frac{Vt^2 \cos \varphi}{2\, r_0}$$

ed ancora

$$x - Vt \cos \varphi > -g\frac{V \cos \varphi}{r_0}\frac{t^3}{6}$$

cioè

$$x > Vt \cos \varphi \left(1 - \frac{gt^2}{6\, r_0}\right)$$

Quindi abbiamo i limiti entro cui è compresa la x e cioè

$$Vt \cos \varphi \left(1 - \frac{gt^2}{6\, r_0}\right) < x < Vt \cos \varphi \qquad [62]$$

Notiamo che $\frac{1}{2}\, gt^2$ è l'abbassamento il quale pur essendo grande, difficilmente raggiunge i 30.000 metri; ($r_0 = 6.370.300$ metri); quindi la parentesi $\left(1 - \frac{gt^2}{6\, r_0}\right)$ è molto prossima ad 1.

Applicazione:

Posto:

$$\frac{1}{2}\, gt^2 = 30.000$$

$$\frac{1}{2}\frac{gt^2}{3\, r_0} = 0{,}00157; \qquad 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{gt^2}{6\, r_0} = 0{,}99843\ .$$

quindi x è compresa fra $Vt \cos \varphi$ e $0{,}99843\, Vt \cos \varphi$.

Per un'ascissa di 10.000 metri, l'errore è certo inferiore a metri 15,7, senza tener conto che vi è un'altra causa, derivante pure dalla gravità, che in parte compensa questo errore ed è la variazione della gravità con la quota.

La gravità è variabile col variare della latitudine λ^0 e della quota h (in metri) secondo la relazione

$$g = 9{,}8057\ (1 - 0{,}00259 \cos 2\, \lambda)\ (1 - 0{,}0^6 1964\, h)$$

Nell'integrazione dell'equazione del moto, astraendo dalla latitudine, si ritiene g costante mentre varia con la quota e da ciò si ha un'altra causa di errore. Tale errore è dato da

$$g = 9{,}8057\ (1 - 0{,}0^6 1964\, h)$$

ed è di segno contrario al precedente perchè con l'aumentare della h l'errore è positivo.

Se supponiamo $h = 10.000$ metri, sarà

$$g = 9{,}8057\,(1 - 0{,}0^6 1964) = 9{,}8057 \times 0{,}998036 = 9{,}786$$

quindi la gittata sarà compresa fra

$$\frac{V^2 \operatorname{sen} 2\varphi}{g} \quad e \quad \frac{V^2 \operatorname{sen} 2\varphi}{g} \cdot \frac{g}{9{,}786} = \frac{V^2 \operatorname{sen} 2\varphi}{g} \cdot 1{,}0020$$

Cosicchè per una x di 10,000 l'errore sarà certamente minore di 20 metri e di segno contrario al precedente.

Applicazione:

Supponiamo che un velivolo voli con velocità di 60 m/s e sia a quota di 3.000 metri. Determinare la distanza alla quale cade una bomba abbandonata da esso.

1° Metodo:

$$-y = x\, tg\, \varphi - \frac{g x^2}{2\, V^2 \cos^2 \varphi} \quad \text{per} \quad \varphi = 0$$

$$-h = \frac{-g x^2}{2\, V^2} \qquad\qquad x^2 = \frac{2\, V^2 h}{g}$$

log 2 = 0,30103
log V^2 = 3,55630
log h = 3,47712
colog g = $\bar{1}$,00855
log x^2 = 6,34300
log x = 3,17150
x = 1484

2° Metodo:

Sappiamo che $v^2 = V^2 - 2\,gy$ e nel vertice $v_0^2 = V^2 - 2\,gY$ si ha

$$V^2 = v_0^2 + 2\,gY$$

v^2 = 3600
$2\,gy$ = 58860 $\qquad V = 249{,}9$
V^2 = 62460

Dalla $y = \dfrac{V^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}{2\,g}$ si ha $\operatorname{sen}^2 \varphi = \dfrac{2\,gy}{V^2}$ da cui

log 2 = 0,30103
log g = 0,99145
log y = 3,47712
colog V^2 = $\bar{5}$,20440
log sen² φ = $\bar{1}$,97400
log sen φ = $\bar{1}$,98700
φ = 76° 4′

$$X = \frac{V^2 \operatorname{sen} 2\varphi}{g}$$

$$x_1 = \frac{X}{2} = 1488$$

log V^2 = 4,79560
log sen 2 φ = $\bar{1}$,66970
colog g = $\bar{1}$,00855
log X = 3,47385
X = 2977

11 – Problema della traiettoria planetaria nel vuoto nell'ipotesi di terra immobile.

Il movimento nel vuoto è stato studiato nella ipotesi di g costante in grandezza e direzione. In realtà, la gravità è una forza centrale, costantemente diretta verso il centro della terra ed agente, secondo la legge di Newton, in ragione inversa del quadrato della distanza; si è visto in precedenza che la correzione risultante dal considerare la gravità come forza centrale è in generale molto piccola sulle traiettorie usuali dell'artiglieria, e noi ci proponiamo di calcolarla trattando del movimento del proietto in modo analogo a quello di un pianeta attorno al sole.

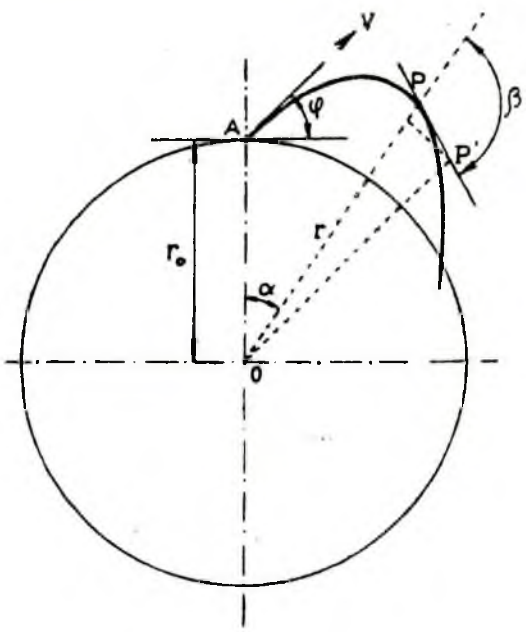


FIG. 17-*a*.

Sia, alla superficie della terra, A il punto da cui è lanciato il proietto, sotto l'angolo φ e con velocità iniziale V; sia O il centro della terra, di raggio r_0. Sia P un punto della traiettoria di distanza $OP = r$. La forza che agisce in P è centrale, diretta verso O ed ha per espressione $-g\,\frac{r_0^2}{r^2}$ essendo g il valore della gravità in A. Se α è l'angolo polare di P, si avrà per il noto teorema delle aree: (fig. 17-*a*):

$$r^2 \cdot d\alpha = K \cdot dt \qquad [63]$$

Sia β l'angolo formato dal raggio vettore con la tangente in P alla traiettoria; considerando il triangolo infinitamente piccolo $PP'O$ si ha: (fig. 17-*b*)

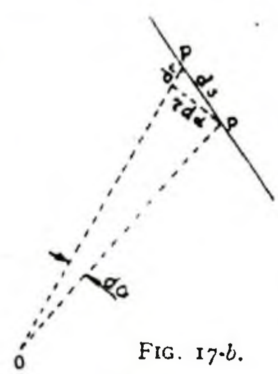


FIG. 17-*b*.

$$\cos\beta = \frac{dr}{ds} \qquad \operatorname{sen}\beta = \frac{r \cdot d\alpha}{ds}$$

ma se v è la velocità in P, essendo $v = \frac{ds}{dt}$, sarà

$$v\cos\beta = \frac{dr}{dt} \qquad [64]$$

$$v\operatorname{sen}\beta = \frac{r \cdot d\alpha}{dt} \qquad [65]$$

e quindi, moltiplicando per r l'ultima

$$r \cdot v \cdot \operatorname{sen}\beta = \frac{r^2 d\alpha}{dt}$$

ma $\frac{r^2 d\alpha}{dt} = K$ quindi

$$K = r \cdot v \cdot \operatorname{sen}\beta \qquad [66]$$

Per le condizioni iniziali, cioè per il punto A; si ha

$$r = r_0 \qquad v = V ; \qquad \text{sen}\,\beta = \cos\varphi \quad \text{quindi}$$

$$K = r_0 V \cos\varphi$$

D'altra parte, l'equazione del lavoro elementare è

$$dv^2 = -2\,g\,r_0^2\,\frac{dr}{r^2}$$

dalla quale, integrando

$$v^2 = 2\,g\,r_0^2\,\frac{1}{r} - C \tag{67}$$

Il valore di C si ricava dall'equazione nel punto A

$$V^2 = 2\,g\,\frac{r_0^2}{r_0} - C \quad \text{da cui}$$

$$C = 2\,g\,r_0 - V^2 \tag{68}$$

Dalle [64] [65], quadrando e sommando si ha

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(\frac{r\,d\alpha}{dt}\right)^2 \tag{69}$$

eliminando dt per la [63] e la [69] si ha

$$dt = \frac{r^2 d\alpha}{K} \qquad v^2 = \left(\frac{dr\,K}{r^2 d\alpha}\right)^2 + \left(\frac{K}{r}\right)^2$$

cioè

$$v^2 = \frac{(dr)^2 K^2}{r^4 (d\alpha)^2} + \frac{K^2}{r^2}; \qquad v^2 = K^2 \left[\frac{1}{r^2} + \left(\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\alpha}\right)^2\right]$$

e tenendo presente la [67]

$$v^2 = 2\,g\,\frac{r_0^2}{r} - C = K^2 \left[\frac{1}{r^2} + \left(\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\alpha}\right)^2\right] \tag{70}$$

equazione differenziale della traiettoria tra le variabili $\frac{1}{r}$ ed α.

Ponendo $z = \frac{1}{r}$ si ha:

$$v^2 = 2\,gzr_0^2 - C = K^2 z^2 + K^2 \left(\frac{dz}{d\alpha}\right)^2 = K^2 z^2 + \frac{K^2 (dz)^2}{(d\alpha)^2}$$

cioè

$$K^2 z^2 (d\alpha)^2 + K^2 (dz)^2 = (d\alpha)^2 (2\,gzr_0^2 - C)$$

e raccogliendo

$$(d\alpha)^2 (K^2 z^2 - 2\,gzr_0^2 + C) = -K^2 (dz)^2$$

$$d\alpha = \frac{\pm K \cdot dz}{\sqrt{-C + 2\,gzr_0^2 - K^2 z^2}} \tag{71}$$

Quando r aumenta z diminuisce: r aumenta quando φ è positivo (per il punto A), poichè α è necessariamente positivo e moltiplicando per K numeratore e denominatore

$$d\alpha = \frac{-K^2 \cdot dz}{\sqrt{-CK^2 + 2gK^2 z r_0^2 - K^4 z^2}}$$

ed osservando che

$$(K^2 z - g r_0^2)^2 = K^4 z^2 + g^2 r_0^4 - 2 g r_0^2 K^2 z$$

e

$$-(K^2 z - g r_0^2)^2 = -K^4 z^2 - g^2 r_0^4 + 2 g r_0^2 K^2 z$$

il polinomio sotto radice si può scrivere

$$g^2 r_0^4 - (K^2 z - g r_0^2)^2 - CK^2$$

oppure

$$\sqrt{g^2 r_0^4 - CK^2}\sqrt{1 - \frac{(K^2 z - g r_0^2)^2}{g^2 r_0^4 - CK^2}} \qquad [72]$$

Poichè $\frac{d\alpha}{dr}$ non può essere immaginario, l'espressione $g^2 r_0^4 - CK^2$ deve essere maggiore di zero.

Poniamo:

$$\frac{K^2 z - g r_0^2}{\sqrt{g^2 r_0^4 - CK^2}} = q \qquad [73]$$

si ha allora

$$dq = \frac{K^2\, dz}{\sqrt{g^2 r_0^4 - CK^2}}$$

e sostituendo nella espressione di $d\alpha$, si può scrivere

$$d\alpha = \frac{-dq}{\sqrt{1 - q^2}}$$

Integrando, e chiamando γ la costante d'integrazione si avrà

$$\alpha - \gamma = \text{arc} \cdot \cos q$$

$$\cos(\alpha - \gamma) = \frac{K^2 z - g r_0^2}{\sqrt{g^2 r_0^4 - CK^2}}$$

Sostituendo a z il suo valore $\frac{1}{r}$ si ha:

$$\cos(\alpha - \gamma) = \frac{\frac{K^2}{r} - g r_0^2}{\sqrt{g^2 r_0^4 - CK^2}}$$

ed esplicitando il valore di r

$$r = \frac{K^2}{\cos(\alpha - \gamma)\sqrt{g^2 r_0^4 - CK^2} + g r_0^2}$$

Ponendo

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{CK^2}{g^2 r_0^4}}$$

dividendo numeratore e denominatore per gr_0^2 si ha

$$g = \frac{\frac{K^2}{gr_0^2}}{\cos(\alpha - \gamma) \cdot \varepsilon + 1}$$

e ponendo

$$p = \frac{K^2}{gr_0^2}$$

si ha in definitiva

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos(\alpha - \gamma)} \qquad [74]$$

che è l'equazione della traiettoria, equazione polare di una sezione conica, riferita ad uu fuoco come polo. In questo caso il polo coincide con il centro della terra e l'asse polare passa per A - origine della traiettoria - e forma, con l'asse della conica, l'angolo γ.

Se $\gamma = 0$ l'asse polare coincide con l'asse della conica e con l'asse terrestre; si ha allora

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \alpha}$$

ed indicando con a b i due semiassi (a l'asse che contiène un fuoco); $d = \sqrt{a^2 - b^2}$; $\varepsilon = \frac{d}{a}$ (eccentricità) (fig. 18)

per $\varepsilon < 1$ si ha un'ellisse
per $\varepsilon = 0$ si ha un cerchio
per $\varepsilon = 1$ si ha una parabola
per $\varepsilon > 1$ si ha una iperbole

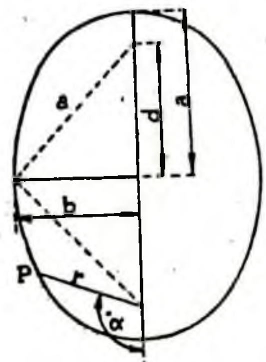


FIG. 18.

Tornando all'espressione generale di $\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{CK^2}{g^2 r_0^4}}$ si ha:

Ellisse per $\varepsilon < 1$ cioè $\frac{CK^2}{g^2 r_0^4} > 0$ oppure $C > 0$ e ricordando l'espressione di C [68]: $2\, gr_0 > V^2$

$$\frac{V^2}{2g} < r_0$$

Parabola per $\varepsilon = 1$ cioè $C = 0$

$$\frac{V^2}{2g} = r_0$$

Iperbole per $\varepsilon > 1$ cioè $C < 0$

$$\frac{V^2}{2g} > r_0$$

Da notare che $\frac{V^2}{2g}$ è l'altezza che raggiungerebbe il proietto lanciato verticalmente in alto dal punto A, nella ipotesi che la gravità restasse costantemente uguale a g.

Numericamente: ponendo $g = 9{,}81$; $r_0 = 6.370.300$, la velocità iniziale, per il caso della parabola $\left(\varepsilon = 1; \frac{V^2}{2g} = r_0\right)$ risulta $V = 11050$ m/s.

Perchè la conica sia un cerchio deve essere $\varepsilon = 0$ cioè

$$1 = \frac{CK^2}{g^2 r_0^4} \cdot$$

e sostituendo a C e K i loro valori si ha:

$$V^4 \cos^2\varphi - 2\, g r_0\, V^2 \cos^2\varphi + g^2 r_0^2 = 0$$

da cui

$$V^2 = \frac{g r_0}{\cos\varphi}\left(\cos\varphi \pm \sqrt{\cos^2\varphi - 1}\right)$$

I valori di V non possono essere reali che per $\cos\varphi = 1$ cioè a dire se il tiro è orizzontale, si ha allora

$$V = \sqrt{g \cdot r_0}$$

e numericamente $V = 7900$ m/s.

In riassunto, i casi che possono presentarsi sono i seguenti:

1°) $V = 0$ (caduta libera): la traiettoria ellittica si riduce al segmento AO. Il centro O è il fuoco comune di tutte le traiettorie; l'altro fuoco è A.

2°) $0 < V < 7900$ m/s: la traiettoria è ellittica; il fuoco (mobile) parte da A e si avvicina ad O.

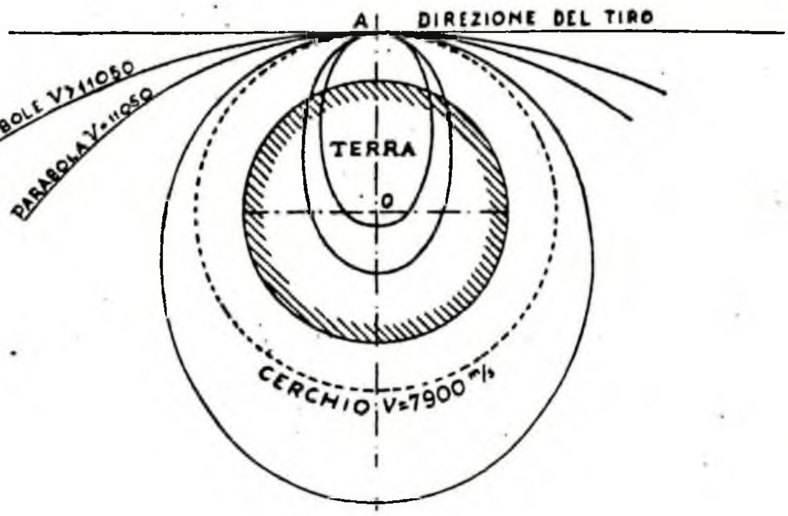


FIG. 19.

3°) $V = 7900$ m/s; i due fuochi sono riuniti in O, e la traiettoria è un cerchio concentrico alla terra.

4°) 7900 m/s $< V <$ 11050 m/s; il proietto descrive ancora un ellisse che, dalla parte opposta di A, si allontana sempre più dalla terra; il fuoco mobile sorpassa il punto O e si va allontanando al crescere di V.

5°) $V = 11050$ m/s, il proietto non passa più in A; la traiettoria è una parabola: il fuoco mobile è all'infinito.

6°) Sorpassata la $V = 11050$, le traiettorie sono iperboli le cui branche si avvicinano sempre più all'orizzontale — direzione raggiunta per $V = \infty$. Il fuoco mobile viene dall'infinito — ma dalla parte opposta di AC e si avvicina ad A (fig. 19).

Quando il tiro è eseguito con l'angolo di proiezione φ, con velocità V crescenti, le traiettorie sono ellittiche; il punto di caduta si allontana sempre più da A; mentre uno dei fuochi è sempre il centro O della terra, l'altro fuoco F si muove al crescere di V su di una retta AF, che fa con la direzione del tiro l'angolo β uguale a quello che la stessa direzione, prolungata, fa con l'asse terrestre AO (proprietà della tangente all'ellisse). Per $V = 11050$ l'ellisse diviene una parabola, il proietto non incontra più la terra, il fuoco si è allontanato all'infinito nella direzione At. Questa parabola separa la regione delle traiettorie ellittiche da quelle delle iperboliche e ne è il limite comune. Per costruirne il vertice si conduce per O la parallela ad AF; la quale incontra nel punto m il prolungamento della At; m' è il simmetrico di m rispetto ad O. Dal punto b di mezzo della mA si abbassi la perpendicolare alla mm' in d che è il vertice cercato (fig. 20).

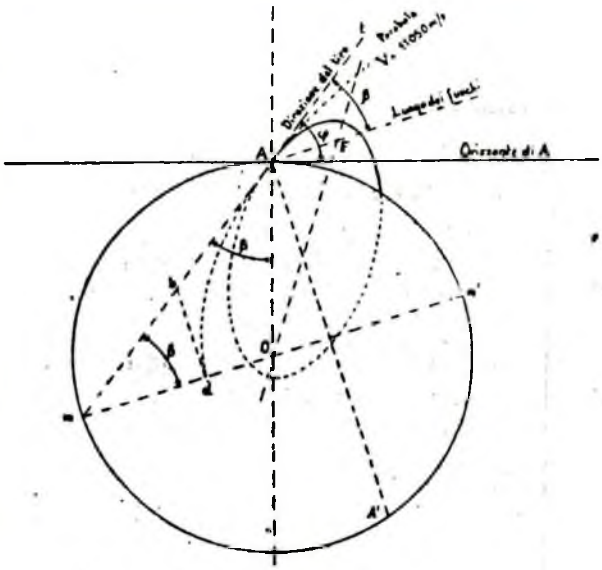


FIG. 20.

Il punto A' simmetrico di A è l'ultimo punto della superficie terrestre che può essere raggiunto dal proietto. Quando V cresce da 0 all'∞, tutta la porzione $A\,m'\,A'$, può esser colpita; mentre la porzione $A\,m'\,A'$ non può esserlo.

Eberhard ha dato la seguente formula per calcolare il ΔX tenendo conto contemporaneamente della curvatura della terra, della convergenza delle verticali e della variazione di g con l'altezza.

$$\Delta X = X \cdot \frac{1}{\frac{2\, r_0 \operatorname{tang} \varphi}{X} - 1}$$

Abbiamo così sommariamente esaminato il problema della traiettoria planetaria del proietto nel vuoto; lo stesso problema, del movimento in un mezzo resistente, riunisce, in un tale enunciato, l'astronomia e la balistica.

Questo problema non ha però interesse per la balistica pratica, le cui traiettorie possono sempre, con piccole correzioni, essere calcolate per g costante in grandezza e direzione.

D'altra parte, i casi nei quali si può risolverlo e che interessano l'astronomia sono quelli che ammettono una resistenza del mezzo molto piccola, e traiettorie con minima eccentricità, quest'ultima ipotesi è ben lontana dall'essere realizzata in balistica.

Si può osservare (Charbonnier) che per queste due scienze, vi è in certo qual modo una inversione del problema principale e dei secondari poichè l'astronomia, in 1ª approssimazione ammette g variabile e resistenza molto piccola mentre la balistica parte in 1ª approssimazione, dall'ipotesi di g costante e resistenza qualsiasi tenendo conto, in 2ª approssimazione, delle piccole variazioni di g.

CAPITOLO II

L'ATMOSFERA

1 – Premesse.

L'atmosfera è lo strato gassoso che avvolge la terra.

Essa è costituita da un miscuglio di gas permanenti, cioè non soggetti a condensazione, e di vapore acqueo.

La composizione della parte permanente dell'aria nello strato più basso dell'atmosfera, che si estende dalla superficie fino a circa km. 10 di altezza e che chiamasi troposfera, è sensibilmente costante, e ciò per effetto delle correnti verticali che si oppongono alla naturale distribuzione dei vari gas che compongono l'aria, secondo le leggi della diffusione.

Nella troposfera soltanto si nota la presenza di vapore acqueo, però in quantità variabilissima e mai superiore a 25 gr. per metro cubo d'aria.

I principali componenti dell'aria secca della troposfera, sono:

Azoto	78 %	in volume.
Ossigeno	21 %	» »
Anidride carbonica	0,03 %	» »
Argon	0,94 %	» »
Gas rari	(elio, neon, cripto, xeno ed idrogeno) in traccie.	

Nella troposfera la temperatura va regolarmente decrescendo di circa ½ grado per ogni 100 m. di quota.

Negli strati superiori dell'atmosfera che sovrastano la troposfera e costituiscono la cosidetta stratosfera, la temperatura si può considerare in media indipendente dall'altezza, inoltre non vi sono correnti verticali che rimescolano l'aria e si può avere una distribuzione dei vari gas componenti com'è richiesta dalle leggi della diffusione. È appunto perciò che, conoscendo la composizione dell'aria nella troposfera si può, applicando il calcolo, determinare quale dovrebbe essere la distribuzione dei vari gas negli strati superiori dell'atmosfera.

Un calcolo di questo genere venne eseguito dal Wegener, il quale determinò la composizione dell'aria nella stratosfera partendo dall'ipotesi, che pare assai prossima alla realtà, che la temperatura oltre ai 10 km. di altezza, e per un rilevante tratto, si mantenga costante ed uguale a — 55°.

Dai risultati ottenuti dal fisico citato, si può arguire che la percentuale dei gas più pesanti va molto rapidamente decrescendo con l'altezza, mentre quella dei gas leggeri (elio), segue un andamento opposto talchè si può ammettere che la percentuale di idrogeno raggiunga il 100 % negli strati elevatissimi.

Per i gas di densità intermedia si ha dapprima un aumento della percentuale, reso più sensibile dalla diminuzione dei gas pesanti ; poi, una diminuzione dovuta all'accrescersi dell'idrogeno.

Ne consegue la preponderanza di gas diversi nella composizione dell'aria alle varie altezza, preponderanza che, secondo i calcoli del Wegener, competerebbe all'azoto fino a 60 km. d'altezza, indi dall'idrogeno, distinguendosi così nella stratosfera una azotosfera più bassa ed una idrogenosfera elevatissima, separate da una sottile eliosfera.

Ai risultati ottenuti da Wegener si deve però dare un valore relativo, perchè su essi influisce fortemente la scelta dei valori percentuali dei gas leggeri alla base della stratosfera.

Recenti esperienze eseguite dal prof. Piccard sembrano infirmare completamente quanto ha dedotto il Wegener basandosi su semplici ipotesi.

Il Piccard afferma appunto che:

« Sulla composizione della stratosfera si sono fatte più affermazioni di quante fossero le nozioni dirette.

« Nella ipotesi che a questa altezza non dovessero esistere affatto le correnti verticali, si è calcolato in qual modo avrebbero dovuto distribuirsi diversi gas atmosferici in base al loro peso ed alla loro diffusione. Si ritenne così che l'ossigeno debba presto lasciar posto all'azoto e questo all'elio che infine nelle regioni più alte non debba trovarsi che idrogeno puro.

« Questo calcolo, per quanto almeno riguarda le regioni inferiori della stratosfera, è risultato completamente errato giacchè se non vi sono correnti verticali dal punto di vista metereologico, ciò non significa che manchino del tutto.

« Ora la divisione dei vari componenti di un miscuglio di gas richiede un tempo così lungo che qualunque moto verticale, anche minimo, sarà sufficiente a distruggere il lavoro già fatto.

....« D'altra parte è accertato che nella stratosfera vi sono correnti verticali, come lo prova l'esistenza di venti e tempeste stratosferiche.

....« Abbiamo anche in quella zona frequenti tempeste di 100 km. di velocità ora, ed in qualche caso ne sono state osservate anche di velocità doppia ».

2 - Altezza dell'atmosfera.

Non è possibile assegnare un'altezza definita all'atmosfera; si deve piuttosto considerare che la sua densità va man mano riducendosi fino a valori inapprezzabili, per poi svanire negli spazi interplanetari.

Praticamente si potrà assegnare all'atmosfera un'altezza limitata oltre la quale la densità ha valori trascurabili agli effetti della resistenza opposta al moto dei proiettili.

Teoricamente si può definire l'altezza dell'atmosfera solo se si assegna a priori una legge di variazione della densità con la quota.

Il caso più semplice, sebbene puramente teorico, è quello di un'atmosfera omogenea, cioè tale che la sua densità non vari con l'altezza. In questo caso, indicando con δ_0 la densità a livello del mare, con p la pressione generica, con h il dislivello, si potrà scrivere:

$$dp = - g\, \delta_0\, dh$$

ed integrando:

$$p_h - p_0 = - g\, \delta_0\, h \qquad [1]$$

ove p_h è la pressione a quota h e p_0 quella a livello del mare.

Dalla equazione soprascritta appare che la pressione p_o si riduce a o per $p_o = g\,\delta_o h$, cioè per:

$$h = H_o = \frac{p_o}{g\,\delta_o}$$

quindi l'altezza totale H_o dell'atmosfera omogenea dipende dalla sola temperatura a livello del mare e ciò appare anche più chiaro se si considera l'equazione dei gas perfetti:

$$p_o V_o = R T_o$$

dalla quale si ricava $p_o = \delta_o R T_o$

e quindi:

$$H_o = \frac{\delta_o R T_o}{g\,\delta_o} = \frac{R T_o}{g} \qquad [2]$$

nella quale $R = 28{,}9$ è la costante caratteristica dell'aria per unità di massa.

Supponendo che a livello del mare la temperatura centigrada sia di 0° si ricava che l'altezza dell'atmosfera omogenea è: $H = 8042{,}5$ m. $= \sim 8$ km.

Fino ad ora si è tenuto conto della sola temperatura all'origine, però occorre notare che l'atmosfera omogenea supposta non può sussistere se non sussiste simultaneamente una diminuzione della temperatura con l'altezza ; infatti, nell'atmosfera omogenea la densità deve rimanere costante ad onta della diminuzione della pressione e ciò non avviene se contemporaneamente non si ha una diminuzione della temperatura.

Considerando δ_o costante si ha:

$$dp = \delta_o R\, d T$$

mentre per l'equilibrio statico deve essere:

$$dp = -\, g\,\delta_o\, d H$$

per cui dividendo:

$$\frac{d T}{d H} = -\frac{g}{R} = -\beta \qquad [3]$$

che ci dà l'espressione del gradiente di temperatura in una atmosfera omogenea.

Ponendo $g = 9{,}81$; $R = 28{,}9$ risulta:

$$\frac{d T}{d H} = -\,3{,}40 \text{ gradi centigradi per ogni 100 m.}$$

valore che è assai superiore a quello del gradiente della troposfera che, come già si è detto, si aggira su circa $^1/_2$ grado cent. per ogni 100 m.

A seconda della legge con la quale si considera vari la temperatura con l'altitudine, si hanno vari tipi di atmosfere teoriche che sono caratterizzate da differenti valori del gradiente β.

Consideriamo in generale la temperatura variabile con l'altezza: si avrà:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g}{RT}\, dh$$

da cui

$$\log p_h = \log p_o - \frac{g}{R}\int_o^h \frac{dh}{T} \qquad [4]$$

Se la legge di variazione della temperatura è lineare, cioè se:

$$T_h = T_o - \beta h$$

si avrà:

$$\log p_h = \log p_o - \frac{g}{R}\int_o^h \frac{dh}{T_o - \beta h} = \log p_o + \frac{g}{\beta R}\int_{To}^{Th} \frac{d\,T_h}{T_h}$$

ossia:

$$\log \frac{p_h}{p_o} = \frac{g}{\beta R} \log \frac{T_h}{T_o}$$

$$\frac{p_h}{p_o} = \left[\frac{T_h}{T_o}\right]^{\frac{g}{\beta R}} \qquad [5]$$

Nel caso invece che venga considerata una variazione politropica sarà:

$$\frac{p_h}{p_o} = \left[\frac{T_h}{T_o}\right]^{\frac{n}{n-1}} \qquad [6]$$

e per $n = 1{,}41 = \frac{C_p}{C_v}$ (variazione adiabatica) si avrà:

$$\frac{g}{\beta R} = \frac{n}{n-1} = 3{,}44$$

cioè:

$$\beta = \frac{1}{3{,}44}\,\frac{g}{R} = \frac{\beta_o}{3{,}44} = 1^0 \qquad [7]$$

per 100 metri di quota.

In questo caso l'altezza dell'atmosfera si ottiene considerando che:

$$T_{Hp} = T - \beta H_p = 0$$

da cui:

$$H_p = \frac{T_o}{\beta}\,\frac{RT_o}{g}\,\frac{g}{\beta R} = \overline{H}_o \frac{g}{\beta R} = \overline{H}_o \frac{n}{n-1} \qquad [8]$$

ove H_o rappresenta l'altezza dell'atmosfera omogenea d'egual temperatura a livello del mare. E giacchè si è visto che per l'adiabatica $\frac{n}{n-1} = 3{,}44$, l'altezza di tale tipo di atmosfera risulterà:

$$H_p = 3{,}44\; H_o = 3{,}44 \times 8042 = 27666,\ \text{m.}$$

Qualora si considerasse un'atmosfera isotermica per la quale $\beta = 0$, essa risulterebbe di altezza infinita.

Il caso atmosfera isotermica si verifica solo in una zona della stratosfera ove la temperatura si può ritenere costante ed uguale a -55°.

Lo studio ora eseguito ci permette di giudicare quale equilibrio meccanico si verifica nei vari tipi di atmosfere; così l'atmosfera omogenea ed isotermica costituisce un caso limite, interessante in quanto chè, corrispondendo alla invariabilità della densità con l'altezza ed avendo un gradiente termico di $-3^o\,{}^1/_2$, divide l'atmosfera meccanicamente in equilibrio stabile, ($|\beta| < 3^o\,{}^1/_2$ densità decrescente con l'altezza), da quella in equilibrio instabile ($|\beta| > 3^o\,{}^1/_2$), per le quali la densità dovrebbe crescere con la quota.

Non è qui il caso di fare cenno delle atmosfere aventi gradiente termico positivo, perchè troppo dissimili dalla realtà.

3 - Massa dell'atmosfera.

Si può considerare che la pressione atmosferica media sulla crosta terrestre sia di 740 m/m e ciò in conseguenza delle rilevanti altitudini sul livello del mare alle quali si trovano notevoli parti di continenti.

Ciò posto, giacchè la superficie terrestre si può ritenere rappresentata da:

$$S = 51 \cdot 10^7 \text{ km}^2$$

ed il peso della colonna atmosferica è rappresentata da:

$$\bar{P} = \frac{740}{760} 1{,}033 \text{ kg} \cdot \text{cm}^2 = 1{,}006 \cdot 10^{10} \text{ kg/km}^2 = 1{,}006 \cdot 10^7 \text{ ton/km}^2,$$

la forza che agisce sulla crosta terrestre per effetto dell'atmosfera sarà:

$$\bar{P}S = F = 51{,}3 \cdot 10^{14} \text{ tonn.}$$

Ottenuto il peso F, dovrebbe potersi dedurre la massa dividendo per $g = 9{,}81$; però occorre notare che la gravità decresce con il crescere dell'altitudine e quindi più gli strati considerati sono elevati e più aumenta la massa; per cui si può ritenere che la massa dell'atmosfera sia infinitamente grande, pur essendone finito il suo peso.

4 - Vapore acqueo dell'atmosfera.

Il vapore acqueo si riscontra esclusivamente nella troposfera, ove tende a raggiungere un equilibrio di diffusione ; occorre però notare che per ogni temperatura corrisponde un valore massimo della quantità di vapore che può essere contenuta nell'unità di volume d'aria (saturazione), cioè per ogni temperatura la pressione dovuta al vapore ha un limite non superabile, limite che chiamasi « tensione del vapore saturo ».

Chiameremo « umidità relativa » il rapporto fra la tensione f effettiva del vapore acqueo presente nell'atmosfera e la tensione massima o tensione del vaporee saturo corrispondente alla temperatura considerata.

« Umidità assoluta » è invece la quantità di vapore acqueo in grammi contenuta in un metro cubo d'aria.

Conviene a volte considerare anche l'« umidità specifica » che si esprime in kg. di vapore acqueo per 1 kg. di aria umida.

La presenza del vapore acqueo nell'atmosfera ha per effetto, per quanto riguarda la densità, di dover modificare il valore da attribuire alla costante R dell'equazione di stato, giacchè, mentre come si disse, l'aria secca si può ritenere una miscela di gas perfetti e ad essa applicare la nota relazione:

$$pv = RT,$$

ciò non è più lecito per l'aria umida per la quale detta legge può solo essere applicata in via d'approssimazione e modificando opportunamente il valore di R.

5 - Esplorazione dell'atmosfera.

Il progresso della metereologia dipende in grandissima parte dalla possibilità di studiare sistematicamente l'atmosfera, ossia di misurare le grandezze fisiche che ne caratterizzano lo stato (temperatura, pressione, stato igrometrico) non solo alla superficie terrestre, ma anche alle varie altezze.

Fino verso la fine del secolo scorso, le osservazioni metereologiche erano esclusivamente affidate ad ascensioni aereostatiche o ad escursioni su alte montagne. Infatti i dati che servirono al conte di S. Robert per il calcolo dei valori della densità dell'aria che per molti anni fu impiegata nella nostra artiglieria, furono dedotti dai risultati ottenuti dal Gleisher in otto ascensioni aerostatiche.

Le altezze che si possono raggiungere nei modi suindicati, sono assai limitate, nè le esperienze possono essere condotte in ogni regione con la voluta periodicità.

Anche per l'impiego dei palloni frenati, che dà maggior comodità di indagine, ha l'inconveniente di richiedere mezzi tecnici e finanziari non indifferenti ed inoltre limita l'osservazione ai periodi di tempo in cui l'atmosfera è relativamente calma, e ciò per ovvie ragioni di sicurezza.

Un grandissimo progresso nell'osservazione sistematica dell'atmosfera, fu realizzata grazie all'impiego dei cervi volanti o dei palloni sonda.

I cervi volanti si possono elevare quando al suolo la velocità del vento raggiunge i 5 m/s e con essi si è pervenuti sino a quote di 7 km.

Il pallone sonda è un piccolo aerostato di seta di 2 metri cubi di volume, la cui forza ascensionale è appena sufficiente a sollevare gli apparecchi registratori. L'altezza cui potrà giungere un tale pallone, dipende dal punto in cui la pressione atmosferica esterna è tale da provocare lo scoppio dell'involucro.

Per evitare che gli apparecchi registratori si infrangano nel toccare il suolo il pallone è generalmente accoppiato ad un altro disposto al disopra del primo, e che non è completamente riempito di gas in modo che l'involucro non scoppi col primo.

La forza ascensionale di questo pallone non è sufficiente a sorreggere interamente il peso degli apparecchi, ma è calcolata in modo da diminuire sufficientemente la velocità di caduta.

Allo stesso scopo di questo secondo pallone può servire un paracadute di seta unito agli apparecchi e che si apre allorchè questi iniziano il moto di caduta.

Questo secondo metodo, ai fini dell'integrità degli apparecchi, è meno sicuro del precedente.

Gli strumenti registratori portati dalla navicella dei palloni sonda, sono generalmente:

— un termografo.
— un barografo.
— un idrografo.

I diagrammi di questi strumenti sono tracciati su carta affumicata portata da un cilindro messo in moto da un apparecchio ad orologeria. È evidente che particolare proprietà di questi strumenti deve essere la leggerezza.

Siccome le correnti atmosferiche trascinano i palloni-sonda molto lontano dal punto di lancio, nella navicella che contiene gli apparecchi si pongono le istruzioni necessarie per chi li ritrova, affinchè possa inviarli all'osservatorio che ha eseguito il lancio.

Mentre gli apparecchi trasportati dal pallone sonda registrano automaticamente la temperatura, la pressione e lo stato igrometrico di ogni istante, è d'altra parte indispensabile determinare ad intervalli di tempo sufficientemente vicini l'altezza raggiunta dal pallone stesso.

Giacchè il pallone durante la sua ascensione subisce notevoli spostamenti orizzontali bisogna poter determinare nei vari istanti la proiezione orizzontale del pallone e ciò è possibile osservando simultaneamente con due teodoliti, posti in due punti la cui reciproca distanza è nota con molta esattezza.

Una semplice risoluzione di triangoli permette, noti gli angoli zenitali ed azimutali del pallone rispetto alle due stazioni, di determinare la sua esatta posizione dello spazio.

Questa operazione richiede naturalmente che le stazioni di osservazione siano collegate telefonicamente in modo da assicurare la simultaneità della lettura.

Il procedimento si può semplificare riducendo le stazioni ad una sola, anche se l'atmosfera non è calma, purchè non vi siano correnti verticali rilevanti. Da esperienze fatte risulterebbe che la componente verticale della velocità del pallone si può ritenere costante con sufficiente approssimazione ed il suo valore può essere determinato sperimentalmente una volta tanto per un dato tipo e peso di pallone; in questo caso il teodolite serve per far conoscere istante per istante la posizione orizzontale del pallone, dato questo che è necessario per lo studio della direzione e della velocità delle correnti atmosferiche.

Con l'impiego dei palloni sonda si raggiungono facilmente i 20 km. di altezza e moltissime osservazioni furono fatte fino a 30 km.

La massima altezza fino ad ora raggiunta è stata quella del pallone lanciato il 17 dicembre 1912 dal prof. Pericle Gamba, direttore dell'osservatorio geofisico di Pavia; che si è elevato fino a 37.700 metri, ritornando al suolo a 40 km. dal punto di partenza.

6 – Temperatura dell'aria.

La temperatura dell'atmosfera è funzione dell intensità delle radiazioni solari che influiscono sia direttamente (assorbimento dei raggi rossi) che indirettamente per effetto delle radiazioni riemesse dalla terra illuminata dal sole.

La temperatura è funzione essenzialmente:

a) della posizione del sole;

b) delle condizioni dell'atmosfera;

c) della natura del suolo;

e però dipenderà dall'ora che si considera durante la giornata, dalla stagione dell'anno e dalla topografia del luogo in esame.

Generalmente al suolo viene considerata una temperatura media giornaliera che si ottiene dall'insieme delle temperature massime e minime del giorno e da quelle misurate alle ore 9 ed alle 21, ore queste in cui si ritiene che la temperatura abbia un valore medio.

L'andamento annuo della temperatura dipende anch'esso dalle condizioni locali, dalla ubicazione della regione considerata e dalle radiazioni solari. Lo studio della temperatura in una determinata epoca e località si fa costruendo la carta delle isoterme, cioè tracciando sulla carta della regione in esame le curve congiungenti i punti di egual temperatura.

Dette curve possono riferirsi alla temperatura media, alla massima ed alla minima e comprendere le escursioni termiche di periodi di tempo più o meno lunghi.

Per il nostro studio, ciò che interessa è la distribuzione del calore dell'atmosfera in funzione della quota.

7 – Variazione della temperatura con la quota.

È noto che elevandosi in altezza si osservano generalmente temperature decrescenti. Come è stato definito precedentemente, il gradiente termico è il numero in gradi centigradi rappresentanti la variazione di temperatura per ogni 100 metri di quota.

In prossimità del suolo il gradiente termico non si mantiene costante ed in particolari condizioni d'ambiente possono anche osservarsi delle inversioni di temperatura, come talvolta avviene nelle valli alpine, dove la temperatura del fondo valle è minore di quella che si ha sui monti.

Elevandosi però a maggiori altezze, il decremento di temperatura acquista un carattere di regolarità abbastanza costante.

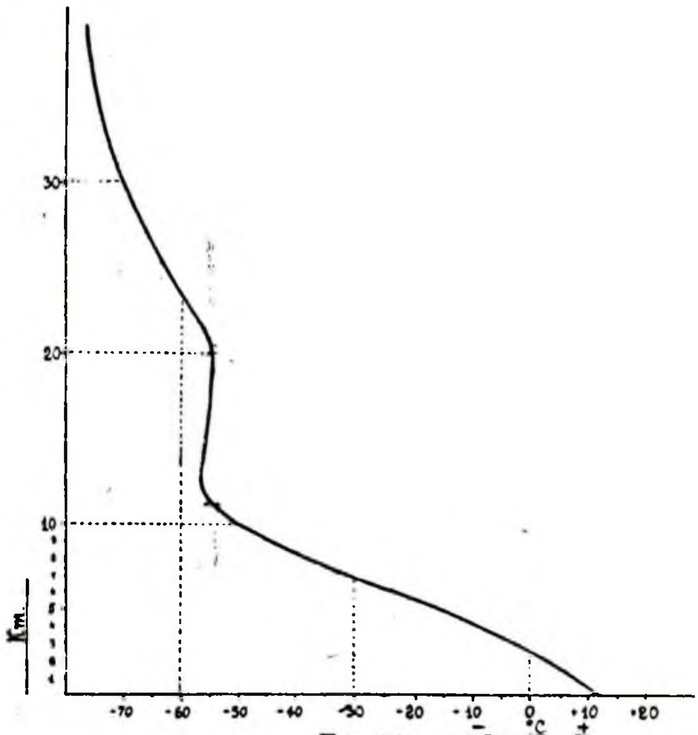


FIG. 21.

La fig. 21 rappresenta schematicamente l'andamento della temperatura media annua delle varie altitudini; essa venne ricavata dai dati sperimentali ottenuti dal prof. Gamba, già citato, in una lunga serie di esperienze con 232 lanci utili di palloni sonda eseguiti nel periodo di tempo compreso fra il 1906 ed il 1930.

Dall'esame del diagramma appare come la temperatura vada decrescendo con l'altezza fino verso i 10 ÷ 11 km., cioè fino all'inizio della stratosfera per poi mantenersi costante.

Si ha ragione di ritenere che questa zona isoterma cessi poco oltre 20 km. di altezza e la temperatura riprenda a diminuire seguendo una legge esponenziale, cioè sempre più lentamente col crescere dell'altezza.

8 - Pressione.

La pressione media esercitata dalla massa dell'atmosfera sulla superficie terrestre corrisponde a quella di una colonna di mercurio alta 760 mm. Tale forza, qualora si consideri una colonna di sezione di 1 cm^2 a temperatura 0° e latitudine di 45°, costituisce l'unità di misura di pressione che chiamasi « atmosfera ».

Giacchè la colonna di mercurio nelle condizioni sopra dette pesa gr. 13,596 per cm^3, il peso di tale colonna sarà di gr. 1033,3.

La linea che congiunge i punti di uguale pressione, chiamasi « isobara ».

9 - Gradiente barico orizzontale.

È la differenza di pressione fra due punti *A* e *B* divisa per la distanza o, meglio è la derivata della pressione fatta rispetto alla distanza per punti di ugual quota;

Come gradiente barico orizzontale si assume quello corrispondente ad 1 mm. di pressione per 1° del meridiano medio terrestre.

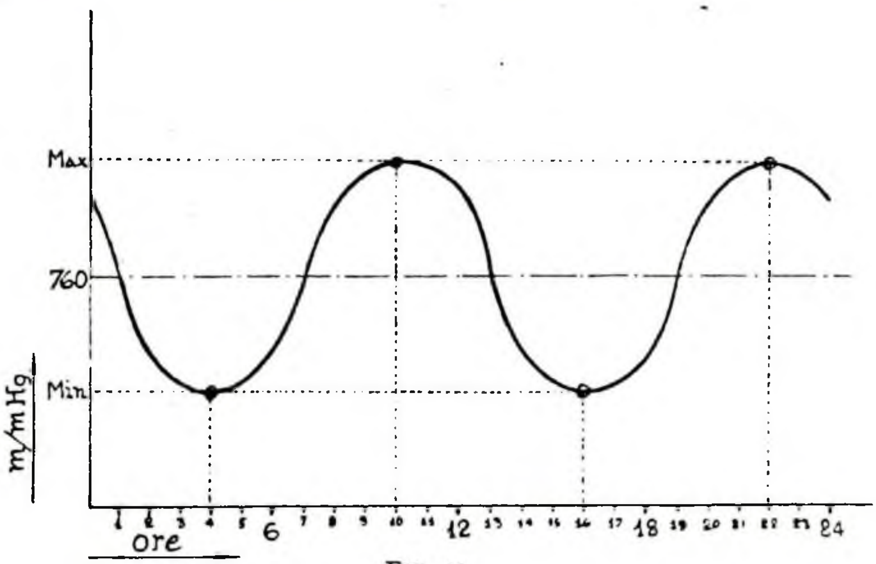


FIG. 22.

Gradiente verticale è la derivata della pressione rispetto alla quota.

Anche per la pressione può essere considerato il valore medio giornaliero stagionale od annuale.

La pressione media giornaliera viene determinata come la temperatura media.

La pressione raggiunge in media nella giornata due massimi, (intorno alle 10 e 22), e due minimi, (intorno alle 4 ed alle 16); talchè l'andamento della pressione nella giornata genera una vera e propria onda (fig. 22).

Si è detto che la pressione deve essere riferita a 0° ed alla latitudine di 45° quando ci si trova in condizioni diverse, occorre fare la riduzione delle letture alle condizioni di base.

Tali riduzioni sono:

1°) Riduzione alla temperatura di 0°.

Viene effettuata correggendo le letture fatte della quantità 0,0³161 *B.T.*, per cui l'altezza barometrica effettiva B_0, se B_1 è la lettura fatta sul barometro a gradi centigradi sarà:

$$B_0 = B_1 - 0{,}0^3161\, \tau\, B_1$$

2°) Riduzione a livello del mare.

Se h è la quota alla quale si ha la pressione B, la pressione a livello del mare sarà rappresentata da:

$$B_0 = B + B\,(10^m - 1)$$

in cui:

$$m = \frac{h}{18429 + 65{,}6\,\tau + 0{,}003\,h}$$

3°) Riduzione alla latitudine di 45°:

$$B_{45^\circ} = (1 - 0{,}002648 \cos 2\lambda)\, B$$

ove λ è la latitudine.

10 - Variazione della pressione con la quota.

È ovvio che la determinazione delle particolari condizioni di equilibrio della atmosfera costituisce il problema fondamentale di ogni stazione aerologica importante.

Non basta, per lo studio completo dell'atmosfera, la conoscenza degli elementi metereologici al suolo indicati dagli strumenti fissi della stazione, ma occorre poter determinare questi elementi negli strati atmosferici sovrastanti la regione.

Il problema è dunque il seguente:

Data la pressione, la temperatura e lo stato igrometrico al suolo, determinare la distribuzione di questi elementi con l'altezza, cioè assegnare, per lo stato particolare di equilibrio in cui si trova l'atmosfera al suolo, [ad ogni altezza i rispettivi elementi metereologici, oppure dati questi determinare la corrispondente altezza sul livello del mare.

Si è visto precedentemente che l'equazione d'equilibrio statico dei fluidi è:

$$dp = -\, g\, \delta_0\, dh$$

D'altra parte dalle equazioni di stato dei gas perfetti, ponendo $v = \frac{1}{\delta}$ si ottiene:

$$\delta = \frac{p}{RT}$$

per cui:

$$\frac{dp}{dh} = \frac{-\,gp}{R\,T}$$

Ora la legge di variazione di g in funzione della quota è nota, per cui se si conosce anche la legge di variazione della temperatura, integrando si otterrà la pressione p in funzione della quota h.

Per semplicità di calcolo se supponiamo T costante e trascuriamo la variazione della gravità, chiamando con:

$$H = h_2 - h_1$$

il dislivello si avrà:

$$H = \frac{RT}{g} \log_e \frac{p_0}{p}$$

Volendo una formula applicabile praticamente basterà passare dai logaritmi naturali a quelli a base 10. Gli altri elementi sono tutti noti.

Posto infine:

$$R = 28{,}9\, g_0; \quad T = 273\,(1 + \alpha t); \quad \alpha = \frac{1}{273}; \quad g = 9{,}806$$

sarà :

$$H = 18400 \frac{g_0}{g} (1 + \alpha t) \log_{10} \frac{p_0}{p}$$

Questa formula può servire comunemente per la determinazione di piccoli dislivelli mediante le osservazioni della variazione di pressione. Come temperatura si assumerà quella media fra le temperature delle stazioni estreme.

Non si commette errore sensibile ponendo $\frac{g_0}{g} = 1$.

Una precisione maggiore si ottiene tenendo conto della variazione di g con la quota e con la latitudine e della umidità atmosferica, ed a tale scopo serve la formula di Laplace.

Per ottenere una formula valida con discreta approssimazione anche ai maggiori dislivelli entro i limiti della troposfera, si può ammettere che la temperatura sia funzione lineare dell'altitudine; si può porre cioè:

$$H = \frac{1}{\beta} (T_0 - T)$$

ove β, come si è visto, è il gradiente termico ed è pressocchè costante entro i limiti suddetti.

Per dislivelli inferiori ai 500 metri, come nel caso in cui la misura dei dislivelli mediante il barometro serve di ausilio topografico per individuare qualche rilievo del terreno, è sufficiente usare la relazione:

$$\frac{dp}{dh} = -\frac{gp}{RT}$$

nella quale si sostituiscono le differenze finite ai differenziali e si possono in luogo di p e T scrivere i valori medi p_m T_m, per cui sarà:

$$\frac{p_0 - p}{p_m} = \frac{g}{Rm} (h_0 - h)$$

$$H = \frac{R}{g} (273 + t_m) \frac{p_0 - p}{p_m}$$

Si trova in tal modo che alla temperatura media di 15° C e pressione di 750 m., ogni diminuzione di pressione di un mm. corrisponde ad un'elevazione verticale di m. 11,25, mentre alla temperatura di 0° C, il dislivello per ogni mm. di pressione è di m. 10,65.

11 - Metodo Bjerknes.

Il Bjerknes per lo studio della distribuzione atmosferica immagina l'atmosfera suddivisa in strati isobarici corrispondenti ad una differenza di pressione di un decibar (1 decibar = 75 mm. di *Hg*).

Essendo al livello del mare la pressione di poco superiore a 10 decibar, l'atmosfera risulta suddivisa in 11 strati isobarici principali, di cui due incompleti: quello relativo alle pressioni comprese tra 10 ed 11 decibar perchè manca del limite inferiore e quello relativo alle pressioni inferiori di un decibar perchè è indeterminato il suo limite superiore.

Inoltre per tener conto dell'umidità che è contenuta nell'aria, introduce il concetto di temperatura virtuale la quale viene definita dalla relazione:

$$T_v = T\,(1 + 0{,}6\,\text{m.})$$

essendo m. il titolo in vapore acqueo dell'aria, cioè il contenuto in gr. di vapore acqueo in un grammo di aria umida.

Ciò posto, per ogni strato isobarico, la quota viene calcolata con la relazione già trovata precedentemente:

$$H = \frac{RT_v}{g} \log_e \frac{p_0}{p}$$

nella quale T_v è la temperatura virtuale.

Allo scopo di facilitare il calcolo mediante tabelle, il Bjerknes procede nel seguente modo:

Dopo aver divisa l'atmosfera in strati isobarici principali, indica con n la pressione su una superficie isobarica che li limita; $n - 1$ sarà la pressione sopra la superficie isobarica immediatamente sovrapposta.

Allora se $p_0 = n$; $p = n - 1$ sarà:

$$H_n = \frac{RT_v}{g} \log_e \frac{n}{n - 1}$$

che è funzione della temperatura media virtuale dello strato.

Tale formula consente quindi il calcolo di tabelle che danno, ciascuna in funzione della temperatura virtuale media, lo spessore di uno strato isobarico principale.

Il Bjerknes ha quindi calcolata una serie di tabelle che danno gli spessori degli strati limitati da una parte da superfici isobariche principali per temperature virtuali medie di 0° ed altre con le correzioni da apportarsi agli spessori trovati per $t = 0$, nei casi in cui la temperatura virtuale media è diversa da 0°.

I dislivelli entro i limiti di uno stesso strato isobarico vengono calcolati con le formule trovate in precedenza.

In epoche recenti si è presentato un altro problema di carattere internazionale e di attualità; l'istituzione cioè di metodi pratici per la determinazione delle altezze raggiunte nelle ascensioni fatte a scopo di conquistare primati.

Per la determinazione della pressione in questo caso la Federazione Aeronautica Internazionale dà le norme per l'applicazione dei barografi agli apparecchi e stabilisce che la stessa curva segnata dal barografo nell'ascensione sia riottenuta sotto la campana di una macchina pneumatica ed alla temperatura di 15°.

Il valore della pressione determinato in tal modo dal laboratorio serve per la determinazione dell'altezza massima raggiunta.

La corrispondenza fra pressione e altezza venne determinata dal Soreau sperimentalmente, il quale giunse alla formula

$$H = (3084 + 1{,}75\,p - 0{,}0011\,p^2)\log_{10}\frac{760}{p}$$

in cui H è l'altezza e p la pressione in mm.

12 – Densità balistica dell'aria.

Il peso di un metro cubo d'aria dipende dalla pressione barometrica, dalla temperatura e dallo stato igrometrico.

Esso cresce col crescere del primo di questi fattori e col diminuire degli altri due.

La conoscenza della densità dell'aria ha particolare importanza nello studio della balistica perchè l'esperienza e la teoria sono concordi nel ritenere che la resistenza opposta al moto dei proietti dall'aria sia proporzionale alla sua densità.

Per lo studio della densità dell'aria, si considererà prima questa priva di umidità; in secondo tempo si terrà conto anche di questo fattore.

Applicando all'aria l'equazione dei gas perfetti:

$$pv = RT$$

per due stati (p, v, T); $(p_0\ v_0\ T_0)$ si avrà

$$\frac{pv}{T} = \frac{p_0 v_0}{T_0} \qquad [1]$$

e giacchè volume e peso specifico sono legati dalla relazione

$$v = \frac{1}{\Delta} \quad \text{la [1] potrà scriversi}$$

$$\frac{\Delta}{\Delta_0} = \frac{p}{p_0}\cdot\frac{T_0}{T}$$

Se si indica la pressione barometrica con B e si pone $T = 273 + \tau$ (τ = temperatura centigrada) prendendo come stato iniziale quello corrispondente alla temperatura $\tau = 0$ ed alla pressione $B = 760$ mm. cui corrisponde una densità dell'aria $\Delta_0 = 1{,}293$ (esperienze di Règnault), si avrà

$$\Delta = \frac{273 \times 1{,}293}{760}\cdot\frac{B}{273 + \tau} = 0{,}4645\,\frac{B}{273 + \tau}$$

Quando l'aria non è secca, per la legge dei miscugli di gas e vapore (legge di Dalton) la pressione B misurata col barometro, è la somma della tensione f del vapore saturo o no, e della pressione dell'aria secca, la quale sarà perciò $B - f$.

Il peso dell'aria umida sarà quindi uguale al peso dell'aria secca:

$$0{,}4645\,\frac{B - f}{273 + \tau}$$

più il peso del vapore acqueo, la cui densità relativa è 0,623 di quella dell'aria secca

$$0{,}623 \times 0{,}4645\,\frac{f}{273 + \tau}$$

onde il peso di un metro cubo d'aria umida sarà

$$0{,}4645 \frac{B - 0{,}377\, f}{273 + \tau}$$

e giacchè, com'è stato già accennato precedentemente, si dice stato igrometrico il rapporto fra la tensione f e la tensione massima F del vapore acqueo corrispondente alla temperatura t, si potrà scrivere:

$$f = s\, F$$

per cui

$$\Delta = 0{,}4645 \frac{B - 0{,}377\, s\, F}{273 + \tau}$$

Se in questa espressione si fa:
$B = 750$; $\tau = 15^\circ$; $F = 12{,}7$ (che corrisponde a $\tau = 15^\circ$); ed $s = 0{,}5$ si ha:

$$\Delta = 1{,}206 \text{ kg. per m}^3.$$

In balistica, il rapporto del peso di un metro cubo d'aria espresso in kg. al numero costante 1,206 dicesi: densità balistica dell'aria.

Chiamando con δ tale densità essa viene espressa con la formula

$$\delta = 0{,}3852 \frac{B - 0{,}377\, s\, F}{273 + \tau} \qquad [2]$$

È possibile quindi, mediante la [2], assegnato ad s un valore determinato, procurarsi una tabella dei valori di δ avente per argomenti B e τ.

La tav. num. I dà i valori calcolati con la [2] della densità dell'aria corrispondente a un valore medio dello stato igrometrico ($s = 0{,}5$) ed alle varie temperature e pressioni.

Essa ci fornisce direttamente i valori di δ per pressione variabile di 10 in 10 mm. da 600 a 770 mm. e per temperature variabili di grado in grado da -20° a $+40^\circ$.

Apposita colonna, contenente le variazioni per 100 mm. di pressione, ci dà inoltre modo di determinare, per una data temperatura τ, compresa nei limiti sopradetti, la densità corrispondente ad un qualsivoglia valore della pressione.

Allorquando lo stato igrometrico s è diverso da 0,5 i valori di δ riportati nella tav. num. I debbono essere convenientemente corretti. La correzione da apportarsi è funzione dello stato igrometrico, il quale si deduce di solito dallo psicrometro d'August.

Questo, consta di due termometri graduati in gradi e decimi di grado centesimale, uno dei quali ha il bulbo bagnato da uno stoppino immerso nell'acqua di un recipiente e l'altro asciutto.

L'evaporazione sottrae calore al bulbo bagnato, ma l'aria ambiente gliene fornisce dell'altro, e la sua temperatura dopo essere discesa per un certo tempo, rimane poi costante, perchè la perdita eguaglia il guadagno.

La perdita è proporzionale alla quantità dell'acqua evaporata, la quale (esperienze di Dalton) è proporzionale alla differenza fra la tensione massima F e la tensione f che ha il vapore nell'aria circostante, ed è inversamente proporzionale alla pressione: il guadagno (legge di Newton) si può ritenere proporzionale all'eccesso $\tau - \tau'$ del termometro asciutto (ambiente) su quello bagnato.

Indicando con K una costante che vale

$$K = 0{,}0008 \quad \text{per } \tau' > 0$$

$$K = 0{,}000706 \quad \text{per } \tau' < 0$$

sarà :

$$\frac{F - f}{B} = K(\tau - \tau')$$

quindi

$$f = s\,F = F - KB(\tau - \tau')$$

La tav. num. II contiene le correzioni in millesimi da apportare alla densità letta nella Tav. I allorquando lo stato igrometrico s è diverso da 0,5.

Tali correzioni sono state calcolate con la formula

$$\Delta\,\delta = \frac{0{,}1452\,(s - 0{,}5)\,F}{273 + \tau}$$

servendosi, per le quantità s ed F, dei valori contenuti nelle Tav. Num. I e IV della serie B riportate nel trattato « Istruzioni per le osservazioni metereologiche e per l'altimetria barometrica » di Francesco Denza.

Barometro.

La misura della pressione si fa generalmente col barometro Fortin, il quale all'esattezza voluta congiunge il pregio di essere semplice ad osservarsi.

Nell'uso di tale strumento si deve avere l'avvertenza di condurre il mercurio a sfiorare la punta d'avorio che segna lo zero della graduazione; ciò fatto si legge l'altezza barometrica B_1 e la temperatura τ_1 del barometro.

La pressione esatta B si ottiene apportando alla B_1 letta, varie correzioni, di cui le principali sono: quella dovuta alla dilatazione del mercurio e della scala che si fanno diminuendo la B_1 della quantità 0,000161 $B_1\ \tau_1$ e la correzione strumentale, la quale si determina una volta tanto confrontando il barometro con un barometro normale.

13 – Densità balistica ed altitudine.

La densità dell'aria diminuisce col crescere delle altitudini, e la relazione che lega queste quantità non può essere determinata che con esperienze.

Le prime esperienze in proposito di qualche importanza, com'è stato accennato precedentemente, sono quelle eseguite dal Glaisher in otto ascensioni aerostatiche. Prendendo in esame i risultati delle osservazioni fatte in quelle ascensioni, il Saint Robert calcolò i valori della densità dell'aria corrispondenti alle varie altitudini, ed osservò che la relazione fra densità ed altitudine poteva essere rappresentata bene fino ad un certo punto, da una relazione lineare.

Riprendendo in esame questi risultati, il Parodi ricavò per gli usi della balistica una tabella estendentesi, in un primo tempo, fino ai 3000 metri di altitudine, ed in seguito fino a 9000 metri.

Più recenti studi aerologici, effettuati mercè numerosissime esperienze eseguite con larghezza di mezzi e con strumenti altimetrici di precisione ci hanno indotto ad abbandonare i dati veramente scarsi delle otto ascensioni del Glaisher, il quale necessariamente deve aver compiuto le sue esperienze con mezzi inadeguati allo scopo.

Lo studio della legge di variazione della densità dell'aria con l'altitudine venne perciò basato sulle numerosissime esperienze eseguite dal prof. Gamba, direttore dell'Osservatorio Geofisico di Pavia, il quale ha effettuato 232 sondaggi dell'atmosfera a mezzo di palloni sonda lanciati nei vari mesi dell'anno ininterrottamente nel quindicennio 1906-1920, ottenendo risultati veramente soddisfacenti.

Tutti i palloni lanciati dal prof. Gamba, erano provvisti di un termometro bimetallico, di un barometro a capsula « Vidi » e di un idrografo a cappello.

I diagrammi dei vari strumenti registratori venivano tracciati su carta rotante, mediante congegno ad orologeria.

Per il calcolo delle altitudini il prof. Gamba ha adottato il procedimento della Commissione Internazionale per lo studio scientifico dell'alta atmosfera (metodo Bjerknes).

Altre particolari notizie circa le modalità con cui vennero effettuate le esperienze ed eseguiti i calcoli, il lettore potrà trovare nella magistrale memoria del prof. Gamba:

« Le caratteristiche dell'atmosfera libera sulla Valle Padana » Venezia 1923.

Si ritiene opportuno riportare dall'opera citata:

1°) La tabella contenente i valori medi annui della temperatura alle varie altitudini da 0 e 20.000 metri. (tav. num. III');

2°) La tabella contenente i valori medi annui della pressione barometrica in mm. di mercurio per altitudini variabili da 0 a 20.000 metri (tav. num. III'');

3°) La tabella della densità media annua dell'aria (espressa in kg. per m^3) alle diverse altitudini da 0 a 20.000 metri (tav. num. III''').

L'esame della tav. num. III' conferma quanto è stato detto precedentemente e cioè che la temperatura diminuisce con l'aumentare dell'altezza, dapprima abbastanza lentamente, poi un poco più rapidamente; verso i 12.000 metri si nota una tendenza a rimanere pressocchè costante.

Dall'esame della tav. num. III'' delle pressioni medie annue risulta che la pressione atmosferica diminuisce con l'altitudine e tanto più lentamente quanto più ci si allontana dal suolo.

I valori riportati nella tav. num. III''' sono stati ricavati dal prof. Gamba mediante la nota relazione:

$$\Delta = 1{,}2931 \frac{B}{760} \frac{273}{273 + \tau}$$

valendosi delle temperature e le pressioni rispettivamente dei valori contenuti nelle tav. num. III' e III''.

Come risulta dalla formula soprascritta, il calcolo della tav. num. III''' venne eseguito trascurando il termine relativo alla umidità atmosferica, data la grande

incertezza del suo valore e per la piccola influenza da essa esercitata in tali misure e pertanto i valori contenuti nella tav. num. III''' potranno essere considerati di una piccola quantità più elevati del vero.

Il prof. Gamba ha pure trascurata l'influenza della variazione della gravità con l'altitudine, risultando essa inferiore a quella dell'umidità.

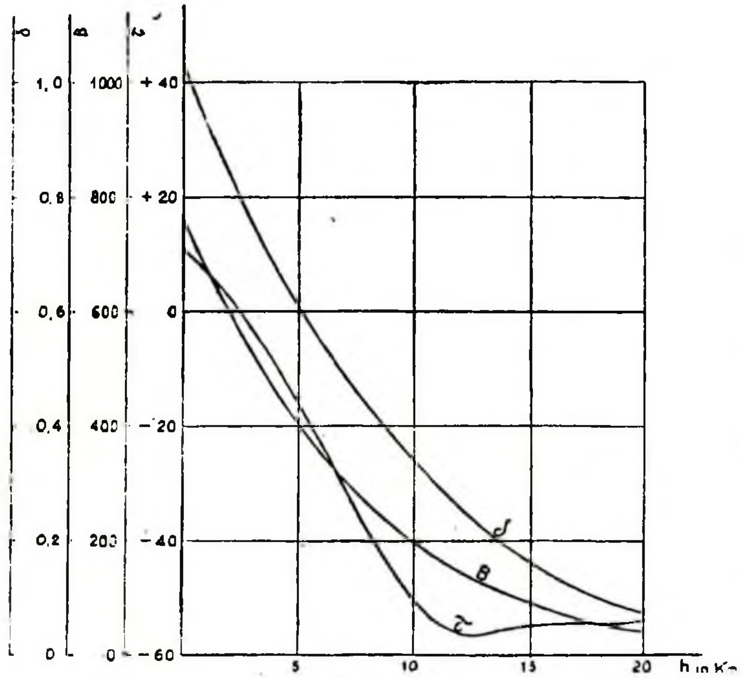


FIG. 23.

Allo scopo di rendere più evidente al lettore la fondatezza dei dati raccolti, le tre tav. num. III', III'', III''' sono state tradotte sotto forma di grafici (fig. 23). Ottenuti sperimentalmente i valori medi della densità (in kg. per m³) alle varie altitudini, contenuti nella tav. num. III''' è stata calcolata la densità balistica media alle varie quote con la formula:

$$\delta_y = \frac{\Delta_y}{1{,}2057} \frac{g_y}{g_o}$$

della quale g_o e g_y rappresentano rispettivamente i valori dell'accelerazione dovuta alla gravità al suolo ed alla quota y.

I valori del rapporto $\frac{g_y}{g_o}$ sono stati calcolati con la formula:

$$\frac{g_y}{g_o} = 1 - 0{,}0^6 1964\, y$$

essendo $g_o = 9{,}8057$ che è il valore medio della accelerazione della gravità nella Valle Padana.

Eseguiti i calcoli, si sono ottenuti i risultati riportati nella tav. num. III'''', nella quale i valori della densità balistica dell'aria sono stati arrotondati sulla terza cifra decimale, non essendo la quarta sufficientemente sicura, data l'approssimazione con cui vennero effettuate le misure della pressione e della temperatura.

Infatti, perchè la densità balistica risulti approssimata fino ai millesimi, occorre che la temperatura venga misurata con l'approssimazione di $^2/_{10}$ di grado e la pressione con una approssimazione inferiore a $^1/_{10}$ di millimetro. Ora i risultati contenuti nelle tav. num. III' e III'' si possono ritenere approssimati con l'errore massimo di 1 grado centigrado nella temperatura e di 2 millimetri nella pressione.

Allo scopo di eliminare la piccola irregolarità riscontrata, si è ritenuto opportuno tradurre la tabella in una curva che venne tracciata scartando quei valori che apparivano meno attendibili.

È bene notare subito che lo scarto massimo riscontrato è di appena 3 millesimi e corrisponde all'altitudine di m. 7500.

In base alla curva così regolarizzata, si è compilata la tav. num IV, contenente i valori della densità balistica dell'aria per quote variabili di 100 in 100 metri dal livello del mare, fino all'altitudine di 20.000 metri.

Dall'esame delle differenze prime, fra i successivi valori di δ si deduce che la densità diminuisce gradatamente con l'aumentare dell'altitudine, seguendo, come appare anche meglio dall'andamento della curva disegnata nella fig. 24, una legge logaritmica.

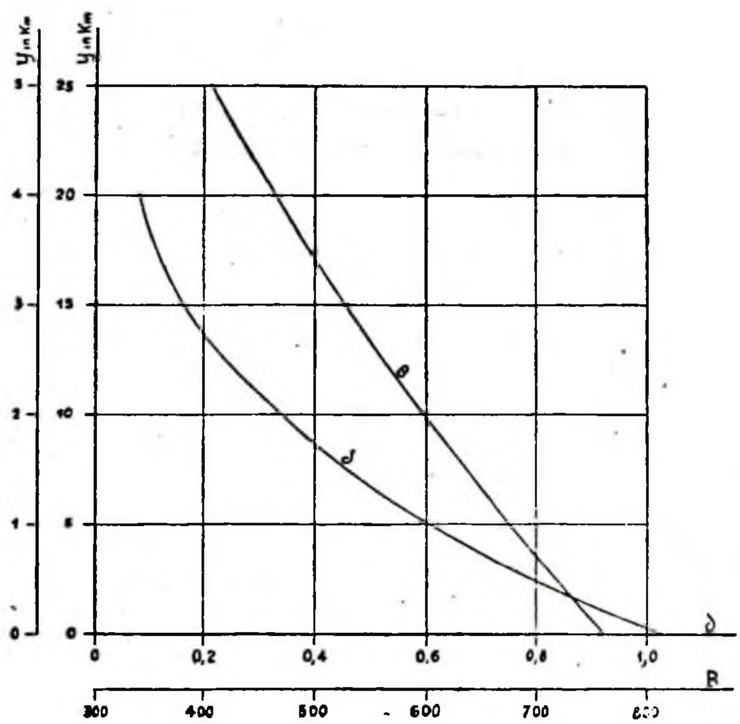


FIG. 24.

La curva (δ, y) risulta molto regolare e non presenta nessun punto di discontinuità, il che sta appunto ad indicare l'attendibilità dei dati con cui è stata costruita.

Dalla tav. num. IV si deduce che all'altitudine di circa 300 metri corrisponde il valore 1 della densità balistica dell'aria. Qualora si ritenesse opportuno di continuare, come per il passato, a far corrispondere la densità 1 alla quota di metri 130, basterebbe moltiplicare i valori contenuti nella tav. num. IV per il rapporto fra la densità corrispondente a 300 metri ed a 130 della nuova tabella, rapporto che risulta

$$\frac{300}{130} = \frac{1}{1.09} = 0,9314$$

La tav. num. IV dei valori medi della densità balistica dell'aria si estende fino a 20.000 metri; oltre tale limite non si posseggono dati sperimentali, dato però il comportamento della curva (δ, y) molto regolare si è creduto utile prolungare la tabella di altri 4000 metri.

14 – Rappresentazione analitica della densità dell'aria.

Come si è già accennato, la curva che rappresenta la tav. num. IV segue una legge logaritmica la quale può essere espressa dalla relazione:

$$\delta_y = \delta_0 \, e^{-ay} \text{ (Formula del Bessel)}$$

ove δ_0 e δ_y rappresentano rispettivamente la densità balistica alla quota 0 ed alla quota y; α è una quantità leggermente variabile che fa sussistere la relazione soprascritta ed e è la base dei logaritmi naturali.

Notando che

$$\delta'_y = -\alpha\delta_0 e^{-\alpha y}$$

si ricava

$$\frac{\delta'_y}{\delta_y} = -\alpha$$

mediante la quale abbiamo calcolato i valori di α per y variabile di 1000 in 1000 metri, servendoci dei dati contenuti nella tav. num. IV.

Nello specchio che segue sono indicati i risultati ottenuti:

y Km.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$10^6\,\alpha$	108	107	106	106	106	106	107	108	109	111	112	115

y Km.	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
$10^6\,\alpha$	118	121	124	126	128	129	131	132	132	132	132	131

Come appare esaminando i valori contenuti nella tabella, il campo di variabilità della α in confronto alle altitudini è abbastanza limitato. In particolare per quote comprese fra 0 e 9000 metri la α si mantiene pressocchè costante ed uguale al valore medio:

$$\alpha_m = 107 \cdot 10^{-6}$$

cosicchè la densità balistica dell'aria per altitudini comprese fra 0 e 9000 metri può essere determinata con sufficiente approssimazione mediante la legge:

$$\delta_y = 1{,}033 \cdot e^{-0{,}107\,y}$$

essendo y espresso in km.

A scopo di controllo si sono calcolati i valori della densità balistica dell'aria per altitudini variabili di 1000 in 1000 m. da 0 a 9000 metri, valori che nello specchio seguente sono posti a confronto con quelli dedotti dalla tav. num. IV.

y m.	1000	2000	3000	4000	5000	6000	7000	8000	9000
δ_y sperimentale	0,927	0,834	0,751	0,677	0,608	0,547	0,489	0,437	0,387
δ_y calcolato	0,928	0,834	0,749	0,673	0,605	0,544	0,488	0,439	0,394
$\Delta\delta$	— 0,001	—	+ 0,002	+ 0,004	+ 0,003	+ 0,003	+ 0,001	— 0,002	— 0,007

Come si vede, la formula suddetta riproduce i valori sperimentali della densità balistica dell'aria con un errore massimo di 7 millesimi corrispondente alla quota di 9000 metri.

Infine si è creduto opportuno riportare anche una tabella IV' dei valori della pressione media corrispondente ad altitudini variabili da 100 in 100 metri, limitandola però alla quota di metri 5.000.

Essa potrà venire utilizzata in modo particolare per la determinazione della tabella dei valori della velocità di combustione della miccia delle spolette alle varie pressioni ed altitudini.

Esaminando questa tavola numerica si deduce che la pressione diminuisce gradatamente con l'aumentare dell'altitudine, seguendo, come appare dall'andamento della curva disegnata nella fig. 24, una legge logaritmica.

Cfr. per il n. 13 la pubblicazione G. Bruno-F. Galanzino *La densità balistica dell'aria* - Rivista d'Artiglieria e genio, agosto 1926.

CAPITOLO III

LA RESISTENZA DELL'ARIA

1 – Premesse.

Il problema analitico e fisico del movimento del proietto nell'aria è tra i più importanti della balistica esterna.

Le nozioni che si avevano fino a pochi anni fa sull'argomento debbono essere aggiornate in base ai risultati delle esperienze dirette eseguite su proietti in moto, ed alle applicazioni alla balistica dei principi e metodi dell'aerodinamica.

Si tratta di esaminare quali azioni reciproche si sviluppano tra il proietto lanciato entro l'aria e l'aria stessa. Così enunciato, il problema si presenta talmente complesso da ritenersi, nella generalità dei casi, di impossibile soluzione.

Occorre perciò fare delle ipotesi semplificative, sia sul movimento del proietto, sia sull'aria quale fluido.

Tali ipotesi sono:

a) *quanto al proietto* si ammette, in una prima approssimazione, che l'asse del proietto giaccia sulla tangente alla traiettoria descritta dal centro di gravità, cioè la tangente e l'asse di figura del proietto formano tra loro un angolo δ nullo.

In tal caso la resistenza è diretta, cioè direttamente opposta al vettore velocità del baricentro, in conformità alla ipotesi fondamentale per la soluzione del problema balistico principale, che si verifica approssimativamente per δ piccolo, cioè per proietti stabili.

In seconda approssimazione, quando si consideri un apprezzabile valore di δ, la resistenza dell'aria diventa obliqua ed ammette oltre la componente tangenziale, (forza ritardatrice), anche una componente normale (forza deviatrice). In più, il moto di rotazione (proprio e giroscopico) del proietto, ed i fenomeni di attrito determinano, come sarà precisato in seguito, altre forze o coppie che, fino a qualche anno fa, si ritenevano trascurabili, mentre oggi, specialmente nel tiro di mortai e dei cannoni controaerei, si è riconosciuto che possono avere notevole influenza.

Vi è perciò luogo a considerare *una resistenza diretta* e una *resistenza obliqua*.

b) *quanto all'aria*, è necessario considerarla non come fluido ideale, ma dotato di una certa viscosità, dovuta agli attriti interni. La viscosità μ o, meglio la viscosità cinematica $\nu = \frac{\mu}{\delta}$ entra nel numero N di Reynolds

$$N = \frac{v \cdot l}{\nu}$$

dove l è una dimensione caratteristica del corpo, tale che l^2 sia proporzionale ad S. La considerazione della viscosità permette di rendersi ragione di certi fenomeni, come la formazione della scia che, come vedremo, sono stati accertati mediante opportuni dispositivi cinematografici.

Inoltre, ha grande importanza il grado di compressibilità dell'aria. Si può ritenere, con molta approssimazione, che l'aria si comporti come fluido incompressibile, cioè a densità δ costante, fino a tanto che la velocità v del proietto non raggiunga l'ordine di grandezza della velocità s del suono: cioè in tutti i casi per cui $\frac{v}{s} < 1$. Questa ipotesi ha interesse limitato in balistica rientrando in essa soltanto il tiro con mortai, e le regioni intorno al vertice della traiettoria.

In tutti gli altri casi, cioè per $\frac{v}{s} > 1$, l'aria si comporta come fluido compressibile, cioè, alle velocità ipersonore, la densità δ deve ritenersi variabile in conseguenza delle variazioni di pressione dovute alle dette velocità. Il rapporto $\frac{v}{s}$ è chiamato da alcuni numero di Mach. Dobbiamo dire che molti autori, i quali si sono occupati in questi ultimi anni, dal punto di vista teorico, di questo argomento, sono arrivati a conclusioni non del tutto concordi.

Riportiamo le seguenti conclusioni:

a) *Mémorial de l'Artillerie française Vol IV 3° fascicolo* 1925. *M. Esclangon: L'acustica dei cannoni e dei proiettili* (*pag.* 750).

Alle piccole velocità, le proprietà elastiche dell'aria sono preponderanti: alle grandi velocità, la viscosità ha una funzione importante e si traduce in un considerevole aumento degli effetti del proietto sugli strati d'aria che attraversa ».

b) *Cours de mécanique de l'Ecole Polytechnique di M. Painlevé* 1918-1919. *Applicazione al movimento vero di una sfera in un liquido* (*p.* 246).

L'esperienza dimostra che, per i fluidi ordinari, le forze di viscosità sono tanto più piccole quanto minore è la velocità. L'idrostatica dei fluidi viscosi coincide con quelle dei fluidi perfetti. Se le velocità del fluido sono molto piccole, l'influenza della viscosità è trascurabile: se sono notevoli, la viscosità si oppone allo scorrimento delle particelle le une sulle altre.

Questi due autori sono dunque d'accordo nell'attribuire alle viscosità una parte preponderante alle grandi velocità.

Per contro:

c) *Mémorial de l'Artillerie française. Vol. I, 2° fascic.* 1922. *Iouguet: Osservazioni sulle leggi di resistenza dei fluidi* (*pag.* 267).

« Risulta da un teorema di Helmholtz generalizzato che, nei momenti lenti dei fluidi, la viscosità e la conducibilità hanno una importanza considerevole, mentre la compressibilità ne ha poca; l'inverso avviene per i movimenti rapidi »,

d) *Mémorial de l'Artillerie française. Vol. I 2° fascic.* 1922. *Darrieus : Sopra una nuova causa di variazione di portata dovuta alla temperatura* (*pag.* 244).

« Il ragionamento tiene dunque conto dei fenomeni di viscosità preponderanti alle deboli velocità, come ci si può direttamente assicurare considerando che, nei limiti ammessi, il coefficiente di viscosità è proporzionale alla radice quadrata della temperatura assoluta: ciò è confermato dai noti risultati delle leggi ordinarie dell'Aerodinamica classica (Osborne-Reynolds) ».

e) *M. A. F. Langevin* (*stesso fascicolo*). *Note sulla resistenza dell'aria.*

Il Langevin esamina la nota del capitano Darrieus, sopra riportata, osservando ch'è esatta alle velocità dei proietti d'artiglieria ma che cessa di esserlo alle piccole velocità, quando gli effetti della viscosità non sono più trascurabili in rapporto agli effetti dovuti all'inerzia ed all'elasticità del mezzo ».

Sembra dunque esservi un disaccordo nelle conclusioni; può essere però che tale contraddizione sia più apparente che reale, in quanto, come osserva l'Ottenheimer, alcuni autori trascurano termini che altri fanno intervenire ».

Comunque, è certo che in balistica è il rapporto $\frac{v}{s}$ (numero di Mach) tra la velocità del proietto e quella del suono, e non il numero di Reynolds, che si tende a considerare.

In conseguenza, i fenomeni cui la resistenza dell'aria dà luogo, possono distinguersi in due grandi categorie, bene definite, sia dal punto di vista matematico che fisico.

Secondo il primo, la nota equazione di Bernoulli, che vale per il moto permanente di fluido incompressibile, cioè per $\delta = \text{cost} \left(\frac{v}{s} < 1\right)$

$$p + \frac{1}{2}\,\delta\, v^2 = p_1 = \text{costante} \qquad [1]$$

si trasforma, per δ variabile, $\left(\frac{v}{s} > 1\right)$, cioè per fluido compressibile nella

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1}\,\frac{p}{\delta} + \frac{1}{2}\, v^2 = \text{costante (equazione di S. Venant)}$$

Nei due casi però l'ipotesi fondamentale semplificativa è che si tratti di fluido perfetto, cioè non viscoso. Applicando l'equazione di S. Venant, per la determinazione della densità sul vertice dell'ogiva di un proietto che si muove in direzione del proprio asse con velocità v, e distinguendo con l'indice v i valori che si riferiscono al vertice, poichè, in corrispondenza del vertice la velocità relativa proietto–fluido si annulla, la [1] si può scrivere

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1}\,\frac{p}{\delta} + \frac{1}{2}\, v^2 = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\,\frac{p_v}{\delta_v} \qquad [2]$$

dalla quale, introducendo la velocità del suono $s = \sqrt{\gamma \frac{p}{\delta}}$ (Laplace) si ottiene (Burzio)

$$\frac{\delta_v}{\delta} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{s}\right)^2 + \cdots\cdots \qquad [3]$$

in cui appare esplicitamente il rapporto $\frac{v}{s}$ che ci interessa; perciò, quando v è una piccola frazione di s (ad es. per $\frac{v}{s} = 0{,}30$) si ha

$$\delta_v = 1{,}05\,\delta$$

cioè ancora può esser lecito, per questi piccoli valori di v, considerare l'aria come fluido incompressibile; mentre già per $v = s$ cioè alla velocità del suono, si ha

$$\delta_v = 1{,}5\,\delta$$

e quindi l'ipotesi di incompressibilità dell'aria non può più ritenersi valida.

Alle stesse conclusioni si giunge calcolando la pressione dinamica $q = p_0 - p$ al vertice ogivale; si ottiene allora la

$$q = \frac{\delta v^2}{2}\left[1 + \frac{1}{4}\left(\frac{v}{s}\right)^2 + \cdots\cdots\right] \quad \text{(Rayleigh)} \qquad [4]$$

Poichè $\frac{\delta v^2}{2}$ è il valore della pressione dinamica per fluido incompressibile, dalla (4) si deduce che anche per la pressione, l'ipotesi della incompressibilità non è più valida per le velocità prossime a quella del suono, ed a maggior ragione per le velocità balistiche.

Dal punto di vista fisico, una rappresentazione schematica dei fenomeni è la seguente, ove si assimili il proietto ad un'asta rigida.

1) *fluido incompressibile*. La velocità v del proietto è inferiore a quella del suono; sia per ipotesi $v = 166$ m/s. Il proietto è schematizzato nell'asta rigida AP e si muove nella direzione BA (nell'istante che si considera, la punta del proietto è in A); l'urto con l'aria esterna dà luogo ad un onda sferica (onda di bocca), il cui raggio è inizialmente nullo. In un tempo t molto breve ed antecedente, la punta del proietto era in B, anche allora l'urto con l'aria esterna ha dato luogo ad una onda sferica, che si è propagata per la distanza $t \cdot s$, dove s è la velocità del suono (332 m/s).

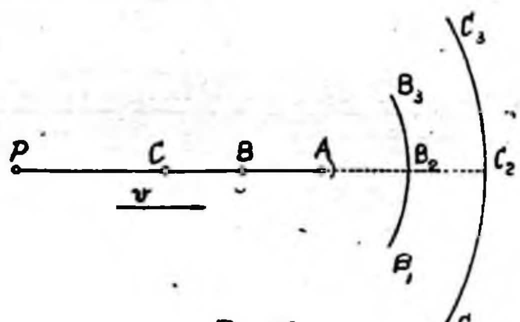


FIG. 26.

Poichè lo spazio AB è stato pure percorso nel tempo t alla velocità $v = 166$, ne segue che il raggio d'onda $BB_2 = t \cdot s$ è il doppio del tratto BA. Nel tempo antecedente $2t$ la punta del proietto era in C, essendo $CA = 2 \cdot BA = 2t \cdot v = 2 \cdot t\,166$. L'onda sferica corrispondente è $C_1C_2C_3$ di raggio $CC_2 = 2\,CA = 4\,BA = 4\,t \cdot 166$.

Si riconosce cioè che in questo caso, le onde sferiche precedono il moto del proietto, non s'intersecano, restano le une interne alle altre.

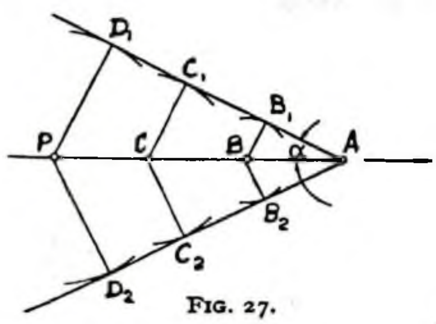


FIG. 27.

2) *fluido compressibile*. La velocità del proietto è superiore a quella del suono; sia per ipotesi $v = 664$ m/s. Il proietto è schematizzato nell'asta rigida AP: nell'istante che si considera la punta del proietto è in A. In un tempo brevissimo t antecedente, la punta del proietto era in B, e si era generata l'onda di bocca BB_1 propagantesi con la velocità del suono e cioè tale che

$$BB_1 = BB_2 = t \cdot s = t\,332 \text{ m.}$$

e cioè la metà del tratto $BA = t \cdot v = t \cdot 664$ m., che nello stesso tempo è stato percorso dal proietto. Nel tempo antecedente $2t$ la punta del proietto era in C, la corrispondente onda sferica ha raggio

$$CC_1 = CC_2 = 2t \cdot s = 2t \cdot 332 \text{ m.}$$

mentre nello stesso tempo $2t$ il percorso CA del proietto vale

$$2t \cdot v = 2t \cdot 664 \text{ m}; \quad \text{si ha quindi} \quad \frac{BB_1}{CC_1} = \frac{BB_2}{CC_2} = \frac{BA}{CA}$$

cioè i punti $AB_1C_1 \ldots\ldots AB_2C_2 \ldots\ldots$ stanno su una linea retta, ossia la superficie inviluppo delle singole onde elementari, è un cono circolare, la sui semiapertura conica α è tale che

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{s}{v} = \frac{\text{velocità del suono}}{\text{velocità del proietto}}$$

Questa è l'equazione di Mach, che fornisce la semiapertura dell'onda balistica, (cono di Mach); essa è stata sperimentalmente verificata e permette di ricavare, dalle fotografie del proietto in moto, la sua velocità.

Fin'ora il proietto è stato schematizzato come asta rigida. Intorno al proietto reale, lanciato con velocità superiore a quella del suono, le fotografie che si riportano, (fig. 28-29-30), mostrano chiaramente le perturbazioni atmosferiche che si osservano, per tre casi considerati e cioè:

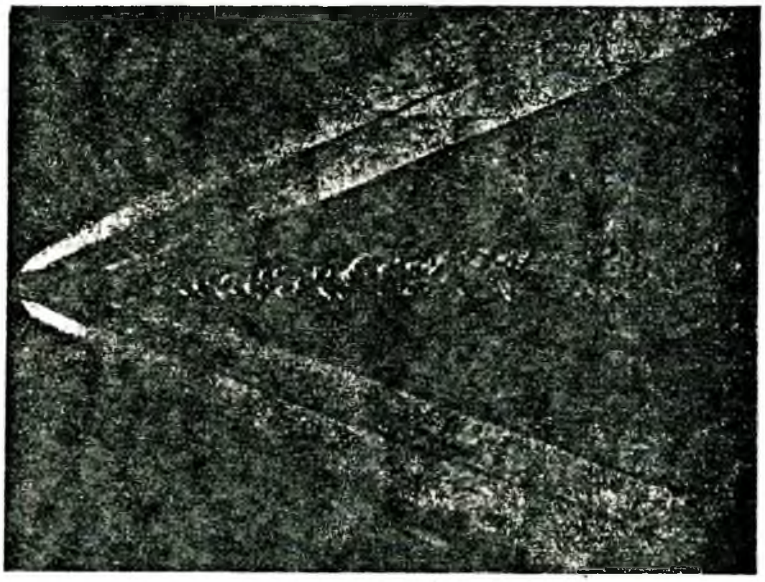


Fig. 28.

1) proietto troncato normalmente in ogiva;

2) proietto con ogiva arrotondata;

3) proietto con ogiva a punta.

In tutti i tre casi, l'onda più marcata è quella di testa; in relazione alla forma assunta dalla parte anteriore del proietto, l'apertura iniziale dell'onda è più o meno accentuata, però, ad una distanza di 6-8 volte la lunghezza del proietto a partire dal fondello, il contorno d'onda diviene rettilineo. Nelle regioni molto vicine alla ogiva, l'onda si sposta con la velocità del proietto, ma già a pochi centimetri a valle, la velocità di propagazione dell'onda è ridotta a quella del suono. In corrispondenza a queste variazioni di velocità, stanno le pressioni che, mentre raggiungono il valore di qualche atmosfera nelle immediate vicinanze della parte anteriore del proietto, si abbassano poi approssimatamente a quella atmosferica.

Le perturbazioni intorno alla regione del fondello, risultano assai complesse. Si distinguono: uno spazio rarefatto immediatamente dietro il fondello; l'onda di coda e la scia vorticosa.

Lo spazio rarefatto, o depressione, risulta tanto più grande quanto maggiore è la velocità, esso occupa una regione pressochè troncoconica che tende a divenire cilindrica per le velocità prossime a quella del suono.

Sulla formazione dell'onda di coda, il Cranz osserva che essa cammina parallela all'onda di testa partendo subito dopo lo spazio rarefatto conico ; perciò anch'essa, nella regione ove la traccia è rettilinea, si sposta con la velocità del suono.

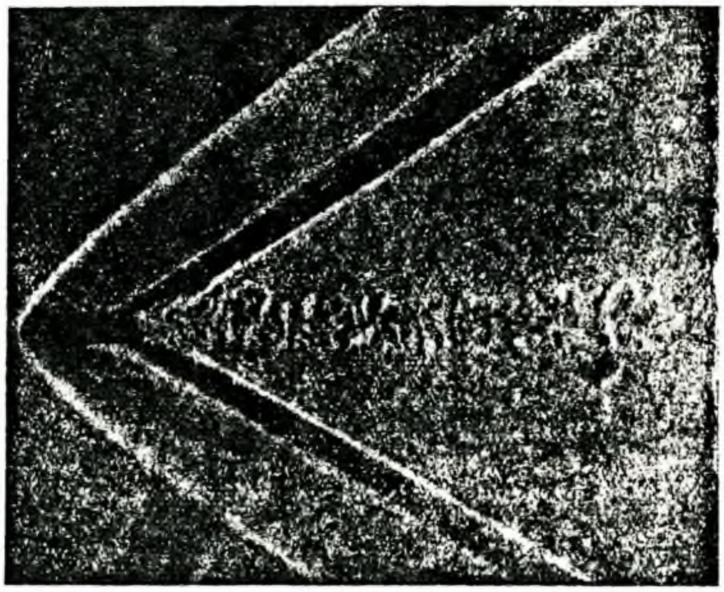


Fig. 29.

Nei riguardi della scia, essa appare vorticosa ; i vortici sono dovuti all'aria circostante che penetra violentemente verso l'asse del proietto; tali vortici tendono a rimanere stazionari rispetto all'asse del proietto, e svaniscono ad una certa distanza a valle. I vortici assumerebbero la forma di anelli vorticosi quando l'afflusso dell'aria fosse perfettamente simmetrico rispetto all' asse del proietto; nella maggior parte dei casi ciò non avviene, e la scia appare come costituita di una serie di vortici indipendenti uno dall'altro, ed irregolarmente distribuiti.

I fenomeni acustici, che accompagnano il moto del proietto, sono fra l'altro determinati dalla variazione oscillatoria della pressione collegata a tale moto vorticoso periodico dietro il fondello.

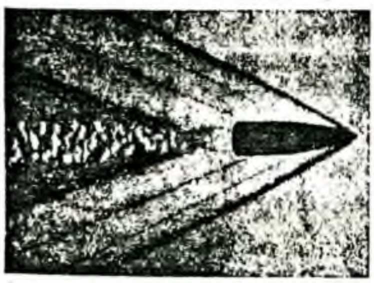


Fig. 30.

Anche il corpo del proietto appare accompagnato nel suo movimento da onde a guisa di solchi tracciati nell'atmosfera circostante, che partono là ove si verificano discontinuità nelle superficie; tutte queste onde presentano sensibilmente, la stessa apertura del cono asintotico $\frac{v}{s}$ riscontrata per l'onda di testa.

La resistenza dovuta all'onda di testa, che si verifica dunque per le velocità ipersonore, cresce con la velocità e risulta sensibilmente proporzionale al suo quadrato, il rapporto tra questa resistenza e v^2 tende verso un certo limite, che dipende dalla forma del proietto.

La resistenza dovuta invece alle perturbazioni delle regioni intorno al fondello, dipende in modo prevalente dalla forma della parte posteriore del proietto; cresce molto rapidamente fino a quando la velocità è prossima a quella del suono; quindi si avvicina sempre più ad un limite superiore, che corrisponderebbe alla formazione del vuoto assoluto dietro il proietto.

Quindi il rapporto di questa resistenza al quadrato della velocità tende a zero quando la velocità aumenta indefinitamente.

Sono state riscontrate ancora ; una resistenza di attrito, in quanto non sia già compresa nella resistenza d'onda; per le normali forme di proietti questa resistenza sembra relativamente piccola.

Ed infine, poichè l'asse del proietto è in generale inclinato rispetto alla direzione del moto del centro di gravità, questo fatto dà luogo a reazioni secondarie che si complicano ancora per effetto del movimento di rotazione del proietto.

In definitiva, può dirsi che mentre per le grandi velocità la forma della parte anteriore del proietto ha una influenza preponderante sulla resistenza, per le velocità intorno a quella del suono, tale influenza dipende invece dalla forma della parte posteriore (fondello).

2 – Resistenza diretta – Leggi teoriche.

a) Generalità.

Molti studiosi hanno tentato, nel corso del tempo, di dare espressioni generali teoriche atte a rappresentare la resistenza dell'aria.

Dopo Newton, il quale considerò tale resistenza unicamente quale resistenza meccanica, P. Vielle, Lorenz, Sommerfeld, Prandtl, diedero espressioni partendo da ipotesi varie, di cui diremo brevemente.

Le ricerche teoriche più recenti, e quelle dell'avvenire, si basano e dovranno senza dubbio basarsi sulle teorie della dinamica dei gas (Cranz, Ergänzungsband 1936); ma fino ad ora non si sono raggiunti risultati definitivi, perchè quelle teorie si sviluppano nella ipotesi di assenza di attrito e di vortici, mentre sappiamo che in realtà forze di attrito e movimenti vorticosi accompagnano il proietto nel suo moto. Però, come osserva il Burzio, le nuove ricerche tengono conto, in misura molto maggiore che non le antiche, della vera natura dei fenomeni aerodinamici intorno al proietto, e pervengono ad una interpretazione e spiegazione dei dati sperimentali che, se non ancora quantitativamente, è già qualitativamente soddisfacente ».

In mancanza di una legge di resistenza teorica a carattere generale, si deve ricorrere, in balistica, ai metodi sperimentali e cioè le misure alle gallerie del vento, e quelle rilevate direttamente sul proietto in moto.

Sia dell'uno che dell'altro metodo diremo a suo tempo ; per ora osserviamo che, pur essendosi, in questi ultimi anni, rapidamente progredito nella potenzialità ed efficienza delle gallerie del vento (con l'impianto della galleria ipersonora di Guidonia, della R. Aeronautica, si raggiunge il numero di Mach 2,13 cioè $\sim$ 700 m/s, mentre nelle prime gallerie, che risalgono a circa 20 anni fa, si era sperimentato fino a 35 $\div$ 50 m/s ed il Burzio, col metodo del proietto rotante, ottenne nel 1929 i 210 m/s e nel 1931 i 360 m/s), oggi si incontrano velocità balistiche a 1600 m/s: in tali casi non resta che la misura diretta.

b) Ipotesi e formula di Newton.

Newton, basandosi sui risultati ottenuti nelle esperienze eseguite nella Torre di S. Paolo a Londra, formulò l'ipotesi che la resistenza dell'aria al moto dei corpi provenisse dall'inerzia delle molecole aeree che, urtate, assumevano una velocità

stimata secondo la normale all'elemento urtante, uguale a quella dell'elemento stesso, e quindi cessavano d'agire. Se si indica con Δ il peso specifico dell'aria, con ω l'area dell'elemento di superficie in moto, con $v \cdot \cos i$ la velocità stimata secondo la normale all'elemento, essendo i l'angolo che la v (fig. 31) forma con la normale all'elemento, la massa d'aria urtata, allorchè l'elemento si sposta di ds, sarà $\frac{\Delta}{g}\,\omega \cos i\, ds$ e la forza viva acquistata $\frac{\Delta}{g}\,\omega\, ds \cos i\,(v \cos i)^2$, la quale è uguale al lavoro elementare compiuto dalla resistenza ρ;

$$\rho\, ds \cos i = \frac{\Delta}{2g}\,\omega\, ds \cos i\,(v \cos i)^2$$

$$\rho = \frac{\Delta}{2g}\,\omega\,(v \cos i)^2 = \frac{\Delta\omega}{2g}\, v^2 \cos^2 i$$

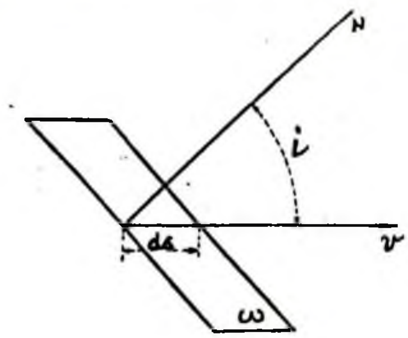


FIG. 31.

cioè *la resistenza sopra un elemento piano è uguale al peso d'un prisma d'aria avente per base l'elemento stesso e per altezza l'altezza dovuta alla velocità stimata secondo la normale.*

c) RESISTENZA SOPRA UNA SUPERFICIE DI RIVOLUZIONE CHE SI MUOVE NELLA DIREZIONE DEL SUO ASSE.

Per determinare la resistenza incontrata da un proietto ogivale che muove nell'aria nella direzione del proprio asse, consideriamo la sezione meridiana del proietto stesso (fig. 32).

La resistenza incontrata da un elemento infinitesimo ω è data da $\frac{\Delta\omega}{2g}\, v^2 \cos^2 i$ che, decomposta in due, una normale all'asse (che si elimina con quella dell'elemento simmetrico), ed una nella direzione dell'asse risulta:

$$\frac{\Delta\omega}{2g}\, v^2 \cos^2 i$$

Sommando tutte le resistenze relative agli elementi compresi fra due paralleli di raggio x ed altezza ds sarà

$$\frac{\pi\Delta}{g}\, v^2 \cos^3 i\, x\, ds$$

ma

$$\cos i = \frac{dx}{ds}$$

cioè

$$\cos i = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1}}$$

quindi la resistenza sarà

$$\frac{\pi\Delta}{g}\, v^2 x \frac{dx}{\cos i} \cos^3 i = \frac{\pi\Delta}{g}\, v^2 \frac{x\, dx}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1}$$

Facendo la somma di tutti questi elementi, per dx variabile da o al valore massimo dell'altezza ogivale si ha

$$p = \frac{\pi \Delta}{g} v^2 \int \frac{x\,dx}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Per poter integrare questa relazione occorre conoscere l'equazione della curva generatrice dell'ogiva. Se, come avviene nella generalità dei casi, questa è un arco di cerchio, l'equazione è data da

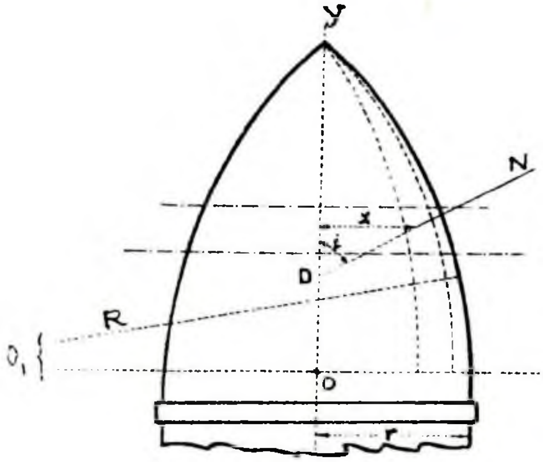


FIG. 32.

$$R^2 = y^2 + (R - r + x)^2$$

da cui

$$2\,y\,dy + 2\,(R - r + x)\,dx = 0$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{(R - r + x)^2}{R^2 - (R - r + x)^2}$$

e sostituendo nell' $\int$

$$\int_0^r \frac{x\,dx}{1 + \frac{(R - r + x)^2}{R^2 - (R - r + x)^2}} =$$

$$= \int_0^r \frac{x\,dx\,[R^2 - (R - r + x)^2]}{R^2} =$$

$$= \frac{1}{R^2} \int_0^r (R^2 - R^2 - r^2 - x^2 + 2\,R\,r - 2\,R\,x + 2\,rx)\,x\,dx =$$

$$= \frac{1}{R^2} \Big]_0^r - r^2 \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + 2\,R\,r\,\frac{x^2}{2} - 2\,\frac{R\,x^3}{3} + 2\,\frac{rx^3}{3} \Big|_0^r =$$

$$= \frac{1}{R^2} \left(- \frac{r^4}{2} - \frac{r^4}{4} + 2\,\frac{R\,r^3}{2} - 2\,\frac{R\,r^3}{3} + \frac{2\,r^4}{3} \right) =$$

$$= \frac{1}{R^2} \left\{ \frac{8\,r^4 - 3\,r^4}{12} + \frac{6\,R\,r^3 - 4\,R\,r^3}{6} - \frac{r^4}{2} \right\} =$$

$$= \frac{1}{R^2} \left(\frac{5\,r^4}{12} + 4\,\frac{R\,r^3}{12} - \frac{r^4}{2} \right) = \frac{1}{R^2} \left(\frac{- r^4 + 4\,R\,r^3}{12} \right) = \frac{r^3}{12\,R} \left(4 - \frac{r}{R} \right)$$

Generalmente il raggio ogivale si esprime in calibri per cui ponendo $R = rn$ sarà:

$$p = \frac{\Delta \pi}{g} v^2 \frac{2^3}{12\,R} \left(4 - \frac{r}{R} \right) = \frac{\Delta \pi}{g} v^2 \frac{r^3}{12\,nr} \left(4 - \frac{r}{nr} \right) = \frac{\Delta \pi}{g} v^2 \frac{r^2}{12\,n} \left(4 - \frac{1}{n} \right) =$$

$$= \frac{\Delta \pi}{g} v^2 \frac{r^2}{12\,n^2} (4\,n - 1)$$

Nel proietto emisferico $n = 1$ quindi

$$p = \frac{\Delta \pi}{g} v^2 r^2 \frac{1}{4} = \frac{\pi\,r^2}{4} \frac{\Delta}{g} v^2$$

cioè: la resistenza è la metà di quella che incontrerebbe un proietto cilindrico muoventesi nella direzione del proprio asse. Infatti in questo caso

$$p = \pi r^2 \frac{\Delta}{2g} v^2$$

È questa formula che Newton dimostrò sperimentalmente misurando i tempi di caduta di palloni di vetro lanciati dalla Torre di S. Paolo di Londra. Essa si dimostrò sufficientemente approssimata per i calcoli del fisico inglese, date le piccole velocità di caduta sperimentate

d) Altre teorie.

1) *Vieille P.* «*Comptes rendus de l'Académie des sciences* 130 *pag.* 235-1900».

Basandosi sulla teoria di Riemann, Vieille stabilisce una legge di resistenza riferita ad un proietto ad ogiva troncata, ammettendo che almeno nelle parti anteriori, l'onda di testa sia piana.

La relazione di Vieille tra la pressione p dell'aria e la velocità v del proietto è la seguente:

$$v = \sqrt{\frac{g \cdot p_0}{2\Delta}\left[2\gamma + (\gamma + 1)\frac{p - p_0}{p_0}\right]}$$

nella quale Δ è il peso dell'aria avviluppante in kg. per metro cubo, p_0 la pressione atmosferica in kg. mq., p la pressione in kg. per mq. prodotta dal movimento del proietto, γ il rapporto dei calori specifici 1,41 e $g = 9{,}81$ l'accelerazione della gravità.

Così ad esempio per $p_0 = 10.333$ kg/mq. $\Delta = 1.206$ kg/mq. $p = 15{,}64$ atm. $=$ $= 15{,}64 \times 10.333$ kg/mq. risulta $v = 1200$ m/s. Nell'unita tabella riportiamo i valori della resistenza calcolati e rilevati da Vieille, nonchè, per le velocità oltre i 1200 m/s, le temperature relative.

Vieille considera, come si vede, il caso dell'accensione dei meteoriti.

Velocità in V m/s	Resistenza in atm. $\left(\frac{p}{p_0}\right)$		Temperatura in gradi Cels.
	calcolata	osservata	
400	1,58	1,25	—
800	6,85	6,23	—
1200	15,64	15,01	680
2000	43,80	—	1741
4000	176,60	—	7751
10000	1098,00	—	48490

2) *Lorenz H.* « *Beitrag z. Theor d. Schiffswiderstands Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure* (*Z. V. d. I.*) – (*pag.* 1824-1907) ».

In questo lavoro, Lorenz studia matematicamente le circostanze che accompagnano lo spostamento d'aria intorno al proietto in moto. La resistenza ρ è data dalla relazione

$$\rho = K_1 \pi r^2 v^2 + K_2 l v + \frac{K_3 r^2 \pi v^4 + K_4 l v^3}{\sqrt{(s^2 - v^2)^2 + K_5 l^2 v^2}}$$

nella quale espressione $K_1 K_2 K_3 K_4 K_5$ sono delle costanti, di cui $K_1 K_3$ dipendono dalla forma del proietto; le altre dipendono dalla forma e dalle condizioni della superficie esterna del proietto, l è la lunghezza del proietto la cui sezione retta trasversale ha per raggio r; s è la velocità del suono; v la velocità del proietto.

Nel 1916 Lorenz (Ballistik: die mechanischen Grundlagen der Lehre vom Schuss. Z. V. d. I. pag. 625 - 1916) ha dato una espressione più semplice della sua legge; la resistenza ρ si compone di una parte ρ_1, dovuta alla formazione delle onde, e di un'altra parte ρ_2, dovuta all'attrito ed alla formazione dei vortici

$$\frac{\rho_1}{v^2} = K \pi r^2 \left(1 + \frac{A v^2}{(v^2 - s^2)^2 + c^2 v^2} \right); \quad \frac{\rho_2}{v^2} = \frac{\mu l}{v}$$

dove $K\, \mu\, A\, c$ sono costanti empiriche; $K\, \mu\, A$ dipendono dalla forma e dalle condizioni della superficie esterna del proietto; c è un fattore di smorzamento e gli altri simboli hanno i noti significati.

Falkenhagen e Sangewald hanno poi effettuato il calcolo di dette costanti valendosi delle tabelle di resistenza dell'aria di O. von Eberhard. Il Cranz nota che, per quanto la espressione di Lorenz non valga a rappresentare pienamente i risultati sperimentali, essa può servire, meglio di ogni altra, allo sviluppo avvenire della balistica. Si osservi per ultimo che in questa espressione, come in quella di Vieille e di Sommerfeld, (che segue più avanti), per $v = \infty$, si ha lim. $\frac{\rho}{v^2}$ = costante, cioè per grandi valori di v è nuovamente proporzionale a v^2, però con un coefficiente di proporzionalità che non è più quello relativo alle piccole velocità.

3) *Sommerfeld A.* « *Theorie des Kreisels* (*Leipzig. Teubner* 1910). *Theil IV Abschnitt C.* (*Ballistik*) ».

A. Sommerfeld fa l'ipotesi che la resistenza ρ sia costituita di una resistenza ρ_1 di attrito (in senso generale), che considera, come Newton, proporzionale a v^2, e della resistenza d'onda δ^2, per la quale egli dà una espressione, servendosi della analogia con campi elettromagnetici. Indicando con s la velocità del suono, si ha, per

$$v < s \; \rho = \rho_1 = a v^2; \quad \text{per} \quad v > s\,; \quad \rho = \rho_1 + \rho_2 = a_1 v^2 + A \left(1 - \frac{s^2}{v^2} \right)$$

4) *Prandtl L.* « *Handwörterbuch der Natur wissenschaften Bd.* 4 1913 *Artikel* (*Gasbewegung*) ».

L. Prandtl calcola la pressione dinamica che si produce in aria di densità δ, davanti ad un corpo in movimento dotato di velocità v; quando $v > s$, l'aumento di pressione si compone di due parti, una variabile nell'onda di testa, ed una costante, dall'onda di testa fino al rigurgito.

Questo aumento di pressione è proporzionale a v^2 non soltanto per le piccole velocità, ma anche per le grandi velocità, fra questi limiti, aumenta più rapidamente verso le velocità elevate.

Il Prandtl dà per la resistenza ρ l'espressione

$$\rho = \psi\, a\, \delta\, v^2$$

dove ψ è una funzione di $\frac{v}{s}$; a la sezione del proietto.

L'aumento di temperatura davanti al proietto, si calcola, secondo Prandtl, con $\frac{v}{2 \cdot C_p}$ (C_p in unità di lavoro vale $0{,}238 \cdot 427 \cdot 9{,}81$); ad esempio, per $v = 800$ m/s, tale aumento sarebbe di $\sim 300^{\circ}$.

3 – Resistenza diretta – Formule empiriche.

a) ESPRESSIONE SPERIMENTALE DELLA RESISTENZA – RITARDAZIONE.

Come abbiamo rilevato, una completa espressione analitica della resistenza dell'aria non esiste tutt'ora.

Confrontando fra loro numerosissimi risultati sperimentali, si sono potute enunciare le seguenti leggi, che devono ritenersi soltanto come approssimate:

1) *per un dato proietto, che si muova con una determinata velocità*, la resistenza è proporzionale, secondo un coefficiente numerico k, alla densità balistica dell'aria δ;

2) *per proietti di eguale forma e di calibri differenti, che si muovono in un mezzo di data densità*, la resistenza è proporzionale all'area della sezione trasversale, cioè al quadrato del calibro a del proietto.

3) *per un determinato proietto che si muove in un mezzo di data densità*, la resistenza è proporzionale ad una funzione sperimentale $\Phi\,(v)$ della velocità;

4) *per proietti dello stesso peso e dello stesso calibro che si muovono in un mezzo di egual densità*, la resistenza dipende dalla forma del proietto, rappresentata da un coefficente i (coefficente di forma).

In base a queste leggi, la resistenza si può esprimere con una relazione del tipo

$$\rho = K\, \delta\, a^2\, i\, \Phi\,(v)$$

L'espressione è simile a quella dedotta con la teoria di Newton, da cui differisce per il termine relativo alla $\Phi\,(v)$.

Nei problemi di balistica esterna importa considerare, anzichè la resistenza incontrata dal proietto, la corrispondente ritardazione, cioè la resistenza riferita all'unità di massa, che viene indicata con $f\,(v)$; si avrà quindi

$$f\,(v) = \frac{\rho\, g}{p} = K\, g\, \delta \frac{a^2}{p}\, i\, \Phi\,(v) =$$

$$= \frac{K\, g}{1000}\, \delta\, \frac{1000\, a^2}{p}\, i\, \Phi\,(v)$$

e ponendo

$$F\,(v) = \frac{K\, g}{1000} \cdot \Phi\,(v)\,; \qquad C = \frac{p}{1000\, a^2}$$

si ha

$$f(v) = \frac{\delta \cdot i}{C} F(v)$$

dove C è un fattore dipendente dal calibro e dal peso del proietto, e che si chiama coefficente balistico;

$F(v)$ è una funzione della velocità alla quale è proporzionale la resistenza dell'aria e che dicesi funzione resistente.

Al limite, per $i = 0$, si avrebbe $f(v) = 0$, cioè la ritardazione sarebbe nulla e la traiettoria dell'aria coinciderebbe con quella del vuoto.

Quanto all'approssimazione con cui queste leggi sono formulate, notiamo:

ipotesi 1ª) essa non è stata contestata mai, ma nemmeno confermata sperimentalmente in modo completo;

ipotesi 2ª) si afferma che la resistenza, sulla unità di superficie della sezione trasversale del proietto, per eguale densità dell'aria, forma e velocità, è sempre la stessa, sia che si tratti di un proietto di piccolo calibro o di grosso calibro.

Ciò non sarebbe confermato dalle nuove ricerche teoriche e sperimentali. Già il Didion era pervenuto alla conclusione che la resistenza dell'aria riferita all'unità di sezione di un proietto di piccolo calibro è, a parità delle altre circostanze, maggiore che per proietti di grande calibro; ciò sarebbe confermato dalle esperienze di Krupp del 1912, e dalla stessa teoria di Lorenz.

D'altra parte Dupnis, in base ad esperienze sistematiche eseguite a Gâvre, di cui daremo in seguito notizia, concluderebbe che si può con tutta sicurezza applicare la legge del quadrato del calibro per le previsioni balistiche.

Infine dalle ipotesi 3ª) e 4ª) si deduce che a parità di densità e di calibro, ma per diverse forme di proietto, la funzione resistente $F(v)$ risulterebbe moltiplicata per il coefficente variabile i. Ora sembra che nella $F(v)$ sia già contenuta implicitamente la forma del proietto, per cui non sarebbe così netta la separazione degli effetti della forma, da quelli della velocità, mediante il prodotto $i\,F(v)$.

Sia della $F(v)$ che del coefficente i si dirà più estesamente ai seguenti punti *c*) *g*).

b) Il coefficente balistico.

Si è visto che, nella espressione della ritardazione $f(v)$, entra il coefficente balistico $C = \frac{p}{1000\,a^2}$; dalla stessa si rileva che un proietto conserva tanto meglio la sua velocità, quanto più piccolo è il coefficente di forma i e quanto più grande è il coefficente balistico.

È necessario perciò rendere minimo i e massimo C. Del coefficente di forma i diremo più avanti.

Per aumentare C, quando è assegnato un certo limite al peso del proietto, si diminuisce il calibro; quando è dato il calibro, si aumenta il peso del proietto, o coll'allungarlo, o scegliendo un metallo più pesante, o diminuendo i vuoti interni.

Aumentare il peso del proietto, o diminuirne il calibro, sono due operazioni che conducono allo stesso risultato, cioè ad accrescere il peso relativo all'unità di superficie della sezione retta del proietto.

Si osserva che, con le unità adottate, il coefficente C differiva poco, per i proietti di forma antiquata, dal calibro del proietto espresso in dm.

Riportiamo i coefficenti balistici dei proietti in uso nelle bocche da fuoco in servizio. (Tav. num. V).

c) La funzione resistente $F(v)$.

Intendiamo riferirci in particolare alla funzione resistente $F(v)$ di Siacci che, nel 1896, prese ad esaminare sistematicamente, mediante il tiro, l'influenza della resistenza dell'aria sui proietti.

Basandosi sulle esperienze fatte fino a quell'epoca, (Mayeswski, Bashfort, Krupp, Hojel), riconobbe che la curva rappresentante la variazione di $F(v)$ con la v, aveva forma prossima a quella di un iperbole, e riproduceva, col coefficente di forma $i = 1$, le esperienze russe e inglesi, e con $i = 0{,}896$ quelle tedesche ed olandesi.

Tale curva (fig. 33) presenta un punto singolare (velocità critica), in prossimità di $v = 340$ m/s, oltre il quale cambia nettamente il suo andamento.

Ciò era da prevedere e si spiega, perchè detto punto singolare corrisponde, come abbiamo visto, al formarsi dell'onda balistica, non appena il valore di v supera la velocità del suono, la quale è dunque velocità critica delle $F(v)$.

Per $v < 340$, la $F(v)$ risulta sensibilmente proporzionale al quadrato di v, e per valori $v < 240$ si può ritenere che la resistenza sia proporzionale al quadrato della velocità, secondo la legge di Newton, quindi della forma

$$F(v) = b_2 v^2$$

Per $v > 520$ m/s, la curva si stende in una retta (retta di Chapel), di equazione

$$F(v) = 0{,}365\,(v - 263)$$

Per $240 \text{ m/s} < v < 520 \text{ m/s}$, l'espressione analitica di $F(v)$ è assai complessa Siacci dà la seguente espressione fondamentale

$$F(v) = 0{,}2002\,v - 48{,}05 + \sqrt{(0{,}1648v - 47{,}95)^2 + 9{,}6} + \frac{0{,}0442\,(v - 300)\cdot v}{371 + \left(\frac{v}{200}\right)^{10}}$$

In questa espressione, l'ultimo termine del 2° membro, che è positivo per $v > 300$ m/s, si annulla per le alte velocità; la formula senza l'ultimo termine, rappresenta un iperbole, la cui equazione può anche scriversi sotto la forma

$$\left[F(v) - 0{,}365\,v + 96\right]\left[F(v) - 0{,}0354\,v + 0{,}10\right] = 9{,}6$$

Tale iperbole, e quindi anche la curva $F(v)$ fondamentale, ha per asintoto la retta di Chapel sopra definita.

Seguendo il procedimento indicato, Siacci diede una tabella dei valori di $F(v)$ corrispondenti ai valori crescenti di v (Tav. num. VI per valori di v da 0 a 1500 m/s), che ancora oggi costituisce la base dei calcoli di balistica esterna.

I valori oltre 500 m/s sono ottenuti per estrapolazione.

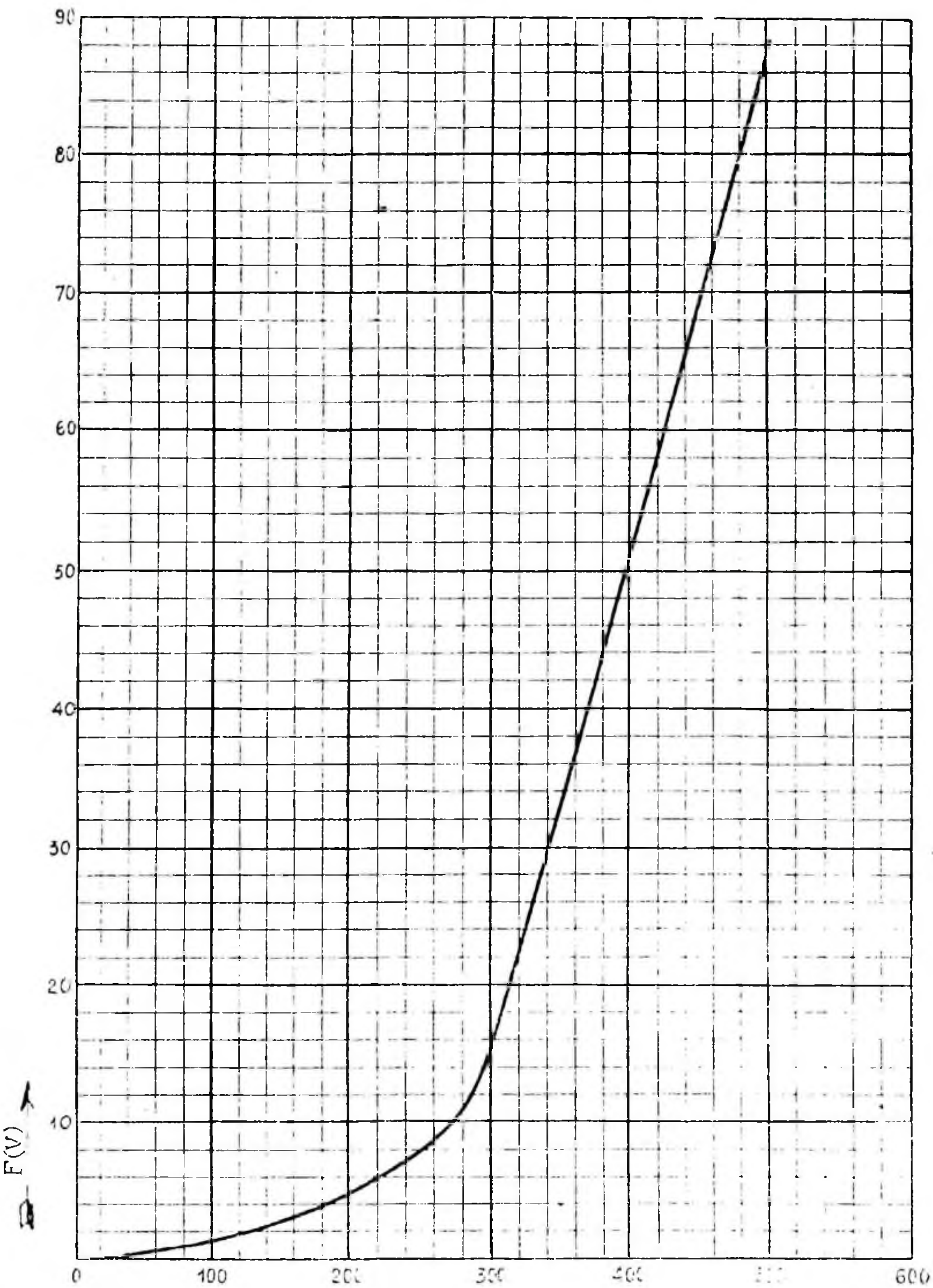


Fig 33.

I valori della funzione resistente si deducono sperimentalmente applicando il principio delle forze vive

$$\rho (X_2 - X_1) = \frac{p}{g} \frac{v_1^2 - v_2^2}{2} = \delta \frac{a^2}{g} i F(v)(X_2 - X_1)$$

su un breve tratto di traiettoria molto tesa, di lunghezza $(X_2 X_1)$ ai cui estremi la velocità del proietto sono rispettivamente v_2 e v_1.

Dall'esperienza si può quindi rendere esplicito il valore del prodotto $i\, F\,(v)$, non la $F\,(v)$, quando sia noto dall'esperienza il valore di v; i, come già è stato definito, rappresenta il coefficente di forma sperimentale del proietto.

Il diminuito valore di i, per i proietti moderni, in confronto di quelli cui la $F\,(v)$ di Siacci si riferisce ($i = 1$, $i = 0{,}896$), mette in evidenza i perfezionamenti apportati dalla tecnica; si può infatti osservare che, al limite, per $i = 0$, il valore della ritardazione $f\,(v)$ sarebbe nullo, sicchè la traiettoria nell'aria coinciderebbe con quella del vuoto.

Su questo argomento, il Cranz osserva che, per ottenere una espressione di $F\,(v)$ che rispecchi la variazione di resistenza con la velocità, si dovrebbero considerare costanti tutti gli altri parametri (peso e lunghezza del proietto, forma dell'ogiva, rigatura, ecc.) queste condizioni non si sono verificate nelle esperienze del passato, ed anzi alcuni balistici si vanterebbero di aver impiegato, per la determinazione di $F\,(v)$, proietti dei più diversi calibri e lunghezze.

Non è stata neppure tenuta nel debito conto, continua il Cranz, l'influenza del secondo problema balistico sul primo: ed infine, il tratto di traiettoria che ha servito per stabilire la legge della resistenza, venne spesso scelto così grande, che non si può più parlare, nè di traiettoria rettilinea, nè di invariabilità della ρ nel tratto considerato.

Il Iachino (Teoria dei cannoni - Hoepli 1935) così si esprime : « Meglio sarebbe svincolare i calcoli dal diagramma di resistenza tipo, e considerare una curva sperimentale della funzione resistent;e per ogni tipo di proietto togliere cioè il coefficente di forma i dal ruolo di correttore costante ».

Su questo principio operano già da tempo i balistici tedeschi.

d) Influenza della temperatura sulla funzione $F\,(v)$.

Il capitano Darrieus *Mémorial de l'Artillerie Française, 1922*, con delle semplici considerazioni sulla teoria cinetica dei gas, affermò che la resistenza della aria non poteva esser la stessa per due atmosfere che abbiano lo stesso numero di molecole per unità di volume, ma le cui velocità medie di agitazione (temperatura) siano differenti.

Generalmente si riteneva che la temperatura influisse sulla gittata perchè, modificando la densità dell'aria, determina una variazione nella ritardazione ; qualora una variazione di pressione barometrica e di stato igrometrico annullassero la variazione di densità dell'aria derivante dalla variazione della temperatura, non si sarebbe dovuto riscontrare alcun cambiamento nella gittata. Invece la gittata si modifica, perchè la temperatura influisce sulla ritardazione, non solo

attraverso δ, ma anche attraverso $F(v)$, ed il Darrieus diede per quest'ultima l'espressione

$$F(v, T) = K\, T\, \psi\left(\frac{\sqrt{T}}{v}\right) = K\, v^2\, \varphi\left(\frac{\sqrt{T}}{v}\right)$$

in cui $\psi\left(\frac{\sqrt{T}}{v}\right) = \frac{v^2}{T}\, \varphi\left(\frac{\sqrt{T}}{v}\right)$, essendo φ una funzione, da determinare sperimentalmente, del rapporto $\left(\frac{\sqrt{T}}{v}\right)$.

Per la verità, parecchi anni prima di Darrieus, il Sarran *Cours de mécanique de l'Ecole Polytechnique*, 1883-1884, partendo dall'applicazione del principio di omogeneità, era giunto alla stessa conclusione.

Notando che la velocità del suono s è proporzionale alla radice quadrata della temperatura assoluta, si può scrivere ancora

$$F(v\, T) = K \cdot v^2\, \varphi_1\left(\frac{v}{s}\right)$$

la quale conferma che la velocità del suono rappresenta, nella $F(v)$ un punto singolare, come già notato.

Gli studi del Langevin hanno confermato, sia teoricamente partendo dalle equazioni della termodinamica, sia in via sperimentale, (misurando la spinta esercitata su una superfice da un getto d'aria compressa, la cui velocità e temperatura potevano variare), le conclusioni di Darrieus.

Tenendo quindi conto della nuova causa di variazione della $F(v)$, che dipende non solo dalla velocità, ma anche dalla temperatura dell'aria, così che quest'ultima risulta un elemento perturbatore della ritardazione, (non solo in quanto fa variare la densità δ dell'aria ma anche in quanto altera la funzione resistente $F(v)$, la ritardazione stessa può esprimersi come

$$f(v) = \frac{\delta\, i}{C}\, F(v\, T)$$

Occorre quindi studiare questa nuova causa di variazione della gittata.

Se si considera che i tiri che servirono per la determinazione sperimentale di $F(v)$ durarono parecchi anni ed ebbero luogo nelle varie stagioni e che la temperatura media annuale è di circa 15°, si può ritenere che la temperatura assoluta corrispondente per i valori della Tavola $F(v)$ di Siacci sia $T = 273 + 15 = 288°$.

Ciò premesso, esaminiamo per le seguenti due ipotesi gli effetti di una variazione ΔT della temperatura e precisamente:

1) per una variazione di temperatura al suolo.

2) per una variazione di temperatura lungo la traiettoria, restando costante la temperatura al suolo.

1° Caso: *Variazione ΔF dovuta ad una variazione ΔT al suolo.*

Se non si tiene conto che la temperatura varia lungo la traiettoria, ossia se si considera una $F(v\; T)$ per $T = T_0$ e non per T variabile, se cioè si ammette che in un punto qualunque della traiettoria la funzione resistente non assuma il valore che corrisponde alle v e T di quel punto, ma alla v di quel punto ed alla tempera-

tura T_0 dell'origine, (temperatura di riferimento), alteriamo il valore della $F(v\,T)$ di una quantità data dalla formula

$$\frac{\Delta F}{F} = \frac{\Delta T}{T_0}\left[1 - \frac{n}{2}\right]$$

dove $n = v\frac{F'(v)}{F(v)}$.

Per la dimostrazione, osserviamo che la

$$F(v, T) = K v^2 \varphi\left(\frac{\sqrt{T}}{v}\right)$$

porge:

$$\frac{\partial F}{\partial T} = K v^2 \varphi'\left(\frac{\sqrt{T}}{v}\right)\frac{1}{2v\sqrt{T}} = \frac{K}{2}\frac{v}{\sqrt{T}}\varphi'\left(\frac{\sqrt{T}}{v}\right)$$

$$\frac{\partial F}{\partial v} = 2Kv\varphi\left(\frac{\sqrt{T}}{v}\right) - Kv^2\varphi'\left(\frac{\sqrt{T}}{v}\right)\frac{\sqrt{T}}{v^2} =$$

$$= \frac{2F(v, T)}{v} - K\varphi'\sqrt{T} =$$

$$= \frac{2}{v}F(v, T) - \frac{2\sqrt{T}}{v}\frac{\partial F}{\partial T}\sqrt{T}$$

cioè

$$\frac{\partial F}{\partial v} = \frac{2}{v}F(v, T) - \frac{2T}{v}\frac{\partial F}{\partial T}$$

da cui:

$$\frac{2T}{v}\frac{\partial F}{\partial T} = \frac{2}{v}F(v, T) - \frac{\partial F}{\partial v}$$

$$T\frac{\partial F}{\partial T} = F(v, T) - \frac{v}{2}\frac{\partial F}{\partial v}$$

dividendo per $F(v)$

$$\frac{T}{F}\frac{\partial F}{\partial T} = 1 - \frac{v}{2}\frac{F'(v)}{F(v)}$$

ma $\Delta_v F = \frac{\partial F}{\partial T}\Delta T$ per cui

$$\frac{\Delta F}{F} = \frac{T}{F}\frac{\partial F}{\partial T}\cdot\frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta T}{T}\left(1 - \frac{v}{2}\frac{F'(v)}{F(v)}\right)$$

Come volevasi dimostrare.

2° Caso. *Variazione ΔF dovuta alla variazione ΔT della temperatura lungo la traiettoria, quando la temperatura al suolo è normale* (15°).

Se per ipotesi la temperatura è normale all'origine, a misura che il proietto si eleva nell'atmosfera la temperatura decresce: la resistenza dell'aria in ogni punto della traiettoria subisce perciò una variazione dovuta alla variazione $F(v)$, diversa da quella utilizzata nei calcoli.

Il Sugot ha calcolato le correzioni in casi di tiri in differenti condizioni ed ha visto che, trascurando le grandissime gittate, l'errore che si commette in questo caso, per effetto della variazione di $F(v)$, ha valore trascurabile.

Si nota infine, che le attuali tavole di tiro sono dedotte da tavole balistiche calcolate sulla base di esperienze eseguite a temperature diverse, e perciò implicitamente viene tenuto conto della variazione di $F(v)$.

Darrieus stabilisce infine come si può dedurre, da una nota funzione $F(v, T)$ per una determinata temperatura: ad es. $273 + 15 = 288$ (Siacci), i valori di $F(v, T)$ per qualsiasi altra temperatura.

Se la curva a tratto pieno rappresenta (fig. 34) la $F(v, T_0)$ e si vuol costruire la $F(v, T_1)$ basta osservare che, se M_0 è l'omologo di M_1.

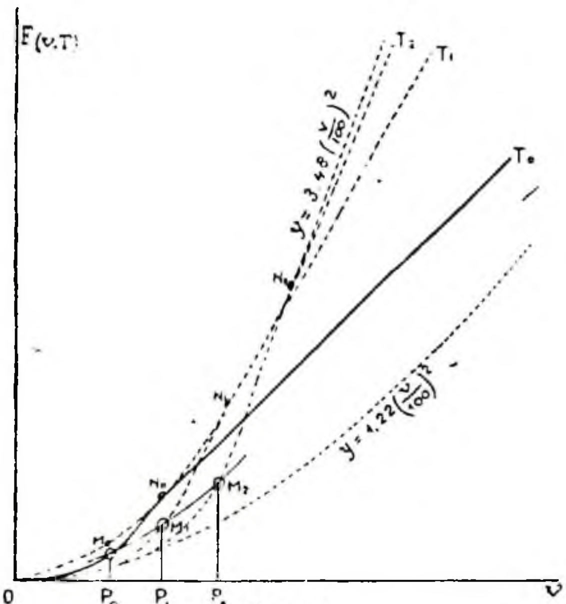


FIG. 34.

$$\frac{OP_1}{OP_0} = \frac{v_1}{v_0} = \frac{\sqrt{T_1}}{\sqrt{T_0}}$$

$$\frac{M_1P_1}{M_0P_0} = \frac{T_1}{T_0} = \frac{v_1^2}{v_0^2}$$

I punti M_0 M_1 M_2 corrispondenti a regimi simili sono dunque su di una stessa parabola.

Il fascio di queste parabole è compreso tra due parabole limiti

$$\gamma = 1{,}22\left(\frac{v}{100}\right)^2 \qquad \gamma = 3{,}48\left(\frac{v}{100}\right)^2$$

Prendendo per coordinate $\log v$ e $\log F(v\,T)$, le curve corrispondenti ai diversi valori di T si deducono tutte da una qualunque di esse, per semplice traslazione nella direzione del coefficente angolare (fig. 35).

Risulta che se la temperatura cresce, a partire dal valore T, restando costante v, la resistenza cresce $\left(\frac{\delta F}{\delta T} > 0\right)$ o decresce $\left(\frac{\delta F}{\delta T} < 0\right)$ secondo che v è $<$ o $>$ del valore di 500 m/s, a temperatura ordinaria, corrispondente al punto N_0 in cui la curva tocca l'inviluppo.

La variazione $\frac{\delta\,[\log F(v)]}{\delta\,(\log v)}$ oppure $\frac{\delta F(v)}{\delta v}$, $\frac{F}{v}$ è massima nel punto M_0 di flesso della curva, cioè per la velocità di 320 m/s alla temperatura ordinaria.

c) LA FUNZIONE $K(v)$.

α – *Espressione di Siacci e formule antiche.*

Se si divide per v^2 la funzione $F(v)$, si ottiene una nuova funzione che viene indicata con

$$K(v) = \frac{F(v)}{v^2}$$

Con tale sostituzione, la ritardazione viene espressa da

$$f(v) = \frac{\delta \cdot i}{C} v^2 K(v)$$

La curva che rappresenta la relazione tra $K(v)$ e v, variando assai più lentamente che non quella della $F(v)$, permette di rilevare con maggior precisione la legge delle variazioni successive della funzione.

Partendo dalla $F(v)$ di Siacci, la curva rappresentativa dei valori $10^6 K(v)$ è riportata nella fig. (36).

Essa ha un tratto sensibilmente parallelo all'asse delle v per i valori di v fra 0 e 240 m/s, essendo in media $10^6 K(v) = 123$ quindi sale rapidamente fino al valore massimo $10^6 K(v)=350$, per $v=520$ m/s circa, quindi diminuisce abbastanza lentamente.

La curva presenta due punti di inflessione: il primo per $v = 310$, l'altro per $v = 780$ circa.

Rappresentiamo nella fig. (37) diverse curve della funzione $K(v)$ in rapporto alle varie espressioni della $F(v)$.

Secondo la legge quadratica di Newton, che, come abbiamo visto, può ritenersi valida fino a $v = 240$ m/s circa, Eulero basò la prima teoria balistica, ponendo

$$F(v) = av^2$$

dalla quale risulta

$$K(v) = \frac{F(v)}{v^2} = a$$

equazione che rappresenta una parallela alle ascisse: il valore della costante determinato da Eulero era $a = 0{,}130$.

Per velocità un poco più alte, e cioè fino a 350 m/s, il Didion, valendosi delle prime misure di resistenza fatte col suo pendolo balistico, provò che $F(v)$ cresceva più rapidamente, in funzione di v, di quanto non sia rappresentato dalla legge quadratica.

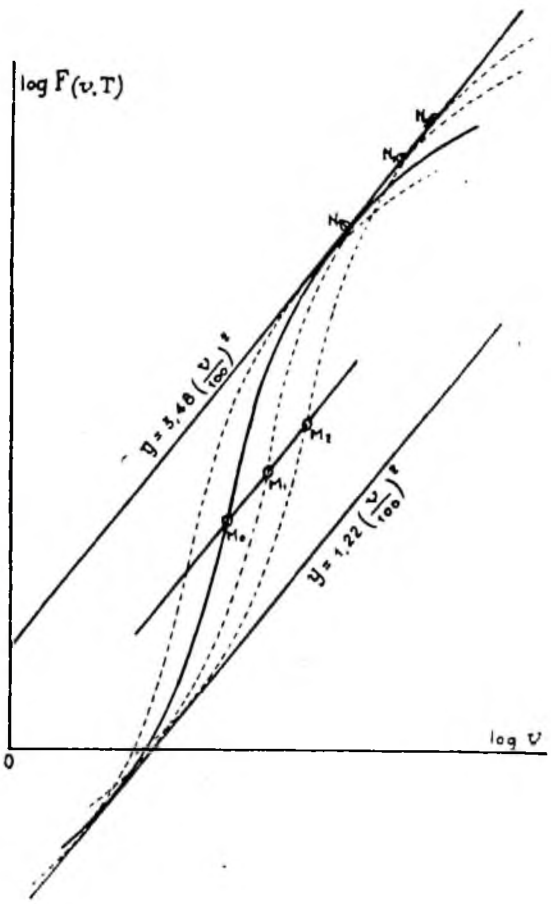


FIG. 35.

L'espressione data da Didion fu

$$F(v) = a\,v^2 + b\,v^3$$

per la quale calcolò le costanti

$$a = 0{,}05 \qquad\qquad b = 0{,}011$$

Si ricava

$$K(v) = a + bv$$

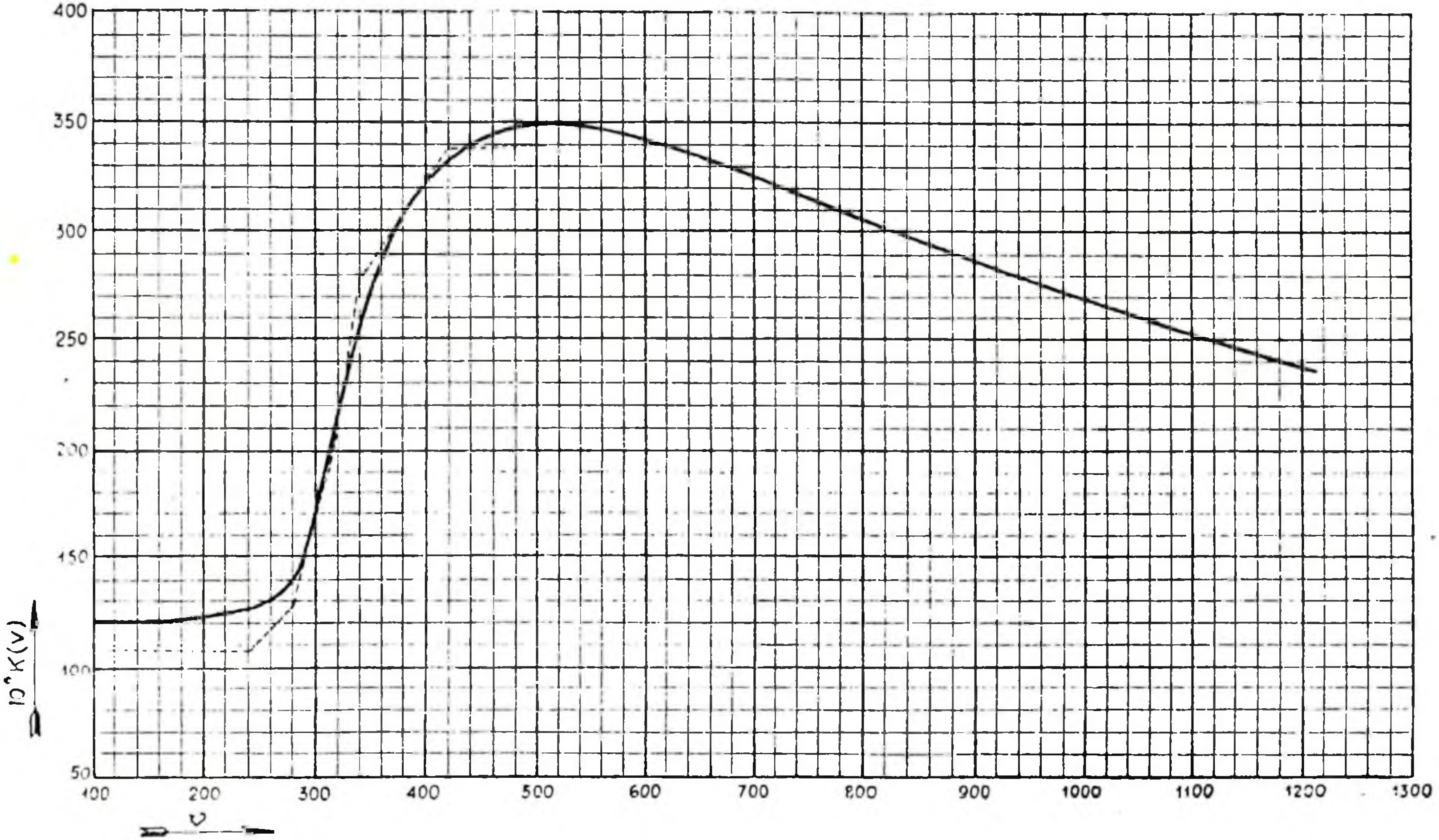
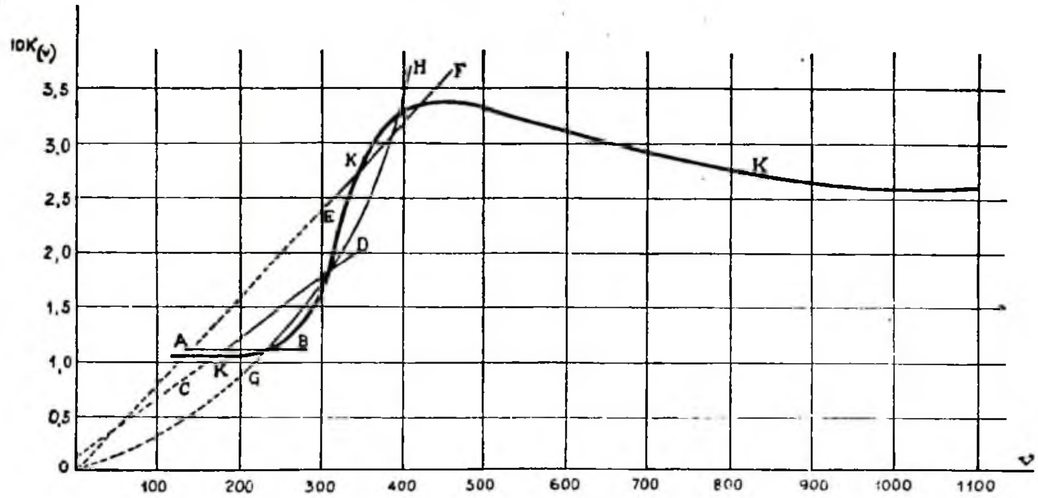

400
350
300
250
200
150
100
50
100
200
300
400
500
600
700
800
900
1000
1100
1200
1300
v

FIG. 36.

equazione di una retta inclinata sull'asse delle ascisse che taglia l'asse delle ordinate nel punto $y = a$

Questa retta taglia in due punti la curva $K(v)$ di Siacci, e la taglia in modo da rappresentarne l'andamento medio, fra i 150 ed i 350 m/s.

Quando le velocità iniziali raggiunsero i 400 ÷ 500 m/s anche la legge di Didion si dimostrò insufficiente, gli errori che si commettevano applicandola risultavano sempre più palesi, man mano che si perfezionavano, con l'uso dei cronografi elettrici, i metodi di misura sperimentale della resistenza.



$$K(v) = \frac{F(v)}{v^2}$$

Eulero: $F(v) = av^2 = 0{,}130\, v^2$; $K(v) = AB$

Didion: $F(v) = av^2 + bv^3 = (0{,}05 + 0{,}011\, v)\, v^2$; $K(v) = CD$

Bashfort: $F(v) = av^3 = 0{,}0^3 75\, v^3$; $K(v) = EF$

Piton–Bressant: $F(v)\, av^4 = 0{,}0^5 224\, v^4$; $K(v) = GH$

$K\,K\,K$: Curva sperimentale di Gâvre: { inflessione per $V = 335$ m/s; massimo per $V = 470$ m/s

FIG. 37.

Il Bashfort modificò l'inclinazione della retta di Didion, adottando la legge cubica

$$F(v) = a\, v^3$$

dalla quale si ricava

$$K(v) = a\, v$$

che è l'equazione di una retta passante per l'origine, essendo il valore della costante $a = 0.00075$.

Di tutte queste ipotesi semplici, atte a rappresentare con approssimazione le curve $K(v)$, la più notevole è quella di Piton-Bressant, che sostituisce la $K(v)$ di Siacci nel suo tratto rapidamente ascendente cioè per valori di $250\,\text{m/s} < v < 500\,\text{m/s}$, con una parabola ad asse verticale, col vertice nell'origine degli assi.

Cioè

$$F(v) = a\, v^4$$

per cui

$$K(v) = a^2$$

essendo il valore della costante $a = 0{,}00000224$.

Ma per velocità maggiori di 500 m/s anche l'applicazione di questa legge perde ogni significato.

Se si rinunzia alla continuità, ossia se si fanno variare le espressioni della resistenza a seconda dei limiti della velocità, se cioè si sostituisce alla curva sperimentale un contorno mistilineo poligonale assai prossimo ad essa, si riesce sempre a rappresentare i lati con la forma

$$K(v) = bv^n$$

Il Cranz osserva che sono note circa 27 di tali espressioni empiriche della funzione resistente, per la maggior parte di questa forma esponenziale, oppure della forma

$$K(v) = a\,v^n + b\,v^m + \cdots\cdots$$

Dal Mayewski le velocità del proietto vennero divise in intervalli, a zone, variando, da una all'altra, nella legge $K(v) = a\,v^n$, il coefficente a o l'esponente n, od entrambi.

Così ad esempio, il contorno mistilineo dedotto dalle esperienze russe ed inglesi che può rappresentare la espressione $K(v)$ di Siacci è definito (fig. 36) dalle espressioni seguenti

(I)	$K = 0{,}0^2 17442\, v^{-0{,}23}$	$1000 > v > 700$
(II)	$K = 0{,}0^3 33933$	$700 > v > 420$
(III)	$K \quad 0{,}0^6 808\, v$	$420 > v > 343$
(IV)	$K = 0{,}0^{13} 2\, v^4$	$343 > v > 282$
(V)	$K = 0{,}0^6 449\, v$	$282 > v > 240$
(IV)	$K = 0{,}0^3 108$	$v < 240$

Il contorno mistilineo, dedotto dalle prime esperienze di Krupp (1881-1895), è definito dalle espressioni seguenti

(I)	$K = 0{,}0^2 5499\, v^{-0{,}45}$	$1000 > v > 800$
(II)	$K = 0{,}0^2 2017\, v^{-0{,}30}$	$800 > v > 550$
(III)	$K = 0{,}0^3 3036$	$550 > v > 419$
(IV)	$K = 0{,}0^6 724\, v$	$419 > v > 375$
(V)	$K = 0{,}0^{11} 516\, v^3$	$375 > v > 295$
(VI)	$K = 0{,}0^6 449\, v$	$295 > v > 240$
(VII)	$K = 0{,}0^3 108$	$v < 240$

β – *Esperienze tedesche di Krupp (O. Von Eberhard).*

Queste esperienze eseguite con metodi di misura molto esatti, *Artilleristische Monatshefte, 1912*, hanno portato a stabilire i valori della funzione $10^6\ K(v)$ riportati nella tabella *a*) del Cranz (pag. 61 ediz. 1925); la corrispondente curva è rappresentata nella fig. 38.

Il proietto cui si riferisce la figura è quello normale di Krupp, cioè il proietto da 10 cm. con raggio ogivale di 2 calibri e con troncatura di ogiva di 0,36 calibri, l'espressione della ritardazione W è:

(Cranz pag. 59) $$W = \frac{R^2 \pi \cdot \delta \cdot i f(v)}{1{,}22}$$

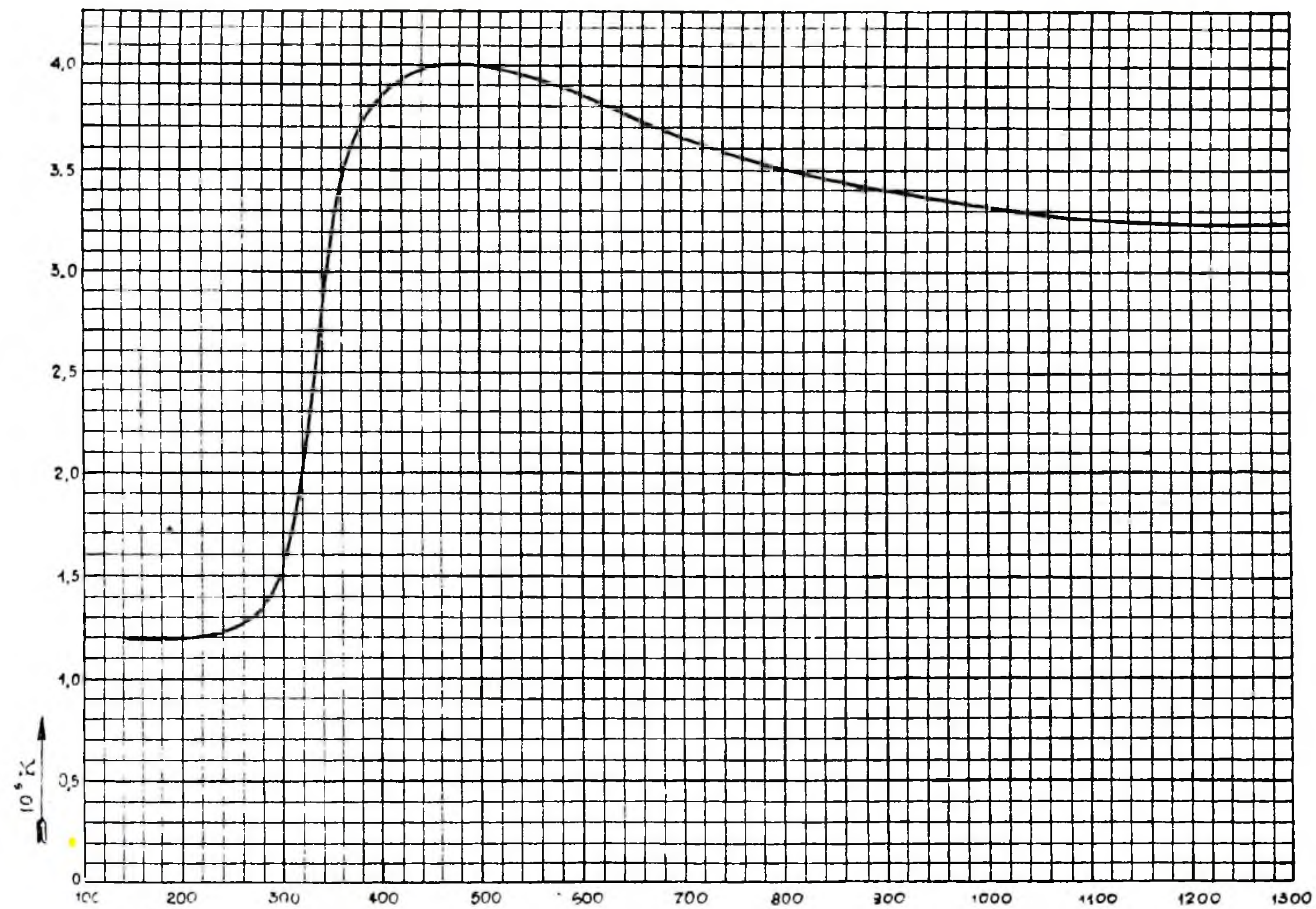

4,0
3,5
3,0
2,5
2,0
1,5
1,0
0,5
0
10⁵K
100
200
300
400
500
600
700
800
900
1000
1100
1200
1300
v

FIG. 38.

nella quale è da notare che πR^2 *rappresenta la sezione del proietto in cmq.* δ la densità dell'aria in kg/m³, $i = 1$ per il proietto normale di Krupp.

Eberhard dà le seguenti formule:

1) per proietto con raggio ogivale di 3 calibri e troncatura di ogivale 0,36 calibri.

$$\frac{1}{i} = 1{,}3206 - \frac{58{,}2}{v} - 0{,}0001024\, v$$

2) per proietto con raggio ogivale di 5,5 calibri e troncatura di ogiva 0,36 calibri.

$$\frac{1}{i} = 1{,}4362 - \frac{73{,}4}{v} - 0{,}0001128\, v$$

3) per proietto con raggio ogivale di 3 calibri e troncatura di ogiva 0,25 calibri.

$$\frac{1}{i} = 1{,}1959 - \frac{40{,}6}{v} + 0{,}0001467\, v$$

4) per proietto con raggio ogivale di 3 calibri ad ogiva appuntita

$$\frac{1}{i} = 1{,}1311 - \frac{47{,}7}{v} + 0{,}0003166\, v$$

Volendo determinare, ad esempio il valore della resistenza su un centimetro-quadrato di sezione di un proietto ogivale con 2 calibri di raggio ogivale e 0,36 calibri troncatura di ogiva, per $v = 500$ m/s, poichè risulta $10^6\, K(v) = 3{,}998$, si ha (per $\delta = 1{,}22$)

$$W = 1 \cdot \overline{500}^2 \cdot 3{,}998 \cdot 10^{-6} = 0{,}999\, Kg.$$

La curva $K(v)$ presenta un valore massimo per $v = 480$ m/s e per le grandi velocità ha andamento asintotico rispetto all'orizzontale, cioè a dire torna a valere la legge di resistenza quadratica.

γ – *Esperienze di Dupuis.*

Per la revisione della legge di resistenza dell'aria, furono eseguite a Gâvre esperienze sistematiche dal 1921-1923.

Il Dupuis ne dà notizia nel *Mémorial de l'Artillerie Française*, 3° fascic. 1928. Egli misura le resistenze, alle differenti velocità, dei proietti seguenti:

Granata ogivale da 140 mm., a fondello diritto e a fondello rastremato;

Granata ogivale da 75 mm. geometricamente simile al proietto da 140 mm. nella sola forma di fondello dritto.

In relazione alle osservazioni del Cranz, il Dupuis realizzò, per la prima volta la condizione essenziale di non tirare che con proietti identici. Egli osserva che « il valore dei risultati ottenuti sarebbe di prim'ordine, se si potesse affermare la tenuta (stabilità) perfetta dei proietti sulla loro traiettoria », cioè si riferisce alla influenza del 2° problema balistico.

Di ciò, egli dice « non ebbi disgraziatamente che dei sintomi ».

Dall'esame dei risultati sperimentali egli trae le seguenti conclusioni:

1) la espressione della resistenza sotto la forma monomia $c \cdot F(v)$ è impossibile;

2) occorre adottare espressioni polinomie, od altre nelle quali la forma del

proietto intervenga mediante uno o più coefficenti, impegnati con la v sotto lo stesso segno funzionale;

3) poichè una espressione monomia, per quanto inesatta, non porta a risultati assurdi, si può presumere che una espressione binomia sia sufficiente.

In conseguenza, il Dupuis ha tentato espressioni della forma

$$F(v) = c\,\varphi(v) + c'\,\psi(v)$$

c e c' essendo coefficenti caratteristici di ogni proietto φ e ψ delle funzioni della velocità.

Il Dupuis dichiara che, sotto questa forma generale, possono essere espresse con « fedeltà straordinaria » tutte le esperienze eseguite, entro i limiti di velocità sperimentati (260 m/s $< v <$ 900 m/s).

Consideriamo le due funzioni di φ e ψ, definite come segue, al disotto e al disopra della velocità del suono:

a) per la funzione φ

per $v < 341$ $\qquad \varphi(v) = 48{,}5 + 122{,}10^{-(341 - v)\,0{,}017}$

per $v > 341$ $\qquad \varphi(v) = v - 170{,}5 + \bar{1}{,}2200\,(v - 700)\,10^{-\frac{(v-660)^2}{21.000}}$

b) per la funzione $\psi(v)$ al disotto e al disopra della velocità del suono

per $v < 341$ $\qquad \psi(v) = 0{,}347 + 0{,}653 \cdot 10^{-(341 - v)\,0{,}017}$

per $v > 341$ $\qquad \psi(v) = 1$

cioè

1) al disopra della velocità s del suono, $\varphi(v)$ rappresenta con approssimazione sufficiente una retta di coefficente angolare 1, che taglia l'asse delle v in un punto, la cui ascissa è la metà della velocità del suono; al disotto di s, la $\varphi(v)$ rappresenta un tratto di curva ad incremento assai rapido intorno alla velocità del suono, che si riunisce alla retta di cui sopra con raccordo angoloso, in corrispondenza di $v = s$.

2) $\psi(v)$ costante ed uguale all'unità per $v > s$, rappresenta per $v < s$, una curva con lo stesso andamento della precedente.

Una rappresentazione grafica delle esperienze è data dalla (fig. 39).

In conclusione, l'espressione binomia pro-

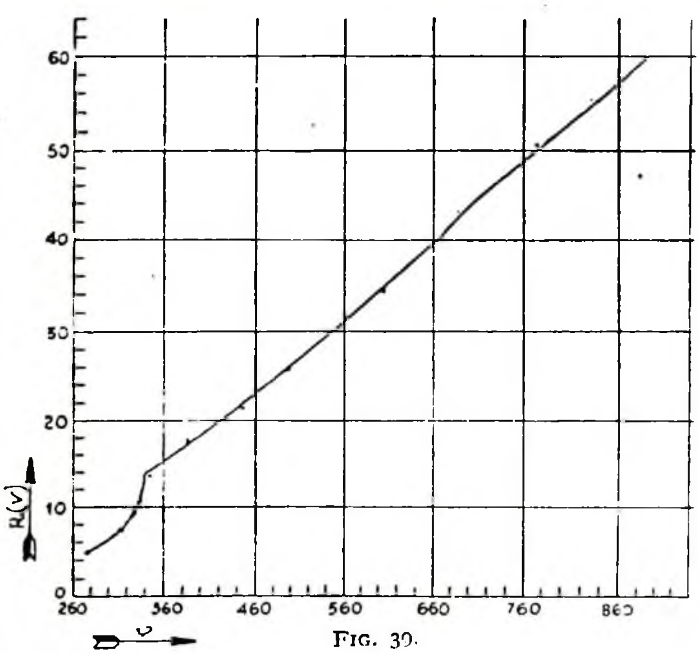


FIG. 39.

posta definisce, al disotto di 341 m/s, una curva a forte curvatura ed a rapido incremento, e al disopra una curva molto prossima ad una retta, di coefficiente angolare *c*, con una leggera sinuosità fra 450 e 800 m/s.

Il Dupuis dà anche la rappresentazione propria (fig. 40) della funzione $K(v)$.

La curva I rappresenta la funzione $K(v)$ relativa ad un proietto di grande raggio ogivale senza rastrematura.

La curva II rappresenta la funzione $K(v)$ relativa ad un proietto di piccolo raggio ogivale senza rastrematura.

I punti segnati nelle vicinanze di questa seconda curva, rappresentano i valori

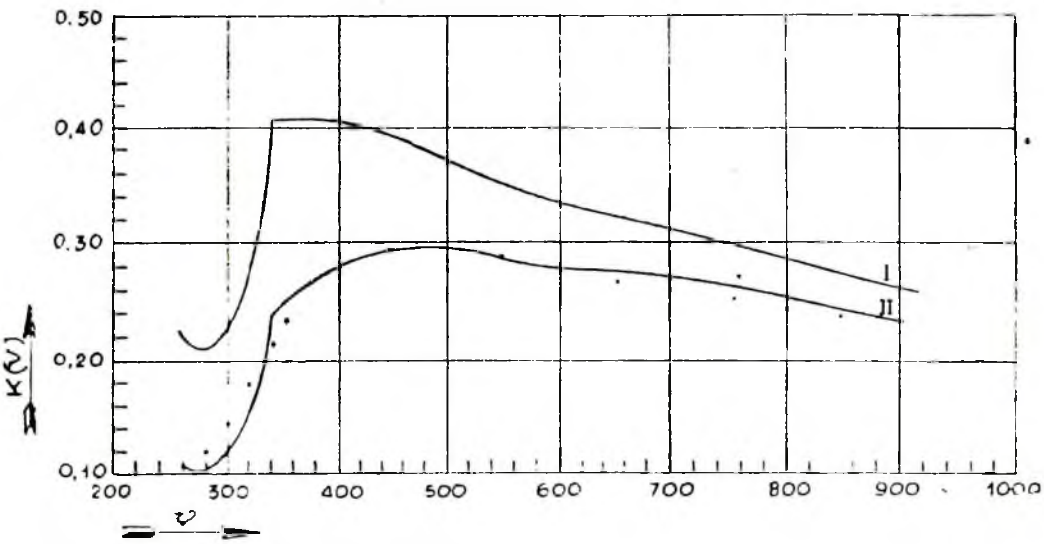


Fig. 40.

di $K(v)$ secondo la legge di Gâvre, dopo moltiplicazione per un fattore costante $K(v)$ di Gâvre $= 1{,}88$.

Il Dupuis conclude perciò confermando la convenienza di applicare la legge di Gâvre per i proietti impiegati a stabilirla; osservando che le espressioni da lui date offrono un progresso certo sulla rappresentazione monomia, e possono applicarsi ad un gruppo assai interessante di proietti moderni a falsa ogiva, ed ai proietti corti di un tempo.

f) La funzione $n(v)$.

I primi autori che fecero studi sulla resistenza dell'aria al moto dei proietti espressero la legge della resistenza mediante la relazione monomia:

$$F(v) = \lambda v^n$$

però affinchè essa dia risultati corrispondenti al vero occorre dare alle costanti n e λ valori diversi, secondo il valore di v.

In tal modo la legge della resistenza è determinata da successive coppie di valori di λ ed n, valevoli ciascuno per valori di v compresi in una determinata zona.

Supponendo n e λ costanti il valore della prima derivata di $F(v)$, $F'(v)$ è:

$$F'(v) = n \lambda v^{n-1}$$

da cui:

$$n = \frac{v F'(v)}{F(v)} ;$$

n si chiama grado della resistenza (v. nota) $F(v)$.

Se si calcolano valori di n corrispondenti a diversi valori di v, la curva della funzione $n(v)$ presenta le seguenti caratteristiche (fig. 41):

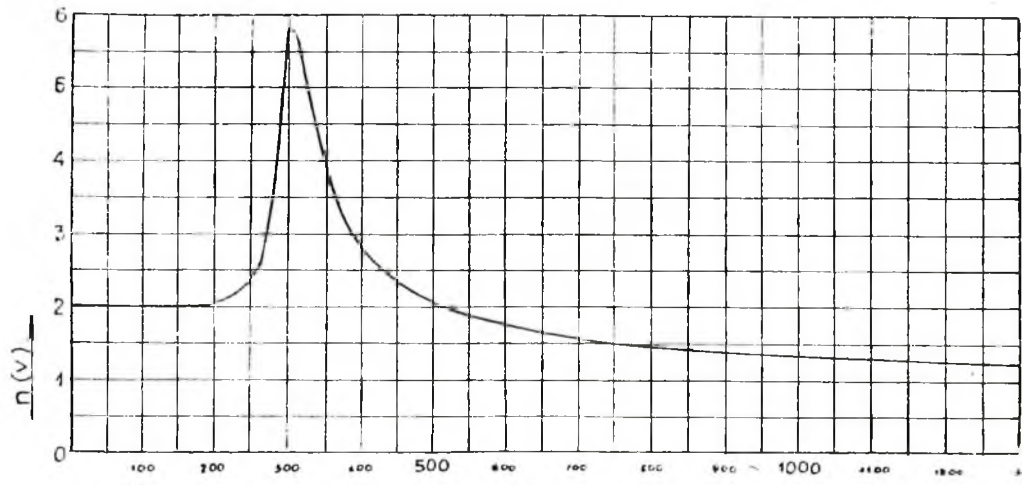


FIG. 41.

ha un primo tratto parallelo all'asse della velocità col valore costante $n = 2$ fino a 240 m. come abbiamo già notato. Sale poi rapidamente fino ad un massimo di circa 6 per $v = 302$; discende quindi dapprima rapidamente, indi più dolcemente fino a diventare, per le alte velocità, assintotica alla retta $n(v) = 1$.

Nota. Se si rappresenta, sul piano, una curva qualunque $F(v)$ in funzione di v, il valore $n = 1$ corrisponde al punto la cui tangente passa per l'origine. Quando la tangente taglia l'asse delle v nella regione positiva, risulta $n > 1$; nella regione negativa risulta $n < 1$.

Così, nella (fig. 42) si ha

Archi	*OA*	*A*	*AB*	*B*	*BC*	*C*	*CD*	*D*	*DE*
v	> 1	$= 1$	< 1	$= 1$	> 1	$= 1$	< 1	$= 0$	> 1

In balistica, non si considera che il caso di $n \geq 0$. Il caso di $n < 0$ corrisponderebbe all'ipotesi di resistenza decrescente quando la velocità cresce. Pertanto si avrà sempre $F(v) > 0$ parallela all'asse delle v.

Le rapide variazioni di $n(v)$ in corrispondenza delle velocità medie intorno cioè alla velocità del suono, confermano quanto sia difficile ottenere una rappresentazione analitica soddisfacente della legge di resistenza dell'aria, in particolare con una formula monomia.

La Tav. VI contiene i valori di $F(v)$, $10^5 K(v)$ ed $n(v)$ per v variabile da 0 a 1500.

g) Il coefficiente di forma.

Per applicare una legge di resistenza, per esempio quella di Siacci, o quella di Krupp, a proietti il cui coefficente di forma sia diverso da uno, occorre correggere la funzione F (v) del coefficente variato, cioè occorre moltiplicare F (v) per il nuovo valore di i.

Abbiamo dato al proposito, per le tabelle di Krupp, alcune formule di Eberhard.

Lo studio della forma esterna del proietto, alquanto trascurata negli anni che precedettero la grande guerra, fu ripresa con intenso studio per ragioni di carattere tecnico ed economico al tempo stesso e cioè: ottenere le richieste maggiori gittate, senza aumentare sensibilmente la energia alla bocca, allo scopo di utilizzare le numerose b. d. f. esistenti.

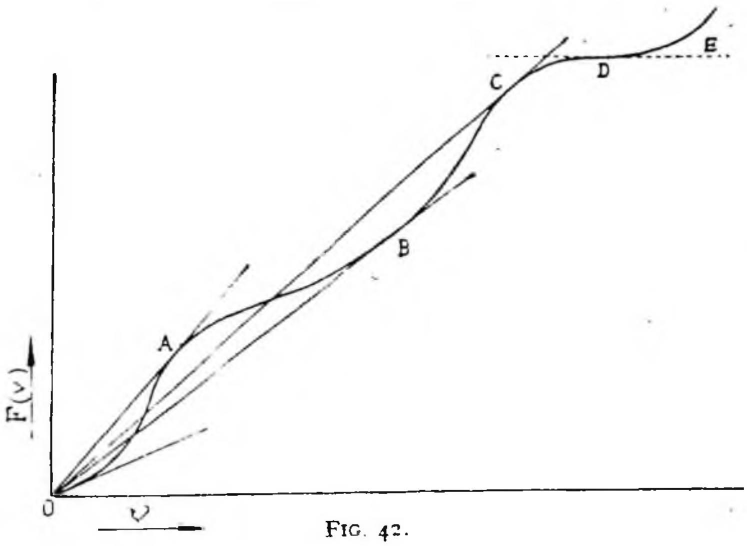


Fig. 42.

Si ammetteva, in passato, che il coefficente di forma i dipendesse esclusivamente dalla forma esterna del proietto, e che quindi esso fosse costante per ciascun tipo di proietto. Oggi sappiamo che specialmente per proietti lunghi, assai affusolati, il coefficente di forma che appartiene ad un tipo di proietto, può anche non adattarsi ad uno di forma simile, se animato da diversa velocità, o costituito da materiale di densità diversa. Ciò perchè il coefficente i dipende, oltre che dalla forma, dalle caratteristiche condizioni di moto lungo la traiettoria provocate dall'azione stabilizzante giroscopica; condizioni che analizzeremo al capitolo « resistenza obliqua ».

Per ora osserviamo soltanto col Iachino, che il proietto « non si muove nell'aria come un mobile di peso e sezioni noti, trascinato da una forza diretta lungo l'asse e per il quale soltanto la forma esterna può influire: non è una aeronave sospinta a muoversi nell'aria, che reagisce nel senso diretto ed opposto al moto, ma un solido di rivoluzione animato da un movimento di precessione intorno al suo asse, variabile lungo la traiettoria, diverso da traiettoria a traiettoria.

Ne segue che la resistenza incontrata durante il moto, oltre che ad essere necessariamente obliqua, a causa della precessione, varierà da punto a punto della traiettoria, così come se si modificasse la forma del proietto in moto ».

Sembra inoltre che l'area della sezione retta abbia una certa influenza e che i proietti di piccolo calibro risentano l'effetto delle variazioni di forma in grado più sensibile che non quelli di grosso calibro.

Esperienze effettuate al poligono di Aberdeen nel 1919, con un proietto assai affusolato da 152, avrebbero messo in evidenza un sensibile miglioramento di i, a pari

angolo di proiezione φ al crescere di V al disopra dei 500 m/s; ciò si spiega quando si pensi che la resistenza dipende dall'angolo di precessione ψ, che varia con φ.

Data l'importanza assunta dal coefficente di forma, è chiaro che si cerchi di ridurlo al valor minimo, ordinariamente ciò si ottiene, o affusolando l'ogiva, e rastremando il fondello, o adottando i due sistemi abbinati.

L'affusolamento del proietto favorisce la penetrazione qualora il moto risulti rettamente stabilizzato. Però, con l'affusolamento, può talvolta, per la notevole distanza fra centro di gravità e centro di pressione, aumentare di tanto il valore della coppia di capovolgimento, da rendere necessario l'impiego di proietti rigati, perchè la b. d. f. possa imprimere loro la veloce rotazione giroscopica stabilizzante. Perciò l'allungamento e la forma del proietto vanno contenuti entro certi limiti, per non peggiorare le condizioni del moto, ampliando l'angolo di precessione, e di conseguenza, la resistenza obliqua.

Di qui la opportunità dell'uso di false ogive per diminuire il momento d'inerzia trasversale, ed anche perchè la falsa ogiva in lamiera (od alluminio electron - R.M.) può esser facilmente tolta effettuare tiri con carica ridotta, o molto curvi.

Per quanto riguarda la restremazione del fondello, abbiamo già notato che esaminando il comportamento del proietto in moto, in corrispondenza della parte posteriore si origina una depressione, la quale tende rapidamente ad un massimo, quando la velocità del proietto raggiunge circa 400 m/s. Da tale valore della velocità in poi, l'aumento della resistenza dipende quasi esclusivamente dalla forma dell'ogiva.

Nel rastremare i proietti è quindi necessario tener conto del valore medio delle velocità lungo la massima parte della traiettoria. Una rastrematura troppo spinta fa si che le parti conduttrici del proietto abbandonino l'appoggio delle righe quando ancora una parte del proietto è nell'arma e quindi soggetto ai moti turbinosi dei gas, che, specialmente se la pressione di bocca è notevole, influenzano grandemente il moto d'imbarco del proietto sulla traiettoria, e danno luogo a forti dispersioni nel tiro.

Il metodo da seguirsi per ottenere la più conveniente rastrematura è indicato nel *Corso di Costruzioni di Artiglieria*. Noi ci limiteremo a riportare dal noto *Corso di Costruzioni di Artiglieria* del Mainardi, una formula empirica che può applicarsi per determinare la variazione Δi del coefficente di forma in funzione del diametro d del fondello, del calibro a e dell'altezza h dell'ogiva:

$$\frac{\Delta i}{i} = -0{,}6\left(1 + \frac{h}{10}\right)\left(1 + \frac{d^2}{a^2}\right)$$

Molte sono dunque le considerazioni da tener presenti, e troppe condizioni riassume in sè il termine coefficente di forma (« il coefficente della nostra ignoranza », come lo definisce il Cranz), perchè si possa attribuire ad esso qualche cosa di più di un valore puramente indicativo caratteristico per quel proietto stabile e per quella traiettoria percorsa stabilmente.

Chè il coefficente di forma dedotto dalle osservazioni su una traiettoria non può essere valido per una seconda traiettoria appunto perchè l'identica coppia stabilizzante iniziale genera, per tiro più o meno curvo dello stesso proietto, angoli di precessione, e quindi resistenze oblique diverse.

Negli studi preliminari di proietti nuovi il valore sperimentale di i non è noto per cui occorre ricercarne un valore approssimato; questo si ottiene deducendolo

per analogia da altri proietti di forma e calibro poco diversi impiegati in condizioni quasi uguali.

Parecchi autori hanno date formule empiriche ed espressioni teoriche mediante le quali si potrebbe determinare il valore del coefficente di forma senza dover ricorrere al tiro.

Secondo Hélie, adottato come s'è detto $i = 1$ per proietti aventi raggio di ogiva $n = 1{,}5$, il coefficente di forma sarebbe funzione dell'altezza dell'ogiva h per cui si avrebbe

$$i = \frac{3\sqrt{4n-1}}{2n\sqrt{5}}$$

od anche

$$i = \frac{12\,m}{(1+4\,m^2)\sqrt{5}}$$

con $m = \frac{h}{2r}$.

W. Heydenreich, valendosi d'una formula poco diversa da quella di Hélie, trova valori del coefficente di forma in funzione di n, che sono numericamente poco diversi da quelli determinati con la formula di Hélie.

Gli americani adottano la formula assai semplice

$$i = 0{,}396\,\frac{2}{n}\,\frac{\sqrt{4n-1}}{7}$$

nel caso in cui il proietto tipo abbia un raggio ogivale $n = 1{,}5$ mentre per $n = 2$ essa diventa

$$i = \frac{2}{n}\,\frac{\sqrt{4n-1}}{7}$$

Questa formula è esatta solo per proietti ogivali con ogiva tangente alla parte cilindrica e non smussata.

Il Vallier, seguendo le teorie in uso presso l'artiglieria francese, secondo le quali il coefficente di forma è funzione dell'angolo γ d'apertura dell'ogiva, dà un quadro dei valori di i corrispondenti ai vari valori pratici di γ, nonchè ai valori delle velocità; secondo questo autore i crescerebbe sempre col diminuire di v.

Infine, un ultimo accorgimento che pur peggiorando di poco il coefficente di forma, diminuisce la dispersione del tiro, è costituito dalla troncatura d'ogiva (méplat).

Questo sistema, che consiste nel tagliare il proietto in ogiva in modo che non finisca a punta, era già noto ed applicato da tempo all'estero con troncature che, nei casi normali, hanno valori di 1/10 di calibro.

Esso è stato provato con successo, anche da noi, per le pallottole di armi portatili, dal col. Magistri nel 1929; le esperienze di quest'ultimo dimostrerebbero che l'effetto stabilizzante alle velocità elevate (800 m/s), crescerebbe col crescere del diametro della troncatura, fino ad $^1/_3$ di calibro.

Dopo quanto è stato detto, appare chiaro come non esista tutt'ora una formula che permetta il calcolo esatto del coefficiente di forma di un proietto, nonostante le numerose teorie non sempre concordanti; l'unico metodo che dia sicuri risultati è quello della determinazione sperimentale mediante il tiro, metodo che a suo tempo verrà ampiamento illustrato.

Il coefficiente di forma che se ne ricava diviene così un dato sperimentale, mediante il quale la legge di resistenza dell'aria determinata per un proietto tipo si rende applicabile al proietto che si considera; ciò sempre però entro i limiti già chiariti.

4 - Resistenza obliqua.

a) Generalità sulla forma ed il comportamento dei proietti.

I primi proietti impiegati nel tiro furono quelli sferici i quali per la loro simmetria incontravano nel loro moto nell'aria una resistenza direttamente opposta alla velocità.

Però, a parte le altre considerazioni, quali la grande resistenza al moto, la poca efficacia sul bersaglio, la mancanza di forzamento ecc., i proietti sferici davano luogo ad eccessive deviazioni del tiro e ciò per effetto principalmente delle irregolari rotazioni impresse al proietto sferico durante il tragitto nell'anima.

Il moto di rotazione dei proietti sferici è cagionato dai martellamenti nell'arma e dalla non coincidenza del centro di gravità con il centro di figura.

Quando un proietto urta contro le pareti dell'anima, l'attrito F che si sviluppa nel punto di contatto C costituisce una forza la quale, dalla superficie del proietto tasportata al centro di gravità G, mentre ne ritarda il movimento di traslazione, dà anche luogo ad una coppia FF' e quindi ad una rotazione (fig. 43).

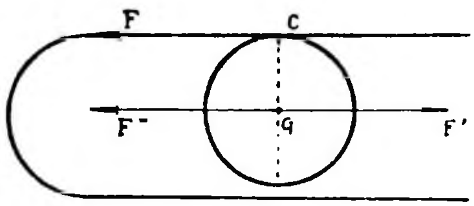


Fig. 43.

Se l'urto avviene contro la parete superiore dell'anima, l'emisfero anteriore prende un movimento dall'alto in basso; viceversa se urta la parete inferiore.

Se l'urto succede contro la parete destra, l'emisfero anteriore muove nella rotazione da sinistra a destra.

Anche l'eccentricità del proietto produce un movimento di rotazione, come appare chiaramente dalla fig. 44.

Per evitare la rotazione dei proietti, causa principale delle deviazioni, vennero fatti parecchi studi sia per impedirla che per renderla regolare.

Per contrariare la rotazione si propose d'unire al proietto un tacco di legno in modo che esso non avesse da abbandonarlo se non fuori dell'anima.

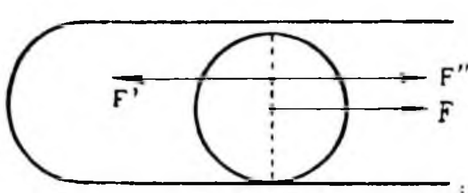


Fig. 44.

Questa disposizione però non diede buoni risultati, poichè il tacco si distaccava il più delle volte prima dell'uscita.

Il Thiroux propose, almeno per le bombe, di aggiungere al proietto un appendice che non si distaccasse, cioè un altro piccolo proietto legato al primo per mezzo di una catena.

Siccome la rotazione che tendono ad assumere le bombe non è molto rapida, il secondo proietto, rimanendo indietro, impediva la rotazione del primo.

Altre disposizioni furono tentate, ma con risultati nulli.

Si propose allora di regolarizzare la rotazione dando ai proietti sferici una eccentricità artificiale considerevole e collocandoli nell'anima sempre nella stessa posizione.

Tutte o quasi le artiglierie di Europa eseguirono numerose esperienze con proietti eccentrici, giungendo a conclusioni non sempre concordanti.

Sembra tuttavia che le bocche da fuoco ad anima corta fossero le più idonee all'impiego di proietti eccentrici.

In Prussia fu adottato tutto un sistema di granate e bombe eccentriche. La eccentricità era dovuta ad uno spostamento del centro della cavità interna. Questa cavità poi non era sferica, ma aveva la forma di un elissoide allungato di rivoluzione, coll'asse maggiore assai differente dal minore, e che si situava perpendicolarmente al piano di tiro. Tale disposizione aveva per scopo la stabilità del movimento di rotazione.

Pel tiro di lancio i proietti si collocavano col centro di gravità in alto, per tiri curvi col centro di gravità in basso.

Quando il centro di gravità era in alto, il tiro riusciva talmente teso, che l'angolo di caduta era talvolta minore dell'angolo di proiezione Quando il centro di gravità era in basso, la rotazione prodotta dalla eccentricità si sommava con quella nascente dal primo urto dei gas, contro il proietto, e dall'urto di questo contro la generatrice inferiore dell'anima. La rotazione risultante essendo più rapida, la precisione del tiro era maggiore. Per effetto di questa rotazione, la curvatura della traiettoria era più pronunciata che nel caso ordinario, il che, nel tiro arcato, era un vantaggio, poichè permetteva di ottenere con una piccola elevazione un considerevole angolo di caduta.

Prima di venire all'adozione dei proietti oblunghi, altre specie di proietti furono studiate con lo scopo di utilizzare il moto rotatorio a favore della precisione e della radenza del tiro, meglio che non fosse dato con i proietti sferici eccentrici.

I proietti sferoidici o a forma di lente parvero, almeno teoricamente, poter soddisfare allo scopo; essi infatti, quando siano lanciati col loro piano equatoriale coincidente col piano di tiro, e con un moto rotatorio intorno al loro asse, presentano sugli sferici eccentrici due vantaggi incontestabili, cioè, sotto un pari volume, minor resistenza e maggior stabilità dell'asse di rotazione.

Il De Puyd, dell'artiglieria belga, fu tra i primi a proporne. I suoi proietti erano dischi eccentrici, la cui forma esterna era quella di un toro limitato da due piani. La loro eccentricità era costituita da un vuoto interno che aveva la figura di un mezzo toro, simile a quello della figura esterna.

Il cannone aveva l'anima di sezione simile a quello del proietto, con un vento di 2 mm. I proietti introdotti, mediante la loro unione al cartoccio, col centro di gravità in alto, vennero lanciati coll'elevazione di 1° e con una carica corrispondente a 510 m/s di velocità iniziale. La gittata per due proietti fu da 2600 a 2700 m., con una deviazione laterale quasi nulla; per un altro proietto la gittata fu di 2232 m. con una deviazione laterale di 326 m. Un quarto proietto diede una gittata di 2050 m. ed una deviazione laterale di 198 m.

Questi risultati, che lasciano molto a desiderare quanto alla precisione, sono meravigliosi per le gittate ottenute, gittate più che sestuple di quelle che, con eguali dati iniziali, si ottengono con i proietti non ruotanti. Infatti, un altro proietto lanciato senza rotazione, mediante un tacco di legno, diede una gittata di 410 m.

Il conte di Saint Robert propose pure proietti sferoidici, ma concentrici cioè col centro di gravità coincidente col centro di figura, venendo la rotazione impressa dall'arma stessa. Fra i vari modi d'imprimere questa rotazione, da lui immagi-

nata nel 1877, egli giudicò preferibile di dare all'anima della bocca da fuoco una certa curvatura nel senso del piano di tiro colla concavità in basso. Il proietto, in ogni punto del suo tragitto nell'anima, tenderebbe a seguire la tangente; ma siccome, per la resistenza oppostagli dalla parete curva, è costretto a percorrerne il successivo tratto, ne nascerà una pressione normale alla superficie curva, che non è altro che la forza centrifuga. Questa pressione da luogo ad un attrito, che applicato all'equatore del mobile genera un moto di rotazione, il quale rispetto alla sua parte anteriore, sarà evidentemente rivolto all'insù.

Atteso la grande velocità del proietto, basterebbe una piccola curvatura per imprimere una considerevole velocità angolare.

Tutte queste soluzioni si dimostrarono poco soddisfacenti, ed il problema venne risolto completamente con l'adozione dei proietti ogivali, dotati di movimento di rotazione attorno al proprio asse.

Questa innovazione, dovuta al generale G. Cavalli, segnò un progresso gigantesco nella tecnica dell'Artiglieria.

Il proietto appena uscito dalla bocca da fuoco, essendo animato da una forte velocità di rotazione attorno al proprio asse di figura, possiede una stabilità dinamica che presenta delle analogie con quella della trottola.

Se tale stabilità fosse eccessivamente grande, l'asse di figura si manterrebbe costantemente parallelo a se stesso e formerebbe con la tangente alla traiettoria un angolo che andrebbe crescendo, dimodochè la resistenza dell'aria diventerebbe molto grande e di conseguenza andrebbe distrutto notevolmente il vantaggio del proietto oblungo sul proietto sferico.

Se la rotazione del proietto è tale da conferire ad esso una giusta stabilità, allora il suo asse di figura si mantiene sempre molto prossimo alla tangente alla traiettoria per cui esso cade di punta.

Quindi lo scopo della rigatura non deve essere quello (Perrodon) « di mantenere l'asse del proietto immobile nello spazio, ma bensì l'altro di farlo adagiare il più esattamente possibile sulla tangente alla traiettoria, e per conseguenza di dargli un movimento determinato ». Segue che rotazioni eccessivamente rapide saranno dannose, come quelle troppo deboli; ma è difficile (Ronca) stabilire sperimentalmente la rotazione più conveniente vale a dire quella che meglio avvicina l'asse alla tangente e che dipende dalla velocità iniziale, dall'angolo di proiezione, dal passo della rigatura e dal proietto, ossia dal suo peso, dalla posizione del suo centro di gravità, dalla sua forma esterna e dai suoi momenti d'inerzia rispetto agli assi principali.

b) Studio qualitativo del fenomeno della resistenza obliqua.

Come è noto, la soluzione del primo problema balistico si basa sulla ipotesi della resistenza diretta. Si ammette cioè che la resistenza dell'aria R risulti direttamente opposta alla velocità v.

Ora tale ipotesi è unicamente e rigorosamente valida nel caso di proietti che si muovono nell'atmosfera nella direzione del proprio asse, ma non lo è più quando la direzione della velocità, e cioè la tangente della traiettoria, non coincide con detto asse. E la divergenza risulta tanto maggiore quanto più grande è il valore dell'obliquità, cioè dell'angolo che la direzione della velocità forma con l'asse del proietto.

Si consideri infatti (fig. 45) un proietto, privo di moto rotatorio, che si muova nell'aria nella direzione del proprio asse. La resistenza R dell'atmosfera dovrà, come è ovvio, avere la stessa direzione e verso opposto. Se allora si prendono in esame due elementi di superficie simmetrici di una stessa corona circolare, p. e. appartenenti alla ogiva, (elementi schematizzati in figura nei due archetti $a\ b$ e $a'\ b'$), la R agirà su di una direzione parallela all'asse. Se si scompone la R in due componenti, una ρ_e normale all'elemento di superficie considerata, ed una ρ'_e ad esso tangente, e si suppongono trascurabili gli attriti, si deduce che l'azione della resistenza dell'aria su ognuno dei due elementi in questione si riduce a quella di una forza ρ_e normale ed uguale per ogni coppia di elementi simmetrici.

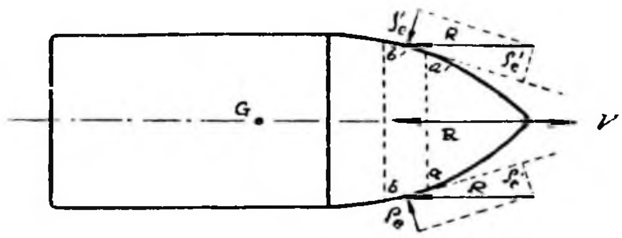


FIG. 45.

Scomponendo la ρ_e (fig. 46) a sua volta nelle direzioni rispettivamente normale e parallela all'asse di figura, risulta che le componenti normali si eliminano due a due, perchè ciascuna di esse è uguale e di verso contrario a quella che agisce sull'elemento simmetrico, mentre quelle parallele all'asse si sommano, dando luogo ad una risultante ρ che giace appunto sull'asse ed ha verso opposto a quello della velocità.

Se ora (fig. 47) si considera un proietto, privo di moto rotatorio, che muove nell'aria in direzione obliqua rispetto al proprio asse, e cioè tale che la direzione della velocità formi un angolo δ coll'asse stesso, si può ritenere che le molecole aeree urtino secondo questa direzione, ma con verso opposto, la superficie del proietto. Però eseguendo la stessa scomposizione della forza R eseguita nel caso precedente, si può vedere facilmente che la ρ_e sull'elemento $a'\ b'$ è notevolmente minore di quella sull'elemento $a\ b$ e in qualche caso può risultare addirittura nulla o di verso opposto.

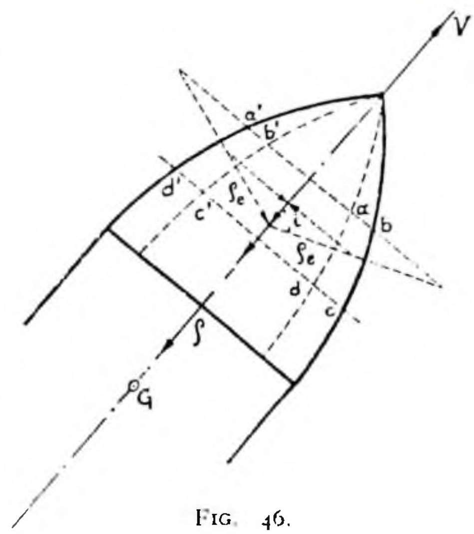


FIG. 46.

Se allora (fig. 48) si scompone la ρ_e per ciascuno dei due elementi simmetrici $a'\ b'\ c'\ d'$ e $a\ b\ c\ d$ in direzione rispettivamente normale e parallela all'asse, si ha che le componenti normali non si elidono più come nel caso precedente. Sommando e componendo tutte queste risultanti parziali (sia normali che assiali) per una corona circolare $a'\ b'\ a\ b$ si avrà la ρ_1 della figura 49. La risultante complessiva per tutto il proietto sarà una forza ρ applicata in un punto C dell'asse, detto centro di spinta o di resistenza diverso dal baricentro G e che forma coll'asse stesso un angolo δ_1. Si ha cioè la resistenza obliqua.

Nel momento in cui il proietto abbandona l'arma (fig. 50), l'asse di figura e la tangente alla traiettoria coincidono, quindi si verifica esattamente l'ipotesi

della resistenza diretta. Ma negli istanti successivi, per effetto della gravità, la traiettoria si incurva verso il basso, mentre l'asse di figura, per inerzia, tende a spostarsi parallelamente a se stesso. Nasce allora una divergenza fra asse di figura e tangente alla traiettoria, misurata dall'angolo δ, che tende ad aumentare man mano che il proietto prosegue nel suo moto. Allora la resistenza dell'aria da diretta diviene obliqua, e la sua direzione fa con l'asse del proietto un angolo δ_1 (fig. 49).

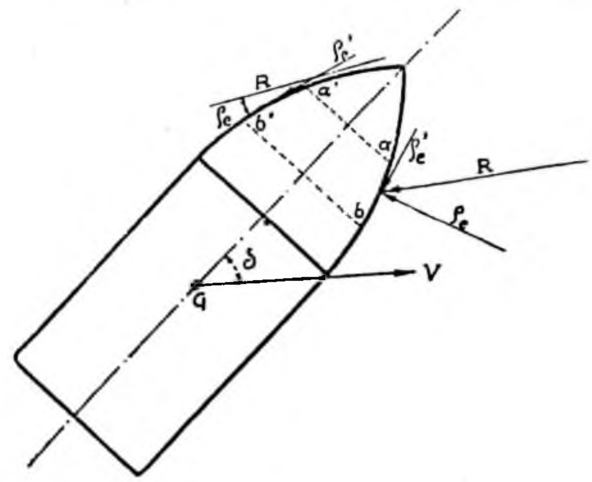


FIG. 47.

Chiamando con K il rapporto dei due angoli anzidetti, si avrà

$$\frac{\delta_1}{\delta} = K.$$

Mentre nel caso della resistenza diretta la resistenza dell'aria ha, come linea di azione, una retta passante per il baricentro G, nel caso della resistenza obliqua, tale linea di azione passa per il centro di resistenza C.

Ne nasce evidentemente una coppia rovesciante di momento

$$M_G = \rho\, l \operatorname{sen} \delta_1$$

essendo

$$l = G\,C$$

ed M_G il momento rovesciante perturbatore.

La coppia rovesciante tende a far rotare il proietto attorno a un asse normale al piano di figura e passante per il baricentro G e quindi a far aumentare l'angolo δ. Si avrebbero in conseguenza valori eccessivi della obliquità, ed il proietto quindi potrebbe non urtare il suolo colla punta, venendo così a mancare l'esplosione.

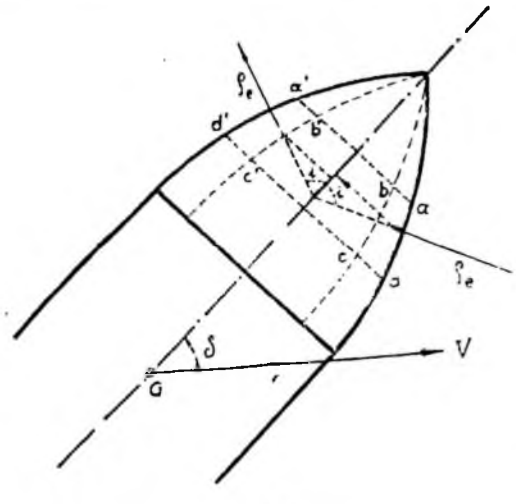


FIG. 48.

Facendo assumere al proietto un rapidissimo moto di rotazione intorno al proprio asse, si ha che il proietto stesso viene ad acquistare una stabilità detta giroscopica rispetto alla tangente alla traiettoria, in conseguenza appunto di tale moto rotatorio. Precisamente il vettore momento della coppia rovesciante M_G componendosi con quello M_r della coppia di rotazione, determina un vettore momento risultante che è anche asse istantaneo di rotazione (fig. 51) tale che, se per esso si fa

passare un piano verticale, questo verrà a formare un certo angolo con un altro, pure verticale, che contiene l'asse del proietto.

In conseguenza di ciò l'asse del proietto tende a fuoriuscire dal piano verticale che lo contiene, in direzione ad esso normale.

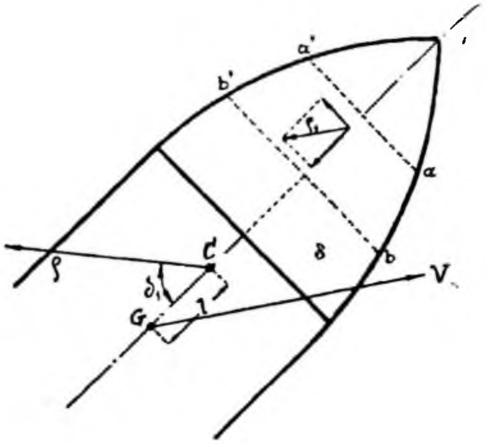


FIG. 49.

Si può concludere quindi che non è vero quanto spesso si sente affermare, che cioè il moto di rotazione del proietto abbia come risultato quello di impedire il ribaltamento dell'asse. Esso ha invece come conseguenza quella di provocare la fuoriuscita dell'asse di figura dal piano che lo contiene.

In conseguenza di ciò l'asse di figura e la tangente alla traiettoria non individuano più un piano che coincide col piano di tiro, salvo che nell'istante iniziale. In altri termini, il piano di resistenza, che è quello testè definito e che inizialmente coincide col piano di tiro, nei successivi istanti viene a formare con quest'ultimo un angolo ψ detto angolo di precessione.

Ora, poichè la resistenza dell'aria ρ_c è sempre contenuta nel piano di resi-

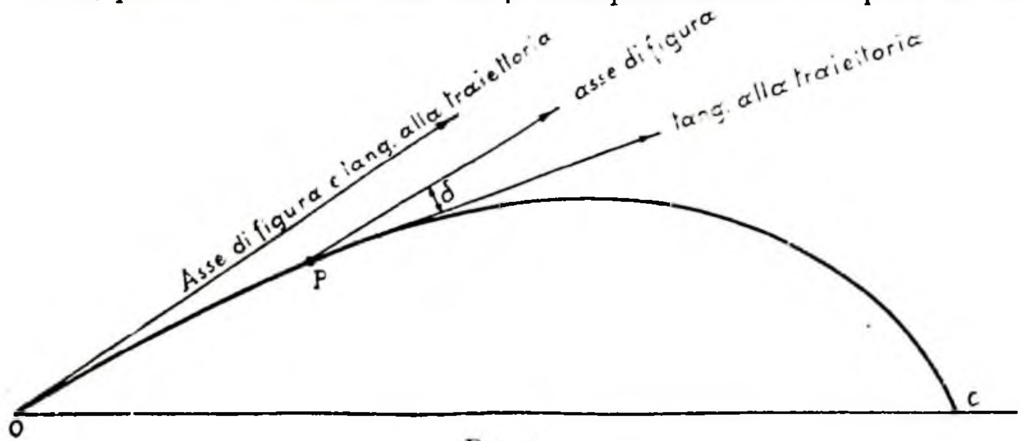


FIG. 50.

stenza, nei successivi istanti verrà anch'essa a fuoriuscire dal piano di tiro, seguendo il piano di resistenza nelle sue successive posizioni. In conseguenza la coppia rovesciante (dovuta alla resistenza dell'aria) viene in ogni istante ad agire in un piano di resistenza che ha una posizione diversa da quella precedente, ed in ciascuna di queste posizioni tende a rovesciare l'asse di figura. Per effetto del moto di rotazione attorno all'asse, in ogni

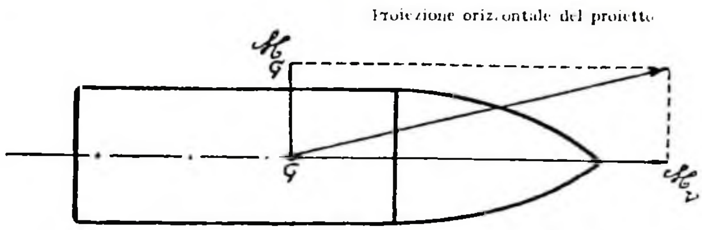


FIG. 51.

posizione del piano di resistenza, si manifesta l'azione giroscopica, provocando la fuoriuscita dell'asse dal piano che in quell'istante lo contiene ed il suo passaggio alla successiva posizione.

Nasce così il moto conico dell'asse del proietto attorno alla tangente, detto moto conico di precessione.

Per effetto del moto conico, l'asse di figura dovrebbe logicamente compire una rivoluzione completa attorno alla tangente alla traiettoria, cioè passare alternativamente a destra e a sinistra del piano di tiro Con ciò risulterebbe inspiegabile il fenomeno della derivazione, che avviene in genere da una parte sola del piano di tiro, e del quale poi si tratterà nei numeri seguenti.

Nella trattazione analitica del secondo problema balistico verrà dimostrato come effettivamente, nel caso del proietto, il moto conico non sia completo, e cioè l'angolo ψ non possa mai superare il valore $\psi = \pi$.

Dando al proietto una opportuna velocità di rotazione attorno al proprio asse, in modo da porporzionare la stabilità giroscopica alla coppia rovesciante, si può ottenere che la stabilità del proietto sulla traiettoria sia assicurata, e cioè che in ogni istante la obliquità δ risulti piccola.

c) Derivazione – Effetto Magnus.

Una seconda conseguenza della stabilità giroscopica è la cosidetta derivazione.

Fino all'istante in cui la resistenza, pur diventando obliqua si mantiene nel piano di tiro iniziale, la forza ρ è contenuta in esso. Ma quando l'asse di figura fuoriesce da questo piano, il piano di resistenza, come è noto, cessa di coincidere col piano di tiro e quindi la ρ lo segue.

Allora la ρ, supposta trasportata nel baricentro G, può essere decomposta (fig. 52-*a*) in una forza ritardatrice F_r, direttamente opposta alla velocità, ed in una forza deviatrice F_d, giacente nel piano di resistenza.

La F_d, a sua volta, può quindi essere decomposta in una F_{dr} (fig. 52-*b*) giacente nel piano di tiro, ed in una F_{dn} ad esso normale. Quest'ultima applicata al baricentro G, è quella che tende a far uscire questo dal piano iniziale di tiro, provocando il fenomeno della derivazione.

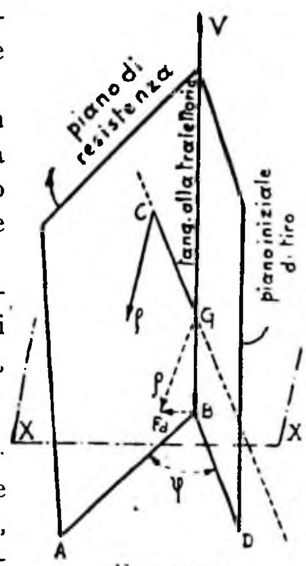


FIG. 52-*a*.

I primi studiosi del fenomeno, e fra questi il S. Robert, non riuscirono a ben vederne le cause, e quindi cercarono di spiegarlo, anzichè col fenomeno giroscopico, coll'effetto di Magnus.

In realtà può dirsi che anche quest'ultimo intervenga ma in ogni caso in misura minima, come si vedrà in appresso.

Conviene ad ogni modo chiarire in che cosa consiste l'effetto di Magnus. Sia (fig. 53) un cilindro, che ruoti, con velocità costante, attorno al proprio asse, e si supponga che esso venga investito da una corrente d'aria F. Ciò equivale evidentemente ad ammettere che l'aria sia ferma e che l'asse del cilindro si muova nella direzione di F, ma con verso contrario, con una velocità uguale a quella supposta posseduta dall'aria.

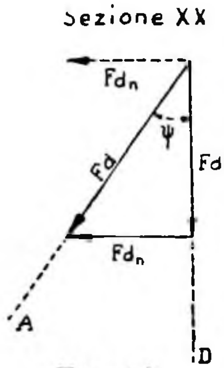


FIG. 52-b.

I filetti fluidi, all'istante dell'urto, divergono, lambendo la superficie del cilindro ed assumendo l'andamento indicato in figura. Se la velocità di rotazione propria del cilindro è p. e. sinistrorsa, poichè la superficie laterale del cilindro trascina con sè uno strato (conche) d'aria che, naturalmente, si muove nel senso delle frecce punteggiate, si ha che, in corrispondenza del punto B della periferia la velocità dei filetti fluidi si somma con quella del cilindro, mentre in corrispondenza del punto A, le due velocità, risultando di segno opposto si sottraggono.

In conclusione i filetti aderenti alla superficie in B assumono una velocità maggiore che in A. Se allora si tiene presente la già citata equazione di Bernoulli sul moto dei fluidi perfetti, che esprime in sostanza il principio della conservazione dell'energia, nel punto B si avrà minor pressione che in A.

In conseguenza di questa differenza di pressione si produce una spinta verso l'alto dell'asse del cilindro, il quale si sposterà come se fosse sollecitato anche da una forza F_1. Poichè nel fenomeno della derivazione si ha uno spostamento analogo dell'asse del proietto, i primi studiosi, e fra essi il S. Robert, attribuirono all'effetto Magnus il fenomeno stesso.

Il merito di aver corretto questa errata opinione spetta al Mayewski.

È d'altra parte intuitivo che l'influenza dell'effetto Magnus sia trascurabile nei riguardi della derivazione. Se infatti si considera la spinta massima dovuta all'effetto stesso, si vede che essa si verifica quando l'asse di figura del corpo è normale alla direzione dello spostamento. Trattandosi di proietti, dovrebbe in tal caso essere $\delta = \frac{\pi}{2}$. Se δ è piccolissimo, e ancor più se è nullo, l'equazione di Bernoulli non è più valida e quindi non è più il caso di parlare di effetto Magnus. Nei proiettili stabili, quali sono quelli considerati, il valore di δ è al massimo di pochi gradi, almeno allo stato attuale delle nostre conoscenze. Quindi assai piccola è, teoricamente, l'influenza del fenomeno Magnus sulla derivazione. Ciò è anche confermato da ricerche e valutazioni numeriche recentemente eseguite da alcuni studiosi.

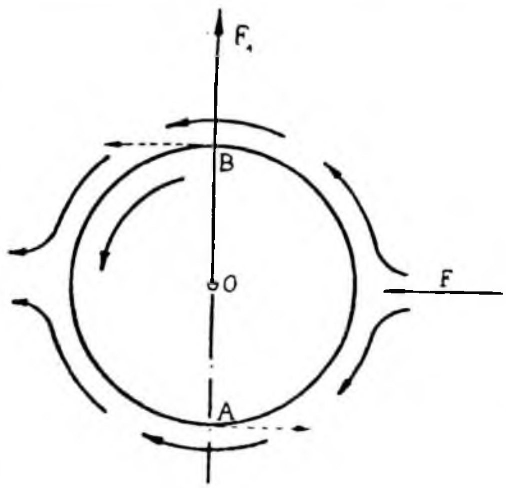


FIG. 53.

È certo però che se l'esperienza potesse far conoscere che lungo qualche arco della traiettoria, il valore di δ assume dimensioni sensibili, l'effetto Magnus non potrebbe più venir trascurato nella valutazione delle cause che determinano la derivazione.

d) TEORIA DI POISSON.

Giova esaminare l'analogia (ma non identità) esistente fra il moto del proietto e quello della trottola e dare uno sguardo alla teoria di Poisson.

Si abbia (fig. 54) un corpo di rivoluzione (trottola) che poggia con la punta G sopra un piano fisso, sia inoltre G il suo baricentro, situato, naturalmente, sull'asse di figura e nel quale possiamo considerare concentrato il peso p della trottola. In assenza di moto rotatorio e se il piano fisso non reagisse sulla punta G con una forza contraria R, la direzione del moto sarebbe quella di caduta.

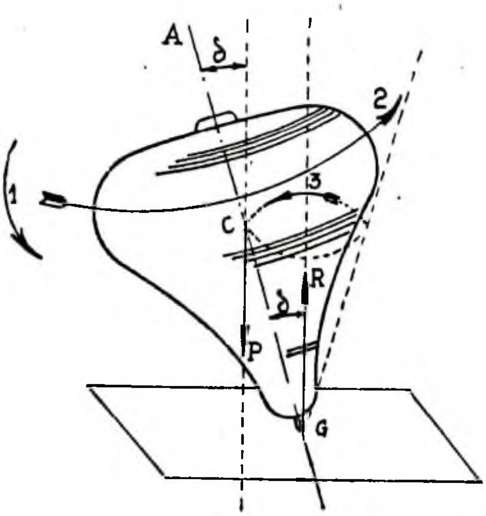


Fig. 54.

Esistendo la coppia $p - R$ la trottola ruota nel piano passante per l'asse e per la verticale del punto fisso G, nel senso indicato dalla freccia 1. Imprimendo alla trottola un rapidissimo moto di rotazione attorno al proprio asse, nel senso indicato dalla freccia 2, i due moti rotatori si compongono, l'obliquità δ dello asse della trottola sulla verticale anzidetta non cresce rapidamente e la trottola non si abbatte, finchè il moto rotatorio ha considerevole valore.

Non solo, ma mentre la trottola gira rapidamente intorno all'asse di figura, inizialmente verticale, questo gira lentamente e nello stesso senso (freccia 3) intorno alla verticale passante per il punto di appoggio, descrivendo una superficie conica, e nello stesso tempo compie piccole oscillazioni quasi impercettibili attorno ad un asse istantaneo passante per il punto d'appoggio e perpendicolare al piano verticale che passa per l'asse di figura.

In altri termini l'asse di figura non cade ma si sposta in direzione normale al piano che contiene la verticale e la linea di azione del peso. Nasce cioè il moto conico di precessione.

Generalizzando quindi si può dire di essere nel caso di un corpo di rivoluzione animato da una velocità di rotazione propria e soggetto a una forza che ha un momento non nullo rispetto al punto fisso G. Tale forza rovescerebbe il corpo se non si eccitasse la reazione giroscopica in direzione normale al piano di rovesciamento.

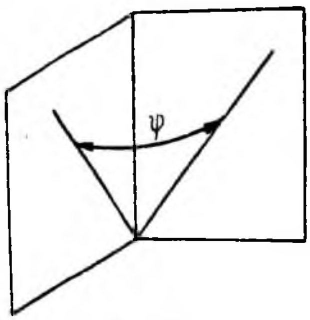


Fig. 55.

Tra il corpo di rivoluzione così considerato ed il proietto si può stabilire una analogia ma non un'identità, come credeva il S. Robert. Nel moto della trottola, infatti, se l'asse di figura ruota di moto conico esso deve possedere una velocità angolare di rotazione.

Chiamando con ψ (fig. 55) l'angolo di precessione (che è l'angolo che il piano che contiene l'asse di figura nell'istante che si considera fa col piano che lo conteneva inizialmente), esso varierà da 0 e 2π.

Inoltre la precessione sarà più o meno rapida a secondo che ψ, nell'inter-

vallo considerato, crescerà più o meno rapidamente. La velocità angolare di rotazione dell'asse della trottola è data quindi da

$$\frac{d\psi}{dt} = \psi'$$

Poisson nella sua teoria del fenomeno, trovò

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{M}{I\,r\,\mathrm{sen}\,\delta} = \mathrm{cost}$$

dove:

M = Momento del peso rispetto al punto G
I = momento d'inerzia assiale del corpo
r = velocità angolare di rotazione attorno all'asse
δ = obliquità.

In realtà il valore trovato da Poisson non è costante perchè ci sono gli attriti dovuti alla resistenza dell'aria, che smorzano la reazione della trottola.

Quest'ultima quindi, nel moto di precessione, compie rivoluzioni complete intorno alla verticale passante per il punto fisso G. Senonchè negli istanti che man mano si succedono, gli attriti smorzano la velocità angolare di rotazione della trottola.

Allora δ cresce, in quanto il rapporto fra la grandezza della coppia di rotazione della trottola e quella della coppia perturbatrice (costituita dal peso e dalla reazione del punto fisso), va diminuendo. Però $\frac{d\psi}{dt}$ va aumentando, perchè la diminuzione di r è assai maggiore dell'aumento di sen δ. Si arriva, in tali condizioni di moto, ad un istante in cui la trottola cade. E ciò avviene quando il momento rotatorio si annulla, cioè l'anzidetto rapporto fra questo ed il momento perturbatore diviene uguale a zero. Se, come voleva S. Robert, un fenomeno identico a quello della trottola si verificasse anche per il proietto, questo dovrebbe compiere col suo asse interi giri attorno alla tangente alla traiettoria.

La forza deviatrice in tal caso tenderebbe a far uscire il baricentro del proietto alternativamente a destra e a sinistra del piano di resistenza. La proiezione orizzontale della traiettoria sarebbe una linea sinuosa, contrariamente a quanto si verifica in pratica per la derivazione.

La soluzione della questione è dovuta al Mayewski, il quale ha dimostrato che, a differenza di quello che succede nella trottola, l'asse di figura del proietto si mantiene sempre dalla stessa parte del piano di tiro, e l'angolo ψ non supera mai il valore π radianti.

Il proietto quindi descrive, attorno alla tangente, appena mezzo cono al massimo, mentre la trottola ne descrive uno intero attorno alla verticale passante per il punto di appoggio sul piano fisso.

Quanto sopra porta a concludere che fra il moto del proietto e quello della trottola non vi è identità ma solo analogia, come si è precedentemente affermato.

Che ciò sia è d'altra parte intuitivo.

Nella trottola infatti la forza peso è costante, mentre nel proietto la resistenza dell'aria, che ad esso corrisponde, è una funzione della velocità, e, come tale, variabile.

Nella trottola la precessione avviene attorno a una retta fissa che è la verticale passante per il punto di appoggio, mentre nel proietto tale retta è mobile, essendo costituita dalla tangente alla traiettoria. Il S. Robert, la cui trattazione è pertanto manchevole, ed anche il Mayewski, trattarono analiticamente il problema del proietto come quello della trottola, applicando cioè le equazioni di Eulero, che sono valevoli solo se il moto avviene attorno a una retta fissa, ossia se ci si riferisce ad un sistema invariabile di assi coordinati.

L'errore che in tal modo si commette è tanto più piccolo quanto più il tiro è teso, perchè allora la tangente alla traiettoria varia poco. La presente trattazione conduce invece ad una formula della velocità di precessione identica a quella della trottola, meno un termine che dà ragione della legge di Mayewski.

e) Effetto giroscopico.

Giova ora formarsi una chiara idea dell'effetto giroscopico.

Esso consiste, come si è detto, in un fenomeno per cui un corpo di rivoluzione, dotato di elevata velocità di rotazione intorno al proprio asse di figura, reagisce ad ogni azione che tenda a spostare questo asse in senso tale da aversi la fuoriuscita dell'asse stesso normalmente al piano in cui avviene lo spostamento. Si tratta, cioè, di un fenomeno di inerzia che può essere spiegato con un esempio, semplicissimo.

Sia (fig. 56) un disco sottilissimo rotante attorno ad un asse contenuto nel piano di figura, con velocità angolare costante.

Se si devia l'asse OP in OP', facendolo rotare attorno alla retta QQ', normale al piano di figura, la nuova posizione OP' sarà anch'essa contenuta nel piano stesso.

Il disco allora roterà attorno alla QQ', mantenendosi normale a OP'.

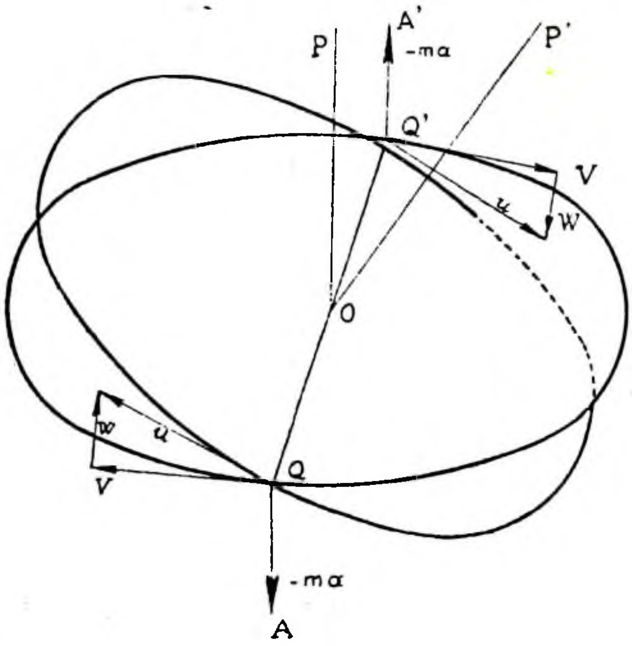


Fig. 56.

Consideriamo ora i due punti Q e Q'. Essi, finchè l'asse di rotazione è OP posseggono una velocità di rotazione v tangente al disco.

Quando l'asse si sposta in OP', la velocità di detti punti diventa quella u, diretta secondo la tangente alla nuova posizione del disco. Suppongasi che tanto u quanto v abbiano la stessa grandezza, cioè il modulo della velocità non muti nel cambiamento di posizione: sarà però mutata la sua direzione.

Ciò significa, in conclusione, che c'è stata ugualmente una variazione di velocità; quindi deve essere intervenuta una accelerazione w che, sommata colla v, deve dare la nuova velocità u.

Per la legge d'inerzia ogni massa tende a rimanere nello stato di quiete o di moto in cui si trova. In particolare, se la massa è in movimento ed ha una data velocità, per far variare quest'ultima occorre imprimere alla massa una accelerazione, vale a dire, intervenire con una forza, essendo:

$$f = ma$$

Ma per la legge d'azione e reazione, la massa reagisce a questo intervento con una forza uguale e contraria.

$$f = -f = -ma$$

Ora poichè, come si è detto, nel caso del disco interviene una accelerazione per il solo fatto che la velocità cambia di direzione, nei punti Q e Q' nascono delle reazioni di inerzia date dalle masse concentrate in detti punti, moltiplicate per w e rappresentate in figura dai vettori:

$$(A - Q); \qquad (A' - Q')$$

Tali reazioni determinano una coppia di inerzia che agisce in un piano perpendicolare al piano di figura. Ed allora, mentre si esercita lo sforzo per spostare l'asse OP in OP', nel piano di figura, si eccita una reazione che tende a far uscire l'asse in direzione normale al piano stesso.

Ciò consente di dedurre che la reazione giroscopica non si oppone direttamente alla causa che la provoca, nel senso di far ritornare l'asse nella posizione iniziale, ma tende solo a tirar fuori l'asse dal piano in cui è contenuto.

Lo stesso ragionamento fatto per i punti Q e Q' vale per qualsiasi coppia di punti del disco, quindi qualunque sia il piano in cui si trova lo spostamento dell'asse di figura. Se il disco in questione non possedesse velocità di rotazione propria, evidentemente la reazione giroscopica non verrebbe eccitata, perchè l'accelerazione normale w sarebbe nulla (essendo $u = v = 0$) e quindi verrebbe a mancare la reazione di inerzia.

Tutti gli apparecchi giroscopici oggi in uso sono fondati sul principio più sopra chiarito.

È poi evidente che le considerazioni svolte per il disco possono essere applicate al proietto.

Per la trattazione completa del 2° problema balistico si veda « Burzio » *Complementi di balistica esterna* – già citato nella prefazione.

CAPITOLO IV

PROPRIETÀ GENERALI DELLA TRAIETTORIA

1 – Premesse.

Il moto di rotazione del proietto attorno al suo centro di gravità non può essere trattato indipendentemente da quello di traslazione; però, così facendo, si va incontro ad espressioni analitiche molto complesse che non è possibile integrare. È bensì vero che De Sparre, S. Robert e Mayewski tennero conto dell'angolo formato dalla direzione della velocità con l'asse del proietto, ma nelle loro espressioni della resistenza dovettero supporre che questo fosse zero, perchè in caso contrario essi pervenivano ad espressioni complicate e non riducibili a quadrature.

D'altra parte la derivazione nei casi ordinari ha un valore sempre molto piccolo nei confronti della gittata e quindi non si commette errore sensibile trascurandola, tanto più che, come si vedrà in seguito, nella risoluzione del 1° problema balistico noi introdurremo un tal coefficiente, il quale ha lo scopo di far andare d'accordo i risultati sperimentali colle formule e quindi con detto coefficiente si tiene conto anche dell'errore commesso trascurando la derivazione.

È quindi per lo meno azzardata la conclusione alla quale è pervenuto qualcuno secondo la quale il 1° problema balistico non ha ancora avuto una soluzione soddisfacente.

2 – Equazioni differenziali.

Ciò posto, la traiettoria, se si astrae dal moto di precessione e cioè si considera la resistenza diretta, sarà una curva piana poichè il centro di gravità del proietto è sollecitato dalla forza peso e dalla resistenza, forze che giacciono ambedue nel piano verticale contenente l'asse del pezzo; e giacchè non subentra alcuna forza che sposti il centro di gravità del proietto da detto piano, esso continuerà a muoversi nel piano verticale.

In conseguenza di ciò, noi riferiremo sempre la traiettoria a due assi x e y passanti per l'origine, il primo orizzontale e l'altro verticale.

Consideriamo il punto M il quale sarà soggetto, oltre che alla velocità v, ad una forza p diretta in basso, ed alla forza $-\frac{p}{g} f(v)$ direttamente opposta al moto (fig. 57).

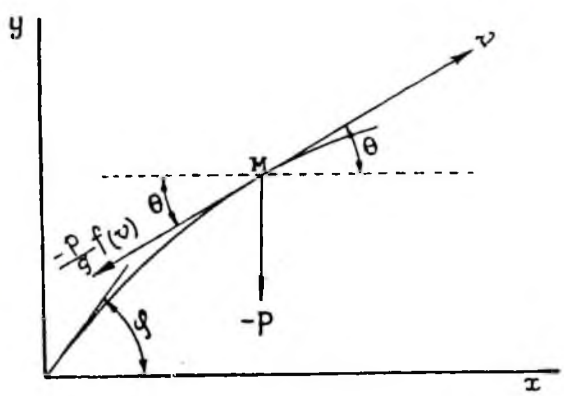


FIG. 57.

Siccome sappiamo che

$$f = m \cdot a$$

per l'equilibrio secondo l'asse delle x e quello delle y, dovrà essere:

$$\frac{p}{g}\frac{d\,(v\cos\theta)}{dt} = -\frac{p}{g}f\,(v)\cos\theta$$

$$\frac{p}{g}\frac{d\,(v\,\mathrm{sen}\,\theta)}{dt} = -\frac{p}{g}f\,(v)\,\mathrm{sen}\,\theta - p$$

e considerando le accelerazioni

$$\frac{d\,(v\cos\theta)}{dt} = -f\,(v)\cos\theta \qquad [1]$$

$$\frac{d\,(v\,\mathrm{sen}\,\theta)}{dt} = -f\,(v)\,\mathrm{sen}\,\theta - g \qquad [2]$$

Moltiplicando la [1] per $v\,\mathrm{sen}\,\theta\,dt$ e la [2] per $v\cos\theta\,dt$ si ha:

$$v\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\,(v\cos\theta) = -f\,(v)\,v\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\,dt \qquad [1']$$

$$v\cos\theta\,d\,(v\,\mathrm{sen}\,\theta) = -f\,(v)\,v\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\,dt - gv\cos\theta\,dt \qquad [2']$$

e sottraendo la [1'] dalla [2']

$$v\cos\theta\,d\,(v\,\mathrm{sen}\,\theta) - v\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\,(v\cos\theta) = -gv\cos\theta\,dt$$

e dividendo per $v^2\cos^2\theta$

$$\frac{v\cos\theta\,d\,(v\,\mathrm{sen}\,\theta) - v\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\,(v\cos\theta)}{v^2\cos^2\theta} = -g\,\frac{dt}{v\cos\theta}$$

Il 1° membro è della forma

$$\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2} = d\left(\frac{x}{y}\right)$$

quindi sarà

$$d\left(\frac{v\,\mathrm{sen}\,\theta}{v\cos\theta}\right) = -g\,\frac{dt}{v\cos\theta} = dtg\,\theta = \frac{d\,\theta}{\cos^2\theta}$$

$$gdt = -v\cos\theta\,\frac{d\,\theta}{\cos^2\theta} = -\frac{v\,d\,\theta}{\cos\theta} \qquad [3]$$

d'altra parte sappiamo che

$$\frac{dx}{dt} = v\cos\theta\,; \qquad \frac{dy}{d\,t} = v\,\mathrm{sen}\,\theta\,; \qquad \frac{ds}{dt} = v \qquad [4]$$

quindi

$$\left.\begin{aligned} gdx &= v\cos\theta\,gdt = -v\cos\theta\,v\,\frac{d\,\theta}{\cos\theta} = -v^2d\,\theta \\ gdy &= v\,\mathrm{sen}\,\theta\,gdt = -v^2tg\,\theta\,d\,\theta \\ gds &= vgdt = -\frac{v^2d\,\theta}{\cos\theta} \end{aligned}\right\} \qquad [5]$$

Dalla

$$\frac{d\,(v \cos\theta)}{dt} = -f\,(v)\cos\theta$$

si deduce

$$gd\,(v\cos\theta) = -f\,(v)\cos\theta\, g dt = f\,(v)\cos\theta\,\frac{v d\theta}{\cos\theta}$$

e cioè

$$gd\,(v\cos\theta) = v f\,(v)\,d\,\theta \qquad [6]$$

Siamo perciò pervenuti al sistema di equazioni [5] e [6] che si indica generalmente col nome di « sistema di S. Robert » e che è fondamentale nella balistica.

Di tutte queste equazioni la più importante è la [6], detta equazione dell'odografa, e ciò perchè essa contiene, a differenza delle altre, due sole variabili v e θ. La v entra anche in forma trascendente con la funzione $f\,(v)$; però, se fosse possibile assegnare ad $f\,(v)$ una forma sempre riducibile alle quadrature, si potrebbe ricavare una relazione fra v e θ che sostituita nelle altre 4 equazioni di S. Robert, permetterebbe il calcolo di x, y, t, s.

Come si vedrà in seguito, ciò non è sempre possibile; però vi sono delle forme di $f\,(v)$ per le quali l'equazione dell'odografa è riducibile alle quadrature e quindi, per queste forme, il problema balistico è risolto.

Prima di studiare le proprietà generali della traiettoria, vediamo qualche proprietà di questa odografa.

3 - Odografa.

In meccanica si chiama odografa quella curva per la quale il raggio congiungente un qualsiasi punto di essa con un punto fisso rappresenta in grandezza e direzione la velocità del mobile in quel punto.

Nel moto odografo quindi la velocità è uguale alla accelerazione del moto dato.

Vediamo ora di ricavare, come applicazione, l'equazione dell'odografa data da S. Robert relativa ad un punto materiale che si muove in un mezzo resistente.

Siano OH ed OK due vettori indicanti la grandezza e la direzione della velocità in due istanti successivi, e queste velocità formino gli angoli θ e $\theta - d\,\theta$ con l'orizzontale (fig. 58).

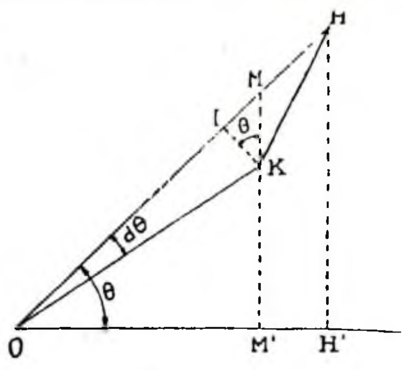


FIG. 58.

Il segmento HK rappresenti in grandezza e direzione l'incremento della velocità nel passaggio dalla direzione OH a quella OK; questo incremento sarà dovuto: parte all'accelerazione della gravità, diretta verticalmente in basso, e parte alla resistenza del mezzo, direttamente opposta alla velocità; cioè KH deriverà dalla composizione di $KM = -gdt$ ed $HM = -f\,(v)\,dt$, se dt è il tempuscolo considerato ed occorrente per passare da H a K.

Il segmento $KI = vd\,\theta = MK\cos\theta = -g\,dt\cos\theta$ da cui

$$dt = -\frac{vd\,\theta}{g\cos\theta}$$

La variazione orizzontale della velocità è data da $M'H'$ ove

$$M'H' = MH \cos\theta = d\,(v \cos\theta) = -f(v)\,dt \cos\theta$$

quindi:

$$d\,(v\cos\theta) = -f(v)\cos\theta\,dt$$

ma

$$dt = -\frac{v d\theta}{g\cos\theta}$$

quindi:

$$d\,(v\cos\theta) = -f(v)\cos\theta\left(-\frac{v d\theta}{g\cos\theta}\right)$$

$$g d\,(v\cos\theta) = f(v)\,d\theta$$

che è appunto l'equazione dell'odografa data da S. Robert.

La costruzione della curva rappresentante l'odografa del moto, quando si conoscano la velocità e l'accelerazione di esso su ogni punto della traiettoria, è assai agevole.

Nella fig. 59-*a* sono indicati nei punti 1, 2, 3, 4, 5, 6 in direzione, i vettori rappresentativi della velocità, che nella fig. 59-*b*, curva dell'odografa, corrispondono, in direzione e grandezza, rispettivamente ai segmenti *OA*, *OP*, *OB*, *OC*, *OD*, *OE*.

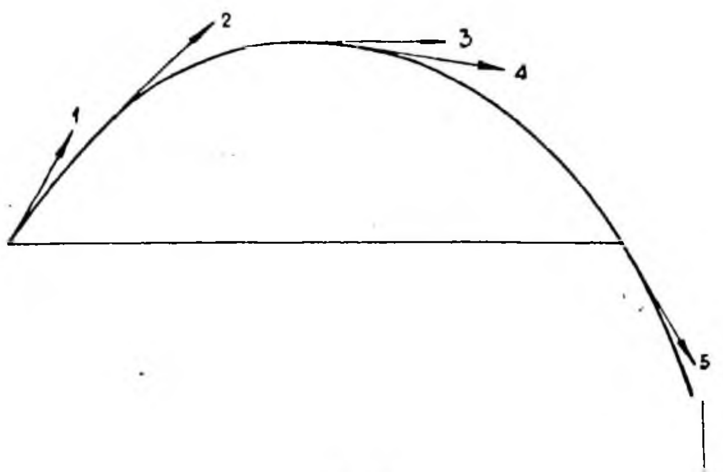


Fig. 59 *a*.

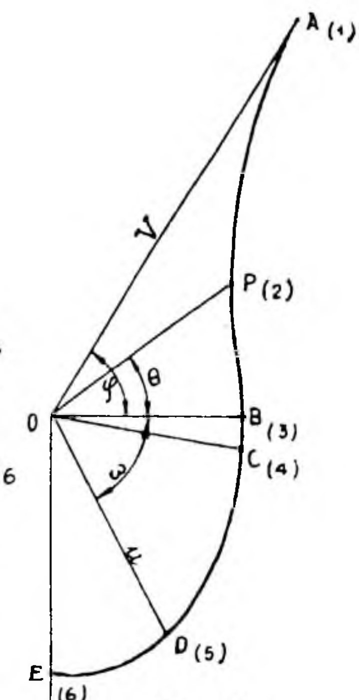


Fig. 59 *b*.

Il segmento *OA* rappresenta la velocità iniziale *V*, quindi l'angolo $AOB = \varphi$. Il raggio vettore *OP* corrisponde al punto generico 2 del ramo ascendente; l'angolo *POB* è quindi il generico angolo θ.

Il segmento orizzontale *OB* rappresenta la velocità in corrispondenza del vertice.

Il raggio vettore *OC*, rappresenta la velocità minima; il raggio vettore *OD* rappresenta la velocità di caduta *U*, cui corrisponde l'angolo di caduta ω. Finalmente il tratto *OE* rappresenta la velocità finale, per la quale $\theta = -90°$ come si vedrà più avanti.

In particolare nel vuoto se si considera che

$$f(v) = 0 \qquad d(v \cos \theta) = 0 \qquad v \cos \theta = \text{cost}$$

il che era già noto, l'odografa del moto è una verticale passante a distanza $V \cos \varphi = v \cos \theta = K$ dall'origine.

4 - Odografa della velocità orizzontale e verticale.

Come si è fatto per l'odografa della velocità totale v, si può studiare l'odografa del moto orizzontale e quella del moto verticale cioè l'odografa di $v \cos \theta$ e quella di $v \,\text{sen}\, \theta$.

Dalla $g d(v \cos \theta) = v f(v) \, d\theta$ sviluppando si ha

$$g \cos \theta \, dv - g v \,\text{sen}\, \theta \, d\theta = v f(v) \, d\theta$$

da cui si ricava

$$\frac{dv}{d\theta} = \frac{1}{g \cos \theta} (g v \,\text{sen}\, \theta + v f(v))$$

ed ancora

$$\frac{dv}{d\theta} = \frac{1}{\cos \theta} \left(v \,\text{sen}\, \theta + \frac{v f(v)}{g} \right) = \frac{v}{\cos \theta} \left(\frac{f(v)}{g} + \text{sen}\, \theta \right) \qquad [7]$$

Per la velocità orizzontale $v \cos \theta$ sostituendo si ha

$$\frac{d(v \cos \theta)}{d\theta} = \frac{v f(v)}{g} \qquad [8]$$

e per la velocità verticale dalla $\frac{d(v \,\text{sen}\, \theta)}{dt} = - f(v) \,\text{sen}\, \theta - g$ si ricava

$$\frac{d(v \,\text{sen}\, \theta)}{d\theta} = \frac{v}{\cos \theta} \left(\frac{f(v)}{g} \,\text{sen}\, \theta + 1 \right) \qquad [9]$$

Indicando τ_v, $\tau_{v \cos \theta}$, $\tau_{v \,\text{sen}\, \theta}$ le tangenti rispettivamente alle curve v, $v \cos \theta$, $v \,\text{sen}\, \theta$ e ricordando che $\frac{v d\theta}{dv} = \tau$ si ha:

$$\tau_v = \frac{g \cos \theta}{f(v) + g \,\text{sen}\, \theta} \qquad [10]$$

$$\tau_{v \cos \theta} = \frac{g \cos \theta}{f(v)} \qquad [11]$$

$$\tau_{v \,\text{sen}\, \theta} = \frac{g \cos \theta \,\text{sen}\, \theta}{f(v) \,\text{sen}\, \theta + g} \qquad [12]$$

La fig. 60 rappresenta le curve odografe v; $v \cos \theta$; $v \,\text{sen}\, \theta$, le quali hanno uno stesso raggio vettore asintotico θ.

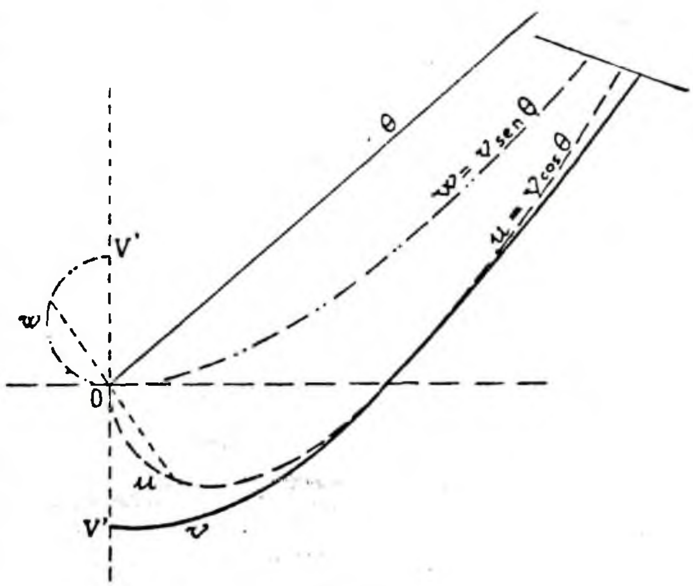


FIG. 60

5 - Forma della traiettoria.

Iniziamo ora lo studio delle proprietà generali della traiettoria, la cui conoscenza è di grandissima importanza.

a) La traiettoria volge la concavità in basso.

Infatti le forze agenti sul proietto sono: la resistenza, che non fa altro che ritardare il moto; e la forza peso, che tende ad abbassare il proietto. L' inclinazione θ va continuamente diminuendo, ma non può scendere al disotto di $-\frac{\pi}{2}$.

b) Velocità orizzontale.

Si è visto che

$$\frac{d\,(v\cos\theta)}{dt} = -f(v)\cos\theta$$

quindi perchè è sempre $f(v)\cos\theta > 0$ sarà $\frac{d\,(v\cos\theta)}{dt} < 0$, cioè l'accelerazione orizzontale sarà negativa, e la velocità orizzontale andrà decrescendo.

Vedremo a suo tempo che si ridurrà a zero all'estremità del ramo discendente.

c) Inclinazione in punti di eguale altezza.

Vediamo ora come sono le inclinazioni nei punti A e D posti ad eguale altezza y (fig. 61).

Dalla $g\,dy = -v^2 \operatorname{tang}\theta\, d\theta$, dividendo tutto per $v^2\cos^2\theta$ si ha:

$$\frac{g\,dy}{v^2\cos^2\theta} = -tg\,\theta\,\frac{d\,\theta}{\cos^2\theta} = -tg\,\theta\, d\,(tg\,\theta)$$

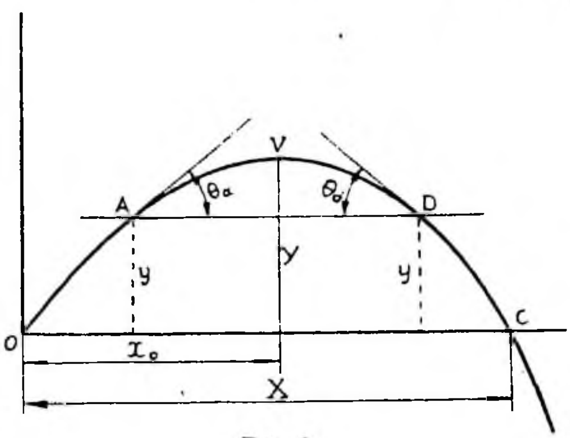


Fig. 61.

Integriamo da A a V

$$\int_y^Y \frac{g\,dy}{(v^2\cos^2\theta)_a} = -\int_{\theta_a}^{0} tg\,\theta\, dtg\,\theta = \frac{1}{2}\, tg^2\,\theta_a \qquad [13]$$

e da V a D

$$\int_Y^y \frac{g\,dy}{(v^2\cos^2\theta)_d} = -\int_0^{\theta_d} tg\,\theta\, dtg\,\theta$$

ed invertendo i limiti

$$\int_y^Y \frac{g\,dy}{(v^2\cos^2\theta)_d} = \int_{\theta_d}^{0} tg\,\theta\, dtg\,\theta = \frac{1}{2}\, tg^2\,\theta_d \qquad [14]$$

Considerando i primi membri della [13] e della [14], essi hanno gli stessi limiti, però nella [13] $(v\cos\theta)_a$ è maggiore di $(v\cos\theta)_d$ e quindi l'integrale nella [13] è minore per cui

$$\frac{1}{2}\, tg^2\,\theta_a < \frac{1}{2}\, tg^2\,\theta_d \qquad \theta_a < \theta_d$$

d) ASCISSE IN PUNTI DI EGUALE ALTEZZA.

Per una curva qualunque si ha $dx = \frac{dy}{tg\,\theta}$

Per i punti A e D posti ad eguale altezza sarà

$$\int_{x_1}^{x_0} dx = \int_y^Y \frac{dy}{tg\,\theta} \qquad x_0 - x_1 = \int_y^Y \frac{dy}{tg\,\theta}$$

$$\int_{x_0}^{x_2} dx = \int_Y^y \frac{dy}{tg\,\theta} \qquad x_2 - x_0 = \int_Y^y \frac{dy}{tg\,\theta} = \int_y^Y \frac{dy}{tg\,(-\theta)}$$

Ma dato che

mod ($tg\,\theta$) nel ramo ascendente è minore di mod $tg\,(-\theta)$ nel ramo discendente

mod (dy) nel ramo ascendente = mod (dy) nel ramo discendente

si ha che

Ogni elemento $\frac{dy}{tg\,\theta}$ del ramo ascendente è maggiore del corrispondente elemento $\frac{dy}{tg\,(-\theta)}$ del ramo discendente (notisi che nel ramo discendente ambi i termini dy ed $tg\,(-\theta)$ sono negativi, e quindi il loro rapporto è positivo); ne deriva che

$$\int_y^Y \frac{dy}{tg\,\theta} > \int_Y^y \frac{dy}{tg\,(-\theta)}$$

e) LIMITI NELL'ALTEZZA DEL TIRO.

Se sulla gittata X ottenuta nell'aria con un angolo di proiezione φ e di caduta ω si costruiscono due parabole aventi angoli di proiezione φ ed ω, e passante per gli stessi punti O e C, la traiettoria nell'aria sarà tutta sopra la prima e tutta sotto la seconda (fig. 62).

Ora il vertice della prima è ad altezza $\frac{1}{4} X\,tg\,\varphi$, mentre quello dell'altra è ad $\frac{1}{4} X\,tg\,\omega$.

Il vertice della traiettoria nell'aria essendo compreso fra i due anzidetti, sarà approssimativamente uguale ad

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} X\,tg\,\varphi + \frac{1}{4} X\,tg\,\omega\right) = \\ = \frac{1}{8} X\,(tg\,\varphi + tg\,\omega)$$

Questa formula trova impiego nel tiro nell'aria, per calcolare la graduazione della spoletta, nel qual caso il valore di y dell'aria non è richiesto con eccessiva precisione.

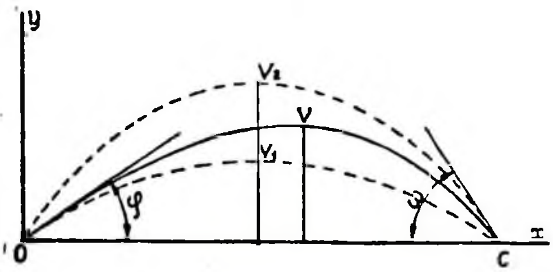


FIG. 62.

f) VELOCITÀ VERTICALE ED ASSOLUTA IN PUNTI DI EGUALE ALTEZZA.

Abbiamo già visto come varia la velocità orizzontale; vediamo ora come stanno fra loro le velocità verticali per punti d'egual altezza.

Dalla relazione

$$\frac{d\,(v \operatorname{sen} \theta)}{dt} = -f\,(v) \operatorname{sen} \theta - g$$

moltiplicando per $v \operatorname{sen} \theta\, dt$ sarà

$$d\,(v \operatorname{sen} \theta) \cdot v \operatorname{sen} \theta = \frac{1}{2}\, d\,(v \operatorname{sen} \theta)^2 = -f\,(v) \operatorname{sen} \theta \cdot v \operatorname{sen} \theta\, dt - gv \operatorname{sen} \theta\, dt$$

Integrando da A a D sarà

$$\int_{(v \operatorname{sen} \theta)_A}^{(v \operatorname{sen} \theta)_D} \frac{1}{2}\, d\,(v \operatorname{sen} \theta)^2 = \int_{t_1}^{t_2} - f\,(v) \operatorname{sen}^2 \theta\, v\, dt - \int_{t_1}^{t_2} gv \operatorname{sen} \theta\, dt$$

ed osservando che per punti d'egual altezza:

$$\int_{t_1}^{t_2} gv \operatorname{sen} \theta\, dt = \int_{y_1}^{y_2} g dy = 0$$

si ha:

$$\frac{1}{2}\,(v \operatorname{sen} \theta)^2_D - \frac{1}{2}\,(v \operatorname{sen} \theta)^2_A = - \int_{t_1}^{t_2} f\,(v)\, v \operatorname{sen}^2 \theta\, dt$$

Il 2° membro è sempre negativo, quindi dovrà essere

$$(v \operatorname{sen} \theta)_A > (v \operatorname{sen} \theta)_D$$

per cui per punti posti ad egual altezza la velocità verticale è maggiore nel ramo ascendente che nel ramo discendente.

Evidentemente, per gli stessi punti, la velocità orizzontale è maggiore, nel ramo ascendente, di quella del ramo discendente, quindi la risultante delle due velocità, cioè la *velocità totale, è sempre maggiore nel ramo ascendente per punti posti ad egual altezza.*

g) Tempi in punti di eguale altezza.

Dalla

$$\frac{dy}{dt} = v \operatorname{sen} \theta \qquad dt = \frac{dy}{v \operatorname{sen} \theta}$$

$$\int_0^{t_v} dt = \int_0^{Y} \frac{dy}{v \operatorname{sen} \theta} = t_v \qquad \int_0^{T-t_v} dt = \int_0^{Y} \frac{dy}{v \operatorname{sen} \theta} = T - t_v$$

Si hanno gli stessi limiti, ed il limite inferiore è minore di quello superiore, quindi gli integrali contengono ugual numero di elementi. Ma $v \operatorname{sen} \theta$ nel ramo ascendente è maggiore di quello del ramo discendente, quindi, essendo esso al denominatore, risulterà $t_v < T - t_v;\ t_v < \frac{T}{2}$.

Lo stesso dicasi se invece di considerare il vertice, si considerano due punti posti ad egual altezza, cioè

$$t_1 = \int_{y_1}^{y_2} \frac{dy}{v \operatorname{sen} \theta}; \qquad t_2 = \int_{y_2}^{y_1} \frac{dy}{v \operatorname{sen}(-\theta)}$$

$$t_1 < t_2$$

Per cui *il tempo impiegato a percorrere un arco qualunque del ramo ascendente è minore di quello impiegato a percorrere il corrispondente arco del ramo discendente,* ed in particolare il tempo che impiega il proietto a giungere dall'origine al vertice è minore di quello impiegato a giungere dal vertice al punto di caduta.

h) L'ESTREMITÀ DEL RAMO DISCENDENTE È VERTICALE.

Dalla $g\,dt = -\frac{v d\theta}{\cos\theta}$, moltiplicando numeratore e denominatore del 2° membro per $v\cos\theta$ si ha

$$gdt = -v\cos\theta\,\frac{d\theta}{\cos^2\theta} = -v\cos\theta\, dtg\,\theta$$

Integrando dall'origine ad un punto qualunque

$$gt = -\int_{\varphi}^{\theta} v\cos\theta\, d\cdot tg\,\theta = -(\overline{v\cos\theta})\int_{\varphi}^{\theta} d\, tg\,\theta$$

avendo indicato con $\overline{v\cos\theta}$ un valore medio che la funzione assume entro i limiti di integrazione (teorema del valore medio); in tal caso risulta

$$gt = \overline{v\cos\theta}\,(tg\,\varphi - tg\,\theta)$$

All'estremità del ramo discendente è $t = \infty$. Quindi il 2° membro pure dovrà essere infinito, ma poichè $v\cos\theta$ e $tg\,\varphi$ sono due quantità finite, dovrà essere $tg\,\theta = -\infty$ nel ual caso è

$$\theta = -\frac{\pi}{2}$$

ossia l'estremità del ramo discendente è verticale.

i) VELOCITÀ MINIMA.

Se consideriamo il punto P della traiettoria descritta nell'aria dal proietto, su esso agiscono le accelerazioni $f(v)$ (ritardazione) direttamente opposta alla velocità e g (accelerazione di gravità) diretta in basso (fig. 63).

Scrivendo la condizione d'equilibrio lungo la tangente dovrà essere

$$\frac{dv}{dt} = -f(v) - g\,\text{sen}\,\theta$$

Esaminando questa relazione, vediamo che dall'origine al vertice è $-f(v) < 0$, e $-g\,\text{sen}\,\theta < 0$ quindi sarà necessariamente $\frac{dv}{dt} < 0$, l'accelerazione è negativa, per cui la velocità corrispondente sarà decrescente.

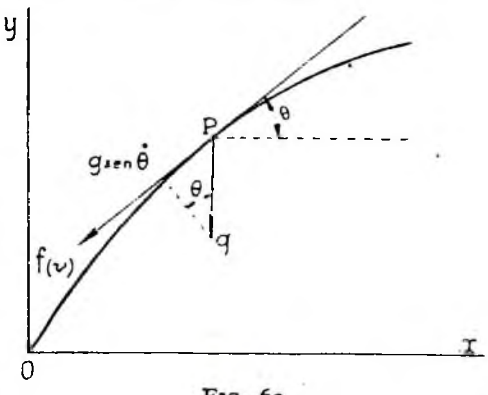


FIG. 63.

Nel vertice $\operatorname{sen}\theta = 0$ quindi

$$\frac{dv}{dt} = -f(v) < 0$$

e la velocità andrà ancora decrescendo.

Dopo il vertice, $-g \operatorname{sen}\theta > 0$; $-f(v) < 0$, per cui si giungerà ad un pun
in cui

$$-f(v) + g \operatorname{sen}\theta = \frac{dv}{dt} = 0$$

In questo punto la velocità avrà un minimo od un limite.

Per determinarne la natura bisogna farne la 2ª derivata

$$\frac{d^2v}{dt^2} = -f'(v)\frac{dv}{dt} + g\cos\theta\frac{d\theta}{dt}$$

e poichè

$$g\,dt = -\frac{v\,d\theta}{\cos\theta}; \qquad \frac{d\theta}{dt} = -\frac{g\cos\theta}{v}$$

$$\frac{d^2v}{dt^2} = -f'(v)\frac{dv}{dt} + \frac{g^2\cos^2\theta}{v};$$

ma nel punto che si considera $\frac{dv}{dt} = 0$ quindi

$$\frac{d^2v}{dt^2} = \frac{g^2\cos^2\theta}{v} > 0$$

sempre, quindi si tratta di un minimo, se non è $v_1 = 0$; $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$, dove l'indi
indica valori del punto in cui $\frac{dv}{dt} = 0$.

Ora v_1 non può essere zero, poichè se così fosse sarebbe $f(v_1) = 0$ e qu
dalla

$$f(v_1) + g \operatorname{sen}\theta_1 = 0; \operatorname{sen}\theta_1 = 0 \qquad \theta_1 = 0$$

ed il punto corrisponderebbe al vertice, ciò che invece è da escludersi.

Può pure essere dimostrato che $\theta_1 \neq \frac{\pi}{2}$, ma noi ometteremo la dimostrazi

In base a quanto è stato detto, il punto di minima velocità si troverà
ramo discendente, in un punto con θ tanto più grande quanto più è granc
ritardazione.

Notando che nel punto di caduta l'accelerazione tangenziale è

$$\frac{dv}{dt} = -f(U) + g \operatorname{sen}\omega$$

il punto di minima velocità coincide col punto di caduta se $f(U) = g \operatorname{sen}$
prima se $f(U) > g \operatorname{sen}\omega$, è dopo se $f(U) < g \operatorname{sen}\omega$.

Applicazione.

Cannone da 149/35; Granata inglese; $V = 255$ m/s; $\delta i = 1$; $C = 1{,}872$.
terminare per quale traiettoria il punto di minima velocità coincide col p
di caduta.

$$-\frac{\delta i}{C}F(U) + g \operatorname{sen}\omega = 0; \ \delta i\, F(U) = C\, g \operatorname{sen}\omega$$

	1° Tentativo	2° Tentativo	3° Tentativo	4° Tentativo	5° Tentativo
x	3000	3200	3300	3250	3225
ω	$299^{00} = 16^\circ 49'$	$326^{00} = 18^\circ 20'$	$340^{00} = 19^\circ 8'$	$333^{00} = 18^\circ 44'$	$330^{00} = 18^\circ 33'$
U	· 219	217	216	216,5	216,75
$F(U)$	5,953	5,840	5,784	5,812	5,824
log sen ω	$\bar{1}$,46136	$\bar{1}$,49768	$\bar{1}$,51557	$\bar{1}$,50673	$\bar{1}$,50261
log g	0,99145	0,99145	0,99145	0,99145	0,99145
log C	0,27231	0,27231	0,27231	0,27231	0,27231
log Cg sen ω	0,72512	0,76144	0,77933	0,77049	0,76637
Cg sen ω	5,31	5,774	6,016	5,895	5,840

L'eguaglianza $f(U) = g \operatorname{sen} \omega$ si verifica per la traiettoria di gittata compresa tra $X = 3200$ e $V = 3225$.

l) Velocità finale.

Dopo il punto di minima velocità $\frac{dv}{dt}$ diventa positiva e la velocità cresce; in tal caso $f(v) < g \operatorname{sen}(-\theta)$ e questa inferiorità sussisterà sempre: ma al massimo $g \operatorname{sen} \theta = g$, valore che assume all'estremità del ramo discendente, ove $\theta = -\frac{\pi}{2}$. Quindi il massimo valore di $f(v)$ al quale tende all'estremità del ramo discendente è g; ed il valore v della velocità finale, che il proietto assumerebbe all'estremità del ramo discendente, può essere ricavata dalla relazione

$$f(v_2) = g; \qquad \frac{\delta i}{C} F(v_2) = g; \qquad F(v_2) = \frac{gC}{\delta i}$$

Questa velocità dicesi finale e la sua conoscenza può essere utile, perchè essa rappresenta un limite non superabile per proietti aventi quel dato peso, calibro, coefficiente di forma i e per la densità dell'aria δ.

Applicazione:

Calcolare la velocità finale dei seguenti proietti per $\delta_0 = 1$

	Granata mono blocco da 149/35	Palla da 305/50	Granata da 305/17	Granata a pallette da 75
C	1,689	4,830	3,831	1,208
i	0,643	0,602	0,766	0,960
$F(v) = \frac{gC}{\delta i}$	25,8	79,0	49,0	12,34
U_{finale}	329,5	477,4	392,9	287,4

m) Il ramo discendente ha un asintoto.

Si dice che il ramo di una curva, che si estende indefinitamente, ha un asintoto, se la tangente condotta nel punto all'infinito della curva passa a distanza finita dalla origine delle coordinate.

Si è visto che la tangente all'estremo discendente della traiettoria è verticale la sua distanza dall'origine rappresenta l'ascissa dell'estremità del ramo discendent

Dunque basterà dimostrare che questa ascissa è finita.

Integrando la $g d x = - v^2 d\,\theta$ dall'origine ad un punto qualunque, ed indi cando con K un valore medio del quadrato delle velocità nei limiti dell'integr zione, si ha

$$gx = - \int_{\varphi}^{\theta} v^2 d\,\theta = K\,(\varphi - \theta)$$

da cui, essendo K sempre finito, risulta che anche x è una quantità finita, qu lunque sia il valore di θ.

L'ascissa del punto estremo $\left(\text{in cui } \theta = -\frac{\pi}{2}\right)$ è quindi definita dalla formul

$$\bar{x} = \frac{K}{g}\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right);$$

essa rappresenta la distanza dall'origine al punto in cui la tangente allo stes punto estremo incontra l'asse delle x; ma si è dimostrato che l'ascissa è semp finita, dunque *la tangente estrema del ramo discendente non è la retta all'infinit e quindi la curva ha un asintoto, che è la tangente stessa.*

n) Raggio di curvatura in punti di eguale inclinazione.

Il raggio di curvatura è il raggio del cerchio osculatore, che è tangente al curva nel punto considerato.

Dalla fig. 64

$$ds = \rho\, d\,\theta \quad \text{quindi} \quad \rho = \frac{ds}{d\,\theta}$$

$$\text{ma } g ds = - \frac{v^2 d\,\theta}{\cos\theta} \qquad \frac{ds}{d\,\theta} = - \frac{v^2}{g\cos\theta} = \rho$$

$$\rho = - \frac{(v\cos\theta)^2}{g\cos^3\theta}$$

Quindi per punti aventi inclinazioni uguali ma di segno contrario, ossia p uguali valori di $\cos\theta$ il denominatore è comune, ma il numeratore (quan trattasi di un punto del ramo ascendente) è maggiore quello del ramo discendente; dunque: *nei punti d'egu inclinazione il valore numerico del raggio di curvatu è maggiore nel ramo ascendente che in quello disce dente.*

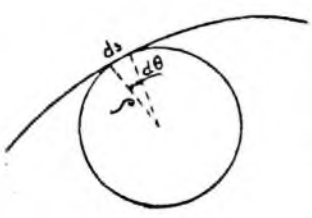


Fig. 64.

Il raggio di curvatura iniziale è sempre

$$- \rho = \frac{V^2}{g\cos\varphi}$$

quindi: *tutte le traiettorie che possono essere descritte con lo stesso V e φ, ma relat a diversi proietti, sono osculatrici fra di loro nell'origine, qualunque sia la resisten*

o) Punto di massima curvatura.

Esaminiamo la formula che dà il raggio di curvatura

$$\rho = -\frac{v^2}{g\cos\theta}$$

Dall'origine al vertice v decresce, mentre il valore di $\cos\theta$ aumenta ; quindi ρ in valore numerico diminuisce.

Dopo il punto di minima velocità, v cresce, $\cos\theta$ diminuisce e $-\rho$ aumenta. Dunque tra il vertice ed il punto di minima velocità, il valore di ρ passa per un minimo, e quello di $\frac{1}{\rho}$ (curvatura) passa per un massimo; quindi: *il punto di massima curvatura è più vicino al vertice del punto di minima velocità.*

La relazione che sussiste fra v e θ nel punto di massima curvatura si ricava eguagliando a zero la prima derivata di ρ, e precisamente:

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \frac{d^2 s}{d\theta^2} = 0 \qquad \text{ma } g\,ds = -\frac{v^2 d\theta}{\cos\theta}\,; \quad \frac{ds}{d\theta} = -\frac{v^2}{g\cos\theta}$$

quindi

$$\frac{d^2 s}{d\theta^2} = -\frac{1}{g}\,\frac{2\,v\cos\theta\,\frac{dv}{d\theta} + v^2 \operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta} = 0$$

ossia

$$-2\cos\theta\,\frac{dv}{d\theta} - v\operatorname{sen}\theta = 0 \qquad \text{ma } \frac{dv}{d\theta} = \frac{dv}{dt}\,\frac{dt}{d\theta}$$

$$\frac{dv}{dt} = -f(v) - g\operatorname{sen}\theta; \qquad \frac{dt}{d\theta} = -\frac{v}{g\cos\theta} \quad \text{e sostituendo}$$

$$2\cos\theta\,(-f(v) - g\operatorname{sen}\theta)\,\frac{v}{g\cos\theta} - v\operatorname{sen}\theta = 0$$

$$-2f(v)\,\frac{f(v)}{g} - 2\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}\theta = 0; \qquad 2f(v) - 3g\operatorname{sen}\theta = 0$$

$$2f(v) = 3g\operatorname{sen}(-\theta)$$

p) Ramo ascendente.

Supponiamo prolungato il ramo ascendente al di là dell'origine. La velocità andrà crescendo continuamente fino all'infinito, poichè il secondo membro della formula:

$$\frac{dv}{dt} = -f(v) - g\operatorname{sen}\theta$$

mantenendosi sempre negativo, la velocità varia in senso inverso del tempo: e poichè il tempo al di là dell'origine diminuisce, così la velocità cresce indefinitamente.

L'estremità del ramo ascendente è caratterizzato dunque dall'essere $v = \infty$.

Applicazione 1ª:

Dalle equazioni differenziali del moto

$$g\,dt = -\frac{v\,d\theta}{\cos\theta}$$

$$g\,dx = -v^2\,d\theta$$

$$g\,dy = -v^2 \operatorname{tang}\theta\,d\theta$$

$$g\,d\,(v\cos\theta) = v^2 f(v)\,d\theta$$

ricavare le formule del vuoto in funzione dell'inclinazione:

Nel vuoto $f(v) = 0$ quindi $v\cos\theta = V\cos\varphi = \text{cost.}$

$$g\,d\,x = -v^2\,d\theta = -v^2\frac{\cos^2\theta\,d\theta}{\cos^2\theta} = -v^2\cos^2\theta\,d\operatorname{tang}\theta.$$

Integrando dall'origine ad un punto qualunque

$$\int_0^x g\,d\,x = -V^2\cos^2\varphi\int_\varphi^\theta d\operatorname{tang}\theta = V^2\cos^2\varphi\,(\operatorname{tang}\varphi - \operatorname{tang}\theta)$$

$$x = \frac{V^2\cos^2\varphi}{g}\,(\operatorname{tang}\varphi - \operatorname{tang}\theta)$$

$$g\,d\,y = -v^2\operatorname{tang}\theta\,d\theta = -v^2\cos^2\theta\operatorname{tang}\theta\,d\operatorname{tang}\theta = -V^2\cos^2\varphi\,d\left(\frac{1}{2}\operatorname{tang}^2\theta\right)$$

$$\int_0^y g\,dy = -V^2\cos^2\varphi\int_\varphi^\theta\frac{1}{2}\,d\operatorname{tang}^2\theta = \frac{V^2\cos^2\varphi}{2}\,(\operatorname{tang}^2\varphi - \operatorname{tang}^2\theta) = gy$$

$$g\,dt = -\frac{v\,d\theta}{\cos\theta} = -v\cos\theta\,\frac{d\theta}{\cos^2\theta} = -V\cos\varphi\,d\operatorname{tang}\theta$$

$$gt = -V\cos\varphi\int_\varphi^\theta d\operatorname{tang}\theta = V\cos\varphi\,(\operatorname{tang}\varphi - \operatorname{tang}\theta)$$

Applicazione 2ª:

Dimostrare che la traiettoria nell'aria non può incontrare in più di tre punti la traiettoria nel vuoto.

Per la traiettoria si può scrivere nel modo più generale:

$$y = F(x)$$

e per la parabola:

$$y = a\,x^2 + b\,x$$

Nei punti in cui le due curve si incontrano dovrà essere:

$$F(x) = a\,x^2 + b\,x \qquad [a]$$

Le soluzioni dell'equazione [a] sono quelle che risolvono il problema.

Derivando la [*a*] si ha:

$$F'(x) = 2ax + b \qquad [b]$$

e questa equazione ammette una radice di meno della precedente.

La seconda derivata

$$F''(x) = 2a \qquad [c]$$

avrà ancora una radice di meno.

Ora

$$F'(x) = \frac{dy}{dx} = \operatorname{tang}\theta$$

$$F''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d \operatorname{tang}\theta}{dx} = \frac{1}{\cos^2\theta}\frac{d\theta}{dx}$$

e perchè

$$\frac{d\theta}{dx} = -\frac{g}{v^2}$$

si ha

$$F''(x) = -\frac{g}{v^2\cos^2\theta} \qquad [d]$$

Siccome $v\cos\theta$ è decrescente sempre, la [*c*] avrà una sola soluzione e poichè la [*b*] ha una soluzione in più della [*c*] essa avrà due soluzioni e la [*a*] ne avrà tre, che rappresentano i tre punti interscrizione della traiettoria con la curva, c. v. d.

CAPITOLO V

CASI DI INTEGRABILITÀ E TRAIETTORIE SIMILI

1 – Integrazione di d'Alembert.

Abbiamo detto che quando è possibile trovare una espressione di v tale che l'equazione dell'odografa possa essere ridotta alle quadrature, si può, dopo d'aver ricavata una espressione che leghi v a θ, ricavare i valori di x, y, t, s.

Il primo che si accinse a risolvere questo problema fu Bernoulli che, come già si è detto, riuscì ad integrare l'odografa nel caso di $f(v) = \gamma v^n$ cioè per una funzione monomia della velocità e per n e γ costanti. In seguito D'Alembert diede altre due forme di $f(v)$ riducibili a quadrature e Siacci ne diede ben 14.

Vediamo ora d'integrare l'odografa per una delle forme date dal D'Alembert e precisamente per

$$f(v) = a + \gamma v^n, \text{ con } a, \gamma \text{ ed } n \text{ costanti}$$

In tal caso l'equazione dell'odografa

$$gd(v \cos\theta) = vf(v)\, d\theta$$

diventa

$$gd(v \cos\theta) = v(a + \gamma v^n)\, d\theta = av\, d\theta + \gamma v^{n+1} d\theta$$

dividendo per $gv\cos\theta$

$$\frac{d(v\cos\theta)}{v\cos\theta} = \frac{a}{g}\frac{d\theta}{\cos\theta} + \frac{\gamma}{g}\frac{v^n d\theta}{\cos\theta}$$

Si ponga

$$dq = \frac{v^n d\theta}{\cos\theta} \text{ da cui } q = \int \frac{v^n d\theta}{\cos\theta}$$

ed integrando, giacchè

$$\int \frac{d\theta}{\cos\theta} = \log_e \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) \text{ (integrale caratteristico)}$$

$$\log_e(v\cos\theta) = \frac{a}{g}\log_e tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) + \frac{\gamma}{g} q$$

e passando dai logaritmi ai numeri

$$v\cos\theta = \left\{\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)\right\}^{\frac{a}{g}} e^{\frac{\gamma q}{g}}$$

Poniamo per brevità

$$\frac{a}{g} = \alpha \qquad \frac{\gamma}{g} = \beta$$

in tal caso sarà

$$v\cos\theta = \left\{\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)\right\}^{\alpha} e^{\beta q}$$

ed elevando ambo i membri ad n

$$(v\cos\theta)^n = \left\{\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)\right\}^{\alpha n} e^{\beta n q} \qquad [2]$$

Abbiamo posto precedentemente

$$dq = \frac{v^n\,d\theta}{\cos\theta} = (v\cos\theta)^n \frac{d\theta}{\cos^{n+1}\theta} \quad \text{quindi}$$

$$dq = \left\{\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)\right\}^{\alpha n} e^{\beta n q} \frac{d\theta}{\cos^{n+1}\theta}$$

e separando le variabili:

$$dq\,e^{-\beta n q} = \left\{\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\right\}^{\alpha n} \frac{d\theta}{\cos^{n+1}\theta}$$

ma

$$dq\,e^{-\beta n q} = \frac{e^{-\beta n q}\,d(-\beta n q)}{-\beta n}$$

per cui integrando

$$-\frac{e^{-\beta n q}+C}{\beta n} = \int\left\{\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)\right\}^{\alpha n} \frac{d\theta}{\cos^{n+1}\theta} = \psi(\theta)$$

da cui si ricava

$$e^{-\beta n q} = C - \beta n\,\psi(\theta) \qquad [3]$$

Ora dalla [2] si può ricavare

$$\frac{1}{e^{\beta n q}} = \frac{\left\{\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)\right\}^{\alpha n}}{(v\cos\theta)^n} \qquad [4]$$

per cui eguagliando la [3] e la [4] che hanno i primi membri uguali si otterrà

$$\frac{\left\{\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)\right\}^{\alpha n}}{(v\cos\theta)^n} = C - \beta n\,\psi(\theta)$$

da cui

$$(v\cos\theta)^n = \left\{C - \beta n\,\psi(\theta)\right\}^{-1}\left\{\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)\right\}^{\alpha n}$$

e quindi

$$v\cos\theta = \left\{C - \beta n\,\psi(\theta)\right\}^{-\frac{1}{n}}\left\{\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)\right\}^{\alpha}$$

Sostituendo ad α e β i loro valori si ottiene

$$v\cos\theta = \left\{C - \frac{\gamma}{g}\,n\,\psi(\theta)\right\}^{-\frac{1}{n}}\left\{\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)\right\}^{\frac{a}{g}} \qquad [1]$$

formula che ci permette di calcolare $v\cos\theta$ e che combinata con le altre formule di S. Robert dovrebbe permetterci di eliminare da esse per es. la v; però, operando in tal modo, si perviene a formule assai complicate e non si ritiene di proseguire

ulteriormente nel calcolo, tanto più che il caso di resistenza considerato trova solo applicazione per $n = 1$; cioè quando la funzione $f(v)$ può essere rappresentata da una retta (retta di Chapel come già notato) vale a dire per forti velocità.

In questo caso è

$$f(v) = -a + \gamma v$$

Allora l'equazione dell'odografa si può scrivere

$$g d(v \cos\theta) = (\gamma v - a) v d\theta = \gamma v^2 d\theta - a v d\theta$$

e dividendo per $g v \cos\theta$:

$$\frac{d(v\cos\theta)}{v\cos\theta} = \frac{\gamma}{g} v \frac{d\theta}{\cos\theta} - \frac{a}{g}\frac{d\theta}{\cos\theta}$$

Integrando si ha:

$$\log_e v\cos\theta = \frac{\gamma}{g}\int v \frac{d\theta}{\cos\theta} - \frac{a}{g}\log_e\left\{\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)\right\}$$

ma:

$$v\frac{d\theta}{\cos\theta} = -g\,dt \qquad \text{e quindi} \quad -gt = \int v\frac{d\theta}{\cos\theta}$$

sostituendo:

$$\log_e v\cos\theta = -\gamma t - \frac{a}{g}\log_e\left\{\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)\right\}$$

ovvero:

$$v\cos\theta = \left\{\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)\right\}^{-\frac{a}{g}} e^{-\gamma t}$$

da cui

$$e^{\gamma t} = \frac{1}{v\cos\theta}\left\{\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)\right\}^{-\frac{a}{g}}$$

ovvero

$$e^{\gamma t} g\,dt = -\frac{d\theta}{\cos^2\theta}\left\{\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)\right\}^{-\frac{a}{g}}$$

Poniamo $z = \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)$ e in conseguenza $\cos\theta = \frac{2z}{1+z^2}$ per cui sarà:

$$\frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \frac{z^2+1}{2z^2} dz$$

Sostituendo verrà

$$g e^{\gamma t} dt = -z^{-\frac{a}{g}} \frac{z^2+1}{2z^2} dz = -\frac{1+z^2}{2z^{\frac{a}{g}+2}} dz$$

ovvero

$$\frac{g}{\gamma} e^{\gamma t} d(\gamma t) = -\frac{1+z^2}{2z^{\frac{a}{g}+2}} dz$$

Integrando

$$\frac{g}{\gamma} e^{\gamma t} = C_1 - \frac{1}{2}\int \frac{1+z^2}{z^{\frac{a}{g}+2}}\, dz = C_1 - \frac{1}{2}\int z^{-\left(\frac{a}{g}+2\right)} dz - \frac{1}{2}\int z^{-\frac{a}{g}}\, dz$$

ossia

$$\frac{g}{\gamma} e^{\gamma t} = C_1 - \frac{1}{2}\,\frac{z^{-\left(\frac{a}{g}+1\right)}}{-\left(\frac{a}{g}+1\right)} - \frac{1}{2}\,\frac{z^{-\left(\frac{a}{g}-1\right)}}{-\left(\frac{a}{g}-1\right)}$$

$$\frac{g}{\gamma} e^{\gamma t} = C_1 + \frac{1}{2}\,\frac{1}{\left(\frac{a}{g}+1\right) z^{\left(\frac{a}{g}+1\right)}} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{\left(\frac{a}{g}-1\right) z^{\left(\frac{a}{g}-1\right)}}$$

$$e^{\gamma t} = C_1 + \frac{\gamma}{2g}\,\frac{1}{\left(\frac{a}{g}+1\right) z^{\left(\frac{a}{g}+1\right)}} + \frac{\gamma}{2g}\,\frac{1}{\left(\frac{a}{g}-1\right) z^{\left(\frac{a}{g}-1\right)}}$$

Sostituendo nella espressione di $v\cos\theta$, viene:

$$v\cos\theta = \frac{1}{z^{\frac{a}{g}}\left\{C_1 + \frac{\gamma}{2g}\left[\frac{1}{\left(\frac{a}{g}+1\right) z^{\left(\frac{a}{g}+1\right)}} + \frac{1}{\left(\frac{a}{g}-1\right) z^{\left(\frac{a}{g}-1\right)}}\right]\right\}}$$

$$\frac{1}{v\cos\theta} = z^{-\frac{a}{g}}\left\{C_1 + \frac{\gamma}{2g}\left[\frac{1}{\left(\frac{a}{g}+1\right) z^{\frac{a}{g}+1}} + \frac{1}{\left(\frac{a}{g}-1\right) z^{\frac{a}{g}-1}}\right]\right\} \qquad [5]$$

relazione finita fra v e θ poichè $z = \text{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)$

Per avere gli altri elementi occorrerebbe eliminare ad es. v nelle equazioni

$$g\,dx = -v^2 d\theta; \qquad g\,dy = -v^2 \,\text{tang}\,\theta\, d\theta; \qquad g\,dt = -v\,\frac{d\theta}{\cos\theta}$$

ma le formule alle quali si perverrebbe risultano molto complicate per cui se ne omette lo sviluppo.

Una trattazione completa del problema si trova nelle «*Memoires scientifiques*» del S. Robert (Tom. I).

2 - Integrazione di Bernoulli - Resistenza ennesima.

Nel caso in cui $f(v) = \gamma v^n$ la

$$g\,d\,(v\cos\theta) = v f(v)\, d\theta$$

diviene:

$$g\,d\,(v\cos\theta) = \gamma v^{n+1} d\theta$$

dividendo per $\gamma (v\cos\theta)^{n+1}$, si ha:

$$\frac{g}{\gamma}\,\frac{d\,(v\cos\theta)}{(v\cos\theta)^{n+1}} = \frac{d\theta}{\cos^{n+1}\theta} \qquad [6]$$

ove le variabili $v\cos\theta$ e θ sono separate.

Notando che

$$\frac{d\,(v\cos\theta)}{(v\cos\theta)^{n+1}}$$

è della forma $x^{-(n+1)}\,dx$ il cui integrale vale

$$\frac{x^{-n-1+1}}{-n+1-1} = -\frac{1}{n\,x^n}$$

sarà:

$$\int_{V\cos\varphi}^{v\cos\theta} - \frac{d\,(v\cos\theta)}{(v\cos\theta)^{n+1}} = \frac{1}{n\,(V\cos\varphi)^n} - \frac{1}{n\,(v\cos\theta)^n}$$

quindi integrando la [6] si ha

$$\frac{g}{n\,\gamma\,(V\cos\varphi)^n} - \frac{g}{n\,\gamma\,(v\cos\theta)^n} = \int_\varphi^\theta \frac{d\,\theta}{\cos^{n+1}\theta} = \xi_n\,(\theta) - \xi_n\,(\varphi) \qquad [7]$$

avendo posto

$$\int_0^\theta \frac{d\,\theta}{\cos^{n+1}\theta} = \xi_n\,(\theta) \qquad [8]$$

Indicando con E la parte costante, ponendo cioè:

$$\frac{g}{n\,\gamma\,(V\cos\varphi)^n} + \xi_n\,(\varphi) = E \qquad [9]$$

sarà

$$\frac{g}{n\,\gamma\,(v\cos\theta)^n} + \xi_n\,(\theta) = E \qquad [10]$$

da cui

$$\frac{g}{n\,\gamma\,(v\cos\theta)^n} = E - \xi_n\,(\theta) \quad \text{e quindi} \quad \frac{n\,\gamma}{g}\,(v\cos\theta)^n = \left\{E - \xi_n\,(\theta)\right\}^{-1}$$

$$\left(\frac{n\,\gamma}{g}\right)^{\frac{1}{n}} v\cos\theta = \left\{E - \xi_n\,(\theta)\right\}^{-\frac{1}{n}} \qquad [11]$$

Questo valore di $v\cos\theta$ può essere sostituito nelle equazioni che danno gli elementi del punto e che possono essere scritte nel modo seguente:

$$g\,dx = -\,v^2 d\,\theta = -\,(v\cos\theta)^2 \frac{d\,\theta}{\cos^2\theta}$$

$$g\,dy = -\,v^2\,tg\,\theta\,d\,\theta = -\,(v\cos\theta)^2\,tg\,\theta\,\frac{d\,\theta}{\cos^2\theta}$$

$$g\,dt = -\,\frac{v\,d\,\theta}{\cos\theta} = -\,v\cos\theta\,\frac{d\,\theta}{\cos^2\theta}$$

$$g\,ds = -\,\frac{v^2 d\,\theta}{\cos\theta} = -\,(v\cos\theta)^2\,\frac{d\,\theta}{\cos^3\theta}$$

che diverranno

$$\left(\frac{n\gamma}{g}\right)^{\frac{2}{n}} g\,dx = -\left\{E - \xi_n(\theta)\right\}^{-\frac{2}{n}} \frac{d\theta}{\cos^2\theta}$$

$$\left(\frac{n\gamma}{g}\right)^{\frac{2}{n}} g\,dy = -\left\{E - \xi_n(\theta)\right\}^{-\frac{2}{n}} tg\,\theta \frac{d\theta}{\cos^2\theta}$$

$$\left(\frac{n\gamma}{g}\right)^{\frac{1}{n}} g\,dt = -\left\{E - \xi_n(\theta)\right\}^{-\frac{1}{n}} \frac{d\theta}{\cos^2\theta}$$

$$\left(\frac{n\gamma}{g}\right)^{\frac{2}{n}} g\,ds = -\left\{E - \xi_n(\theta)\right\}^{-\frac{2}{n}} \frac{d\theta}{\cos^3\theta}$$

che, integrate dall'origine ad un punto qualunque:

$$\left(\frac{n\gamma}{g}\right)^{\frac{2}{n}} gx = -\int_{\varphi}^{\theta}\left\{E - \xi_n(\theta)\right\}^{-\frac{2}{n}} \frac{d\theta}{\cos^2\theta} \qquad [12]$$

$$\left(\frac{n\gamma}{g}\right)^{\frac{2}{n}} gy = -\int_{\varphi}^{\theta}\left\{E - \xi_n(\theta)\right\}^{-\frac{2}{n}} tg\,\theta \frac{d\theta}{\cos^2\theta} \qquad [13]$$

$$\left(\frac{n\gamma}{g}\right)^{\frac{1}{n}} gt = -\int_{\varphi}^{\theta}\left\{E - \xi_n(\theta)\right\}^{-\frac{1}{n}} \frac{d\theta}{\cos^2\theta} \qquad [14]$$

$$\left(\frac{n\gamma}{g}\right)^{\frac{2}{n}} gs = -\int_{\varphi}^{\theta}\left\{E - \xi_n(\theta)\right\}^{-\frac{2}{n}} \frac{d\theta}{\cos^3\theta} \qquad [15]$$

danno, qualora si sapessero integrare, gli elementi del punto generico $P(\theta)$ essendo noti quelli all'inizio dell'arco.

Calcolo di $\int_0^{\theta} \frac{d\theta}{\cos^{n+1}\theta} = \xi_n(\theta)$

I valori di questo integrale, contenuti nella tav. XVIII delle tav. num., sono dati in funzione di θ e di n. Vediamo quale formula serve per calcolare detto integrale:

$$\int \frac{d\theta}{\cos^{n+1}\theta} = \int \frac{d\theta}{\cos^{n-1}\theta\cos^2\theta} = \int \frac{1}{\cos^{n-1}\theta}\,d\,tg\,\theta$$

Integriamo per parti, scegliendo come fattor finito

$$\frac{1}{\cos^{n-1}\theta}$$

e come fattor differenziale $d\,tg\,\theta$; in tal caso l'integrale vale: il fattor finito per l'integrale del fattor differenziale meno l'$\int$ dell'$\int$ trovato nel differenziale del fattor finito

$$\int \frac{d\theta}{\cos^{n+1}\theta} = \frac{tg\,\theta}{\cos^{n-1}\theta} - \int tg\,\theta\, d\frac{1}{\cos^{n-1}\theta}$$

ma

$$d\frac{1}{\cos^{n-1}\theta} = -(-n+1)\cos^{-n}\theta \operatorname{sen}\theta\, d\theta =$$

$$= (n-1)\cos^{-n}\theta \operatorname{sen}\theta\, d\theta = (n-1)\frac{\operatorname{sen}\theta\, d\theta}{\cos^n\theta}$$

quindi sostituendo:

$$\int \frac{d\theta}{\cos^{n+1}\theta} = \frac{tg\,\theta}{\cos^{n-1}\theta} - \int tg\,\theta\,(n-1)\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^{n}\theta}\,d\theta =$$

$$= \frac{tg\,\theta}{\cos^{n-1}\theta} - (n-1)\int \operatorname{sen}^2\theta\,\frac{d\theta}{\cos^{n+1}\theta}$$

quindi

$$\int \frac{d\theta}{\cos^{n+1}\theta} = \frac{tg\,\theta}{\cos^{n-1}\theta} - (n-1)\int \frac{d\theta}{\cos^{n+1}\theta} + (n-1)\int \frac{d\theta}{\cos^{n-1}\theta}$$

$$n\int \frac{d\theta}{\cos^{n+1}\theta} = n\,\xi_n(\theta) = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^{n}\theta} + (n-1)\int \frac{d\theta}{\cos^{n-1}\theta}$$

e cioè

$$n\,\xi_n(\theta) = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^{n}\theta} + (n-1)\,\xi_{n-2}(\theta)$$

quindi se n è intero per successivi gradi si perverrebbe a

$$\xi_0(\theta) = \int \frac{d\theta}{\cos\theta} = \log_e tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) \qquad [16]$$

integrale noto, e:

$$\xi_1(\theta) = \int \frac{d\theta}{\cos^2\theta} = tg\,\theta \qquad [17]$$

Quelle relative ad $n > 1$ si trovano con le formule ricavate; così ad esempio:

$$\xi_4(\theta) = \frac{\operatorname{sen}\theta}{4\cos^4\theta} + \frac{3}{4}\,\xi_2(\theta) \qquad [18]$$

$$\xi_2(\theta) = \frac{\operatorname{sen}\theta}{2\operatorname{sen}^2\theta} + \frac{1}{2}\,\xi_0(\theta) = \frac{\operatorname{sen}\theta}{2\operatorname{sen}^2\theta} + \frac{1}{2}\,lg_e\,tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) \qquad [19]$$

3 – Traiettorie simili.

Si dicono simili due traiettorie i cui archi omologhi, cioè gli archi compresi fra due inclinazioni φ e θ qualunque, stanno in rapporto costante.

Supponiamo che $f(v) = \gamma v^n$ e determiniamo la condizione cui devono soddisfare le velocità V e V_1 di due proietti cui corrispondono il coefficiente $\gamma = \frac{\delta i}{C}$ e $\gamma_1 = \frac{\delta_1 i_1}{C_1}$ affinchè lanciati con lo stesso φ descrivano traiettorie simili.

a) Rapporto delle velocità iniziali.

Abbiamo visto che

$$g\,ds = -\frac{v^2\,d\theta}{\cos\theta} = -(v\cos\theta)^2\frac{d\theta}{\cos^3\theta}$$

e sostituendo a $v\cos\theta$ il valore trovato con l'integrazione di Bernoulli sarà

$$\left(\frac{n\gamma}{g}\right)^{\frac{2}{n}} g\,ds = -\left\{E - \xi_n(\theta)\right\}^{-\frac{2}{n}}\frac{d\theta}{\cos^3\theta}$$

che integrata dall'origine ad un punto qualunque:

$$\left(\frac{n\gamma}{g}\right)^{\frac{2}{n}} gs = -\int_{\varphi}^{\theta} \left\{ E - \xi_n(\theta) \right\}^{-\frac{2}{n}} \frac{d\theta}{\cos^3\theta}$$

e per l'altro proietto di coefficiente γ_1:

$$\left(\frac{n\gamma_1}{g}\right)^{\frac{2}{n}} gs_1 = -\int_{\varphi}^{\theta} \left\{ E_1 - \xi_n(\theta) \right\}^{-\frac{2}{n}} \frac{d\theta}{\cos^3\theta}$$

Perche le due traiettorie siano simili è necessario che i primi membri e quindi anche i secondi stiano in rapporto costante; allora anche le derivate dei secondi membri staranno in rapporto costante, per cui se K è il valore di questo rapporto dovrà essere

$$E_1 - \xi_n(\theta) = K\{ E - \xi_n(\theta) \}$$

cioè

$$E_1 - KE = \xi_n(\theta) - K\,\xi_n(\theta)$$

e ciò per qualunque valore di θ. Questo è possibile solamente se $K = 1$ cioè $E = E_1$.

Quindi la condizione perchè le due traiettorie siano simili è che sia $E = E_1$; ma sappiamo che;

$$E = \frac{g}{n\gamma\,(V\cos\varphi)^n} + \xi_n(\varphi) = \frac{g}{n\gamma_1\,(V_1\cos\varphi)^n} + \xi_n(\varphi) = E_1$$

quindi

$$\gamma V^n = \gamma_1 V_1^n$$

il che ci dice che affinchè due traiettorie siano simili è necessario e sufficiente che le ritardazioni iniziali siano uguali

b) Rapporto fra archi, x, y, tempi, velocità e ritardazioni omologhe.

Quando è soddisfatta la relazione:

$$\gamma V^n = \gamma_1 V_1^n$$

allora dalla relazione che dà la x si ricava;

$$\left(\frac{n\gamma}{g}\right)^{\frac{2}{n}} gx = -\int \left\{ E - \xi_n(\theta) \right\}^{-\frac{2}{n}} \frac{d\theta}{\cos^2\theta} =$$

$$= -\int \left\{ E_1 - \xi_n(\theta) \right\}^{-\frac{2}{n}} \frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \left(\frac{n\gamma_1}{g}\right)^{\frac{2}{n}} gx_1 \qquad [20]$$

quindi

$$\left(\frac{\gamma}{\gamma_1}\right)^{\frac{2}{n}} = \frac{x_1}{x}$$

analogamente

$$\left(\frac{\gamma}{\gamma_1}\right)^{\frac{2}{n}} = \frac{y_1}{y}\,; \qquad \left(\frac{\gamma}{\gamma_1}\right)^{\frac{2}{n}} = \frac{s_1}{s}$$

ma

$$\left(\frac{\gamma}{\gamma_1}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{V_1}{V}\right)^2$$

quindi

$$\frac{x_1}{x} = \frac{y_1}{y} = \frac{s_1}{s} = \frac{V_1^2}{V^2}$$

Per i tempi e le velocità poichè

$$\left(\frac{n\gamma}{g}\right)^{\frac{1}{n}} gt = -\int \left\{ E - \xi_n(\theta) \right\} \frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \left(\frac{n\gamma_1}{g}\right)^{\frac{1}{n}} gt_1$$

sarà

$$\left(\frac{\gamma}{\gamma_1}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{t_1}{t}; \qquad \left(\frac{\gamma}{\gamma_1}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{v_1}{v} \quad \text{e} \quad \left(\frac{\gamma}{\gamma_1}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{V_1}{V}$$

$$\frac{t_1}{t} = \frac{v_1}{v} = \frac{V_1}{V}$$

Ne consegue che le ritardazioni nei punti omologhi sono uguali

$$\gamma v^n = \gamma_1 v_1^n$$

4 - Proietti simili e resistenza quadratica.

Se si suppone $i = i_1$ ossia che si tratti di ugual coefficiente di forma e si ritiene costante δ, essendo

$$\gamma = \frac{\delta i}{C} \lambda$$

e ciò perchè

$$F(v) = \lambda v^n \qquad f(v) = \frac{\delta i}{C} F(v) = \gamma v^n$$

i due coefficienti di resistenza γ e γ_1 sono inversamente proporzionali ai coefficienti balistici dei due proietti C e C_1 per la

$$\gamma = \frac{\delta i}{C} \lambda \qquad \gamma_1 = \frac{\delta i}{C_1} \lambda$$

cioè

$$\frac{\gamma}{\gamma_1} = \frac{C_1}{C}$$

e se si considera $n = 2$ (resistenza quadratica) unico caso in cui può essere applicata la similitudine delle traiettorie, sarà

$$\frac{s}{s_1} = \frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1} = \frac{V^2}{V_1^2} = \frac{v^2}{v_1^2} = \frac{t^2}{t_1^2} = \frac{C}{C_1}$$

e se i proietti hanno uguale densità e sono simili internamente ed esternamente, i coefficienti balistici sono proporzionali ai calibri.

5 - Integrazione di Eulero.

La similitudine delle traiettorie permette di considerare come appartenenti ad una stessa famiglia tutte le traiettorie descritte da diversi proietti quando si mantenga costante E.

Questa osservazione fu fatta da Eulero per mostrare, almeno per la resistenza quadratica, come si potevano costruire tavole numeriche ciascuna corrispondente ad un valore di E, le quali avrebbero permesso di risolvere i problemi relativi al tiro di un qualunque proietto.

Per il valore di $n = 2$ l'espressione che dà l'arco, trovata nell'integrazione di Bernoulli e cioè:

$$\left(\frac{n\gamma}{g}\right)^{\frac{2}{n}} gs = -\int_{\varphi}^{\theta} \left\{E - \xi_n(\theta)\right\}^{-\frac{2}{n}} \frac{d\theta}{\cos^3\theta}$$

diventa

$$2\gamma s = -\int_{\varphi}^{\theta} \left\{E - \xi_2(\theta)\right\}^{-1} \frac{d\theta}{\cos^3\theta}$$

Notiamo che

$$\int \frac{d\theta}{\cos^3\theta} = \xi_2(\theta)$$

quindi sarà:

$$2\gamma s = -\int_{\varphi}^{\theta} \left\{E - \xi_2(\theta)\right\}^{-1} d\,\xi_2(\theta) = \int_{\varphi}^{\theta} \left\{E - \xi_2(\theta)\right\}^{-1} d\left\{-\xi_2(\theta)\right\} = \int_{\varphi}^{\theta} \frac{d[-\xi_2(\theta)]}{E - \xi_2(\theta)}$$

cioè

$$2\gamma s = \log_e \frac{E - \xi_2(\theta)}{E - \xi_2(\varphi)}$$

Formula questa che ci permette di calcolare l'arco s perchè: $\gamma = \frac{\delta i}{C}\lambda$ è noto e poichè per $n = 2, \lambda = K(v) = 0{,}000123$; $E = \frac{g}{2\gamma(V\cos\varphi)^2} + \xi_2(\varphi)$; $\xi_2(\theta)$ e $\xi_2(\varphi)$ si deducono dalla Tav. XVIII quindi è possibile calcolare s, noto il quale si calcolerà

$$x = s\cos\frac{\varphi + \theta}{2}; \qquad y = s \operatorname{sen}\frac{\varphi + \theta}{2}; \qquad t = \frac{2s}{V + v};$$

v si deduce da:

$$E = \frac{g}{2\gamma(v\cos\theta)^2} + \xi_2(\theta); \qquad \frac{2\gamma}{g}(v\cos\theta)^2 = \left\{E - \xi_2(\theta)\right\}^{-1}$$

$$v\cos\theta = \sqrt{\frac{g}{2\gamma}\,\frac{1}{E - \xi_2(\theta)}}$$

Sulla traccia di Eulero e con lo stesso metodo d'integrazione, prima il conte di Graevenitz e poi il generale prussiano Otto costruirono tavole per la resistenza quadratica. Le tavole del gen. Otto, successivamente migliorate da Saint Robert, riuscirono di grande utilità.

Altre tavole furono calcolate per la resistenza cubica e biquadratica dal Bashfort e Zaboudski; però trovarono minore impiego delle precedenti.

Applicazione:

Obice da 305/17; Granata di ghisa acciaiosa;
dati: $p = 328,55$; $a = 0,3024$; $i = 0,790$; $h = 1200$ (origine dell'arco) $V = 251$ m/s; $\varphi = 30^o$: determinare la velocità v, le coordinate x, y, ed il tempo t nell'estremità dell'arco nella quale l'inclinazione sia $\theta = 25^o$.

Il problema dovrà essere risolto applicando il metodo d'integrazione di Eulero (resistenza quadratica)

$\log a$	$= \bar{1},48058$	δ	$= 0,907$	$\log V$	$= 2,39967$
$\log a^2$	$= \bar{2},96116$	$\log \delta$	$= \bar{1},95761$	$\log \cos \varphi$	$= \bar{1},93753$
colg $1000\, a^2$	$= \bar{2},03884$	$\log i$	$= \bar{1},89763$	$\log V \cos \varphi$	$= 2,33720$
$\log p$	$= 2,51660$	$\log \lambda$	$= \bar{4},08991$	colg $V \cos \varphi$	$= \bar{3},66280$
$\log C$	$= 0,55544$	colog C	$= \bar{1},44456$		

$$\log \gamma = \log \frac{\delta i}{C} \lambda = \bar{5},38971$$

$\log g$	$= 0,99145$	$\frac{g}{2\gamma (V \cos \varphi)^2}$	$4,22970 = E - \xi_2(\varphi)$
colg 2	$= \bar{1},69897$	$\xi_2(\varphi)$	$= 0,60799$
colg γ	$= 4,61029$	E	$= 4,83769$
colg $(V \cos \varphi)^2$	$= \bar{5},32560$	$\xi_2(\theta)$	$= 0,48269$
$\log \frac{g}{2\gamma (V \cos \varphi)^2}$	$= 0,62631$	$E - \xi_2(\theta)$	$= 4,35500$

Calcolo di $s = \frac{1}{2\gamma} \log_e \frac{E - \xi_2(\theta)}{E - \xi_2(\varphi)}$

colg $[E - \xi_2(\varphi)]$	$= \bar{1},37369$
$\log [E - \xi_2(\theta)]$	$= 0,63899$
$\log \frac{[E - \xi_2(\theta)]}{[E - \xi_2(\varphi)]}$	$= 0,01268$
$\log \left\{ \log \frac{[E - \xi_2(\varphi)]}{[E - \xi_2(\varphi)]} \right\}$	$= \bar{2},10312$
$\log M$	$= 0,36222$
$\log \left\{ \log_e \frac{[E - \xi_2(\theta)]}{[E - \xi_2(\varphi)]} \right\}$	$= \bar{2},46534$
colg 2γ	$= 4,30926$
$\log s$	$= 2,77460$
s	$= 595,1$

Calcolo di $x = s \frac{\cos(\varphi + \theta)}{2}$; Calcolo di $y = s \frac{\text{sen}(\varphi + \theta)}{2}$

$\log s$	$= 2,77460$	$\log s$	$= 2,77460$
$\log \cos \frac{\varphi + \theta}{2}$	$= \bar{1},94793$	$\log \text{sen} \frac{\varphi + \theta}{2}$	$= \bar{1},66441$
$\log x$	$= 2,72253$	$\log y$	$= 2,43901$
x	$= 527,9$	y	$= 274,8$

Calcolo di v				Calcolo di t	
$\log \frac{g}{2\gamma}$	$= 5{,}30071$	$\log (v \cos \theta)$	$= 2{,}33086$	$\log 2$	$= 0{,}30103$
$\text{colg}\,[E - \xi_2(\theta)]$	$= \bar{1}{,}36101$	$\text{colg} \cos \theta$	$= 0{,}04272$	$\log s$	$= 2{,}77460$
$\log (v \cos \theta)^2$	$= 4{,}66172$	$\log v$	$= 2{,}37358$	$\text{colg}\,(v + V)$	$= \bar{3}{,}31215$
		v	$= 236{,}36$	$\log t$	$= 0{,}38778$
				t	$= 2''442$

$$v + V = 236{,}36 + 251{,}00 = 487{,}36$$

6 – Resistenza proporzionale alla velocità.

Questo caso è difficilmente realizzabile in pratica, poichè corrisponde a velocità superiori ai 790 m/s oppure a velocità molto piccole ed a grossi proietti. Noi lo studieremo però egualmente nella considerazione che potrebbe applicarsi sia al tiro controaerei in cui si sviluppano velocità elevatissime, e potrebbe servire per un buon tratto della traiettoria, sia al caso del tiro con bombarde.

Facendo $n = 1$ l'equazione dell'odografa si riduce a

$$g d (v \cos \theta) = \gamma v^2 d\theta$$

e l'equazione che fornisce la x può scriversi, dalla

$$\left(\frac{n\gamma}{g}\right)^{\frac{2}{n}} g x = -\int_{\varphi}^{\theta} \left\{ E - \xi_n(\theta) \right\}^{-\frac{2}{n}} \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}$$

$$\frac{\gamma^2}{g} x = -\int_{\varphi}^{\theta} \left\{ \frac{1}{E - tg\,\theta} \right\}^2 d\,tg\,\theta = \int_{\varphi}^{\theta} \frac{d(-tg\,\theta)}{(E - tg\,\theta)^2}$$

che essendo $E =$ costante, è della forma $\frac{dx}{x^2}$ quindi:

$$\frac{\gamma^2}{g} x = -\left[\frac{1}{E - tg\,\theta}\right]_{\varphi}^{\theta} = \frac{1}{E - tg\,\varphi} - \frac{1}{E - tg\,\theta} \qquad [21]$$

Analogamente, per la y, dalla

$$\left(\frac{n\gamma}{g}\right)^{\frac{2}{n}} g y = -\int_{\varphi}^{\theta} \left\{ E - \xi(\theta) \right\}^{-\frac{2}{n}} tg\,\theta\, d\,tg\,\theta$$

per $n = 1$ si ha:

$$\frac{\gamma^2}{g} y = -\int_{\varphi}^{\theta} \left\{ E - tg\,\theta \right\}^{-2} tg\,\theta\, d\,tg\,\theta$$

$$= -\int_{\varphi}^{\theta} \frac{tg\,\theta\, d\,tg\,\theta}{(E - tg\,\theta)^2}$$

Ponendo

$$E - tg\,\theta = z; \qquad -d\,tg\,\theta = dz$$

$$tg\,\theta = E - z$$

si ha:

$$\frac{\gamma^2}{g} y = \int \frac{(E - z)\,dz}{z^2} = \int \frac{E\,dz}{z^2} - \int \frac{dz}{z} = -\frac{E}{z} - \log_e z$$

e sostituendo si ha:

$$\frac{\gamma^2}{g} y = \frac{E}{E - tg\,\varphi} - \frac{E}{E - tg\,\theta} - \log_e \frac{E - tg\,\theta}{E - tg\,\varphi} \qquad [22]$$

Analogamente, per t, si ricava:

$$\gamma t = \int_\varphi^\theta \left\{E - tg\,\theta\right\}^{-1} d\,tg\,\theta = \int_\varphi^\theta \frac{d\,(-tg\,\theta)}{E - tg\,\theta} = \log_e \frac{E - tg\,\theta}{E - tg\,\varphi} \qquad [23]$$

Ricavando dalla [21] il valore di $tg\,\theta$ e sostituendo nelle [22] [23] si avrebbero tutte le quantità espresse in funzione di x.

Ma nel caso di $n = 1$ è possibile ricavare in modo assai più semplice le formule dei vari elementi in funzione dell'ascissa direttamente partendo dalle equazioni differenziali.

In tal caso l'equazione del moto orizzontale diventa.

$$\frac{d\,(v \cos\theta)}{dt} = -\gamma v \cos\theta$$

e poichè $v \cos\theta\, dt = dx$

$$d\,(v \cos\theta) = -\gamma\, dx$$

Integrando dall'origine ad un punto qualunque:

$$v \cos\theta - V \cos\varphi = -\gamma x \qquad [24]$$

$$v \cos\theta = V \cos\varphi - \gamma x = V \cos\varphi \left(1 - \frac{\gamma x}{V \cos\varphi}\right) \qquad [25]$$

posto

$$z = \frac{\gamma x}{V \cos\varphi} \qquad [26]$$

si ha:

$$v \cos\theta = V \cos\varphi\,(1 - z) = V \cos\varphi\, G_4 \qquad [27]$$

ponendo $G_4 = 1 - z$.

Vediamo ora entro quali limiti può variare z

All'estremità del ramo discendente $v \cos\theta = 0$ e la tangente in tale punto dista di $\bar{x}$ dall'origine, allora sarà:

$$0 = V \cos\varphi - \gamma \bar{x}$$

da cui:

$$\bar{x} = \frac{V \cos\varphi}{\gamma}$$

dalla:

$$\frac{\gamma x}{V \cos\varphi} = z$$

si deduce:

$$z = \frac{x}{\bar{x}}$$

ma $\bar{x} > x$ sempre, quindi $z < 1$ sempre.

Dalla $v \cos\theta = \frac{dx}{dt}$ si ricava:

$$dt = \frac{dx}{v\cos\theta} = \frac{dx}{V\cos\varphi\,(1-z)}$$

dalla:

$$z = \frac{\gamma x}{V\cos\varphi}; \qquad dz = \frac{\gamma\,dx}{V\cos\varphi}; \qquad dx = \frac{V\cos\varphi\,dz}{\gamma}$$

quindi:

$$dt = \frac{V\cos\varphi\,dz}{\gamma\cdot V\cos\varphi\,(1-z)} = \frac{dz}{\gamma\,(1-z)}$$

ed integrando

$$\gamma t = \log_e(1-z) = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \cdots\cdots = z\left(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3} + \cdots\cdots\right)$$

ossia

$$t = \frac{x}{V\cos\varphi}\left(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3} + \cdots\cdots\cdots\right) = \frac{x}{V\cos\varphi}\,G_3 \qquad [28]$$

ponendo $G_3 = 1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3} + \cdots\cdots$

L'equazione dell'odografa quando si ponga: $f(v) = \gamma v$ diventa:

$$g d\,(v\cos\theta) = \gamma\,v^2 d\,\theta$$

e dividendo per $v^2\cos^2\theta$

$$\frac{g d\,(v\cos\theta)}{v^2\cos^2\theta} = \frac{\gamma\,d\,\theta}{\cos^2\theta}$$

ossia :

$$\frac{d\,\theta}{\cos^2\theta} = \frac{g}{\gamma}\,\frac{d\,(v\cos\theta)}{(v\cos\theta)^2}$$

ed integrando dall'origine ad un punto qualunque; essendo:

$$\int \frac{d\,(v\cos\theta)}{(v\cos\theta)^2} = -\frac{1}{v\cos\theta}$$

si avrà

$$tg\,\theta - tg\,\varphi = -\frac{g}{\gamma}\left(\frac{1}{v\cos\theta} - \frac{1}{V\cos\varphi}\right) = -\frac{g}{\gamma\cdot V\cos\varphi}\left(\frac{V\cos\varphi}{v\cos\theta} - 1\right) =$$

$$= -\frac{g}{\gamma\,V\cos\varphi}\left(\frac{V\cos\varphi}{V\cos\varphi\,(1-z)} - 1\right) = -\frac{g}{\gamma\cdot V\cos\varphi}\left(\frac{1}{1-z} - 1\right) =$$

$$= -\frac{g}{\gamma\,V\cos\varphi}\left(\frac{1-1+z}{1-z}\right)$$

quindi

$$tg\,\theta = tg\,\varphi - \frac{gz}{\gamma\,V\cos\varphi\,(1-z)}$$

ma

$$z = \frac{\gamma x}{V\cos\varphi}$$

quindi

$$tg\,\theta = tg\,\varphi - \frac{g\,\gamma\,x}{\gamma\,V^2\cos^2\varphi}\left(1 - z\right)^{-1} = tg\,\varphi - \frac{gx}{V^2\cos^2\varphi}\,G_2 \qquad [29]$$

avendo posto

$$G_2 = (1 - z)^{-1} = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots\cdots$$

Abbiamo visto che $\frac{dy}{dx} = tg\,\theta$, quindi dalla:

$$tg\,\theta = tg\,\varphi - \frac{g}{\gamma\,V\cos\varphi}\left(\frac{1}{1 - z} - 1\right)$$

si dedurrà

$$\frac{dy}{dx} = tg\,\varphi - \frac{g}{\gamma \cdot V\cos\varphi\,(1 - z)} + \frac{g}{\gamma \cdot V\cos\varphi}$$

e poichè:

$$z = \frac{\gamma\,x}{V\cos\varphi} \qquad dz = \frac{\gamma\,dx}{V\cos\varphi}$$

quindi:

$$dy = tg\,\varphi\,dx - \frac{g\,dz}{\gamma^2\,(1 - z)} + \frac{g\,dz}{\gamma^2}$$

integrando:

$$y = x\,tg\,\varphi + \int_0^z g\,\frac{d\,(1 - z)}{1 - z} + \int_0^z \frac{g\,dz}{\gamma^2} = x\,tg\,\varphi + \frac{g}{\gamma^2}\log_e(1 - z) + \frac{g}{\gamma^2}\,z$$

$$y = x\,tg\,\varphi + \frac{g}{\gamma^2}\left\{z + \log_e(1 - z)\right\} =$$

$$= x\,tg\,\varphi + \frac{g}{\gamma^2}\left(z - z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} - \cdots\cdots\right) =$$

$$= x\,tg\,\varphi - \frac{g}{2\,\gamma^2}\left(z^2 + \frac{2\,z^3}{3} + \frac{2\,z^4}{4} + \cdots\cdots\right) = x\,tg\,\varphi - \frac{g\,z^2}{2\,\gamma^2}\left(1 + \frac{2\,z}{3} + \frac{2\,z^2}{4} + \cdots\cdots\right)$$

quindi:

$$y = x\,tg\,\varphi - \frac{gx^2}{2\,V^2\cos^2\varphi}\left(1 + \frac{2\,z}{3} + \frac{2\,z^2}{4} + \cdots\cdots\right) = x\,tg\,\varphi - \frac{gx^2}{2\,V^2\cos^2\varphi}\,G_1 \qquad [30]$$

avendo posto $G_1 = 1 + \frac{2\,z}{3} + \frac{2\,z^2}{4} + \cdots\cdots$

Nel vuoto $z = 0$ quindi: $G_1 = 1$; $G_2 = 1$; $G_3 = 1$; $G_4 = 1$ e le formule si riducono a quelle precedentemente trovate.

Applicazione:

Mortaio da 210; Granata; $p =$ kg. 101; $C = 2{,}346$; $i = 0{,}85$; $\delta = 0{,}927$.
Dati: $V = 180$ m/s; $\varphi = 20^\circ\,12'$; $X = 2000$.
Determinare ω, T, U:

Dalla $f(v) = \gamma v = \frac{\delta i}{C} F(v)$ si deduce:

$$\gamma = \frac{\delta i}{C} \frac{F(v)}{v} \qquad F(v) = 3{,}959 \text{ (per } V = 180 \text{ m/s)}$$

$$z = \frac{\gamma X}{V \cos \varphi}$$

$$\begin{aligned}
\log \delta &= \bar{1},96708 \\
\log i &= \bar{1},92942 \\
\text{colog } C &= \bar{1},62947 \\
\log F(v) &= 0,59759 \\
\text{colog } v &= \bar{3},74473 \\
\log \gamma &= \bar{3},86849 \\
z &= 0,08746 \\
z^2 &= 0,00765 \\
z^3 &= 0,00067 \\
z^4 &= 0,00006
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\log \gamma &= \bar{3},86849 \\
\log X &= 3,30103 \\
\text{colg } V &= \bar{3},74473 \\
\text{colog } \cos \varphi &= 0,02757 \\
\log z &= \bar{2},94182 \\
\log z^2 &= \bar{3},88364 \\
\log z^3 &= \bar{4},82546 \\
\log z^4 &= \bar{5},76728
\end{aligned}$$

$$tg\,\omega = tg\,\varphi - \frac{g X}{V^2 \cos^2 \varphi} (1 + z + z^2 + z^3 + z^4)$$

$$\begin{aligned}
(1 + z + z^2 + z^3 + z^4) &= 1,09584 \\
\log (1 + z + \cdots\cdots) &= 0,03975 \\
\log g &= 0,99145 \\
\log X &= 3,30103 \\
\text{colg } (V \cos \varphi)^2 &= \bar{5},54460 \\
\log \frac{g X}{V^2 \cos^2 \varphi} (\cdots\cdots) &= \bar{1},87683 \\
\frac{g X}{V^2 \cos^2 \varphi} (\cdots\cdots) &= 0,75306 \\
tg\,\varphi &= 0,36781 \\
tg\,\omega &= 0,38525 \\
\omega &= 21^\circ\,6'
\end{aligned}$$

Calcolo di $T = \frac{X}{V \cos \varphi} \left(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3} + \frac{z^3}{4} + \cdots\right)$

$$\begin{aligned}
\frac{z}{2} &= 0,04373 \\
\frac{z^2}{3} &= 0,00255 \\
\frac{z^3}{4} &= 0,00017 \\
& 1 \\
\left(1 + \frac{z}{2} \cdots\right) &= 1,04645
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\log X &= 3,30103 \\
\text{colog } V \cos \varphi &= \bar{3},77230 \\
\log \left(1 + \frac{z}{2} + \cdots\right) &= 0,01972 \\
\log T &= 1,09305
\end{aligned}
\qquad T = 12''\,39$$

Calcolo di U:

$$U \cos \omega = V \cos \varphi \, (1 - z)$$

$(1 - z) = 0,91254$

$$\begin{aligned}
\log V \cos \varphi &= 2,22770 \\
\log (1 - z) &= \bar{1},96025 \\
\text{colg } \cos \omega &= 0,03014 \\
\log U &= 2,21809 \\
U &= 165,2
\end{aligned}$$

Cosicchè si è trovato:

$$\omega = 21^\circ 6'; \qquad T = 12'' 39; \qquad U = 165{,}2$$

Dalla Tavola di Tiro si ha:

$$\omega = 21^\circ 23'; \qquad T = 12''3; \qquad U = 165$$

Le piccole differenze riscontrate sono trascurabili, in ogni modo si può ritenere derivino dall'aver assunto come valore del coefficiente di forma $i = 0{,}85$, un valore ipotetico, perchè il valore vero di i per il proietto considerato non si conosce.

7 – Integrazione nel caso di densità variabile.

Tutti i casi d'integrabilità fino ad ora esaminati supponevano che la densità dell'aria rimanesse costante lungo l'arco di traiettoria considerato.

Le aumentate esigenze dell'artiglieria hanno fatto si che questa ipotesi venisse ritenuta troppo semplice, per cui si cercò di risolvere il problema nel caso in cui la densità dell'aria fosse variabile.

Questo problema, che non ha avuto fino ad ora una soluzione soddisfacente, fu posto agli artiglieri per la prima volta nel 1921 dal generale Ettore Cavalli, il quale in una mirabile nota pubblicata nella *Rivista d'Artiglieria e Genio* proponeva quello che egli chiamò «il problema balistico del prossimo avvenire» *Rivista Artiglieria e Genio* – Nota 1ª del 1921, vol. IV. Nota 2ª del 1922, vol. II).

Questa nota venne inviata a tutti i più eminenti professori di calcolo, con preghiera di voler integrare le equazioni del moto, tenendo conto della densità variabile. Fino ad oggi l'appello di Cavalli è stato vano.

Se δ è variabile, anche l'equazione dell'odografa contiene tre variabili per cui bisogna considerare il sistema delle due equazioni:

$$\begin{cases} g d\,(v \cos \theta) = \dfrac{\delta_y\, i}{C}\, v\, F\,(v)\, d\,\theta \\ g\, dy = -\, v^2 \operatorname{tg} \theta\, d\,\theta \end{cases}$$

le quali contengono le stesse tre variabili e quindi formano un sistema completo.

In altre parole, mentre quando δ è costante si cerca di integrare l'equazione dell'odografa per poi ridurre alle quadrature le altre tre, nel caso considerato, si cerca d'integrare il sistema delle due equazioni differenziali sopra scritte, per poi ridurre alle quadrature le altre due equazioni.

Nel sistema delle due equazioni del 1° ordine si può sostituire un'unica equazione del 2° ordine, eliminando la y fra le due. Un metodo da seguire è il seguente:

Supponiamo che δ varî secondo la quota con la legge di Bessel cioè:

$$\delta_y = \delta_0\, e^{-\alpha y}$$

ove α è costante; quindi si deduce:

$$\delta'_y = -\, \alpha\, \delta_0\, e^{-\alpha y}$$

$$\frac{\delta'_y}{\delta_0} = -\, \alpha$$

Poniamo

$$\gamma = \frac{\delta_0 i}{C g}$$

e prendiamo come variabile indipendente la *u* definita da:

$$v \cos\theta = u \cos\varphi$$

Questa notazione fu introdotta da Siacci e d'ora innanzi la troveremo molto sovente.

Dalla

$$g d(v \cos\theta) = v \frac{\delta_y i}{C} F(v)\, d\theta$$

dividendo tutto per $\cos\varphi\, d\theta$ si ha:

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{\gamma e^{-\alpha y} u F(v)}{\cos\theta}$$

e posto:

$$q = \frac{\cos\theta}{\gamma} e^{\alpha y}$$

si ha:

$$\frac{d\theta}{du} = \frac{q}{u F(v)}$$

che differenziata logaritmicamente:

$$\frac{\dfrac{d}{du}\dfrac{d\theta}{du}}{\dfrac{d\theta}{du}} = \frac{\dfrac{d^2\theta}{du^2}}{\dfrac{d\theta}{du}}$$

$$\frac{d^2\theta}{du^2} = \left(\frac{1}{q}\frac{dq}{du} - \frac{1}{u} - \frac{v}{F(v)} F'(v) \frac{1}{v}\frac{dv}{du}\right)\frac{d\theta}{du} \qquad [31]$$

D'altra parte l'espressione di *q* differenziata logaritmicamente dà

$$q = \frac{\cos\theta}{\gamma} e^{\alpha y}$$

$$\log q = \log\cos\theta - \log\gamma + \alpha y$$

γ è costante

$$\frac{1}{q}\frac{dq}{du} = \alpha\frac{dy}{du} - \frac{1}{\cos\theta}\,\text{sen}\,\theta\,\frac{d\theta}{du} = -\left(tg\,\theta - \alpha\frac{dy}{d\theta}\right)\frac{d\theta}{dv}$$

ma dalla

$$g\, dy = - v^2\, tg\,\theta\, d\theta$$

si ha:

$$\frac{dy}{d\theta} = - \frac{v^2\, tg\,\theta}{g}$$

quindi

$$\frac{1}{q}\frac{dq}{du} = -\left(tg\,\theta + \frac{\alpha}{g}\,v^2\,tg\,\theta\right)\frac{d\theta}{du}$$

$$\frac{1}{q}\frac{dq}{du} = -\left(\frac{\alpha\,v^2}{g} + 1\right)tg\,\theta\,\frac{d\theta}{du}$$

per cui sostituendo alla relazione [31] che dà $\frac{d^2\theta}{du^2}$ si ha:

$$\frac{d^2\theta}{du^2} = -\left\{\left(\frac{\alpha\,v^2}{g} + 1\right)tg\,\theta\,\frac{d\theta}{du} + \frac{1}{u} + n\,(v)\,\frac{1}{v}\,\frac{dv}{du}\right\}\frac{d\theta}{du}$$

D'altra parte differenziando logaritmicamente la relazione:

$$v\cos\theta = u\cos\varphi$$

poichè $\cos\varphi$ è costante:

$$\frac{1}{v}\frac{dv}{du} - \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\frac{d\theta}{du} = \frac{1}{u}$$

quindi:

$$\frac{1}{v}\frac{dv}{du} = tg\,\theta\,\frac{d\theta}{du} + \frac{1}{u}$$

cioè

$$\frac{d^2\theta}{du^2} = -\left\{\left(\frac{\alpha\,v^2}{g} + 1\right)tg\,\theta\,\frac{d\theta}{du} + \frac{1}{v}\,\frac{dv}{du} - tg\,\theta\,\frac{d\theta}{du} + n\,(v)\,\frac{1}{v}\,\frac{dv}{du}\right\}\frac{d\theta}{du}$$

e ponendo:

$$1 + n\,(v) = \varphi\,(v)$$

si ha:

$$\frac{d^2\theta}{du^2} = -\left\{\left(\frac{\alpha\,v^2}{g} + 1\right)tg\,\theta\,\frac{d\theta}{du} - tg\,\theta\,\frac{d\theta}{du} + \varphi\,(v)\,\frac{1}{v}\,\frac{dv}{du}\right\}\frac{d\theta}{du}$$

cioè

$$\frac{d^2\theta}{du^2} = -\left\{\frac{\alpha\,v^2}{g}\,tg\,\theta\,\frac{d\theta}{du} + tg\,\theta\,\frac{d\theta}{du} - tg\,\theta\,\frac{d\theta}{du} + \varphi\,(v)\,\frac{1}{v}\,\frac{dv}{du}\right\}\frac{d\theta}{du}$$

quindi:

$$\frac{d^2\theta}{du^2} = -\left\{\frac{\alpha\,u^2}{g}\,\frac{\cos^2\varphi}{\cos^2\theta}\,tg\,\theta\,\frac{d\theta}{du} + \varphi\,(v)\,\frac{1}{v}\,\frac{dv}{du}\right\}\frac{d\theta}{du}$$

cioè:

$$\frac{d^2\theta}{du^2} + \frac{\alpha\,u^2\cos^2\varphi}{g}\,\frac{tg\,\theta}{\cos^2\theta}\left(\frac{d\theta}{du}\right)^2 + \varphi\,(v)\,\frac{1}{v}\,\frac{dv}{du}\,\frac{d\theta}{du} = 0$$

ma si è visto precedentemente che:

$$\frac{1}{v}\frac{dv}{du} = \frac{1}{u} + tg\,\theta\,\frac{d\theta}{du}$$

quindi:

$$\frac{d^2\theta}{du^2} + \frac{\alpha\,u^2\cos^2\varphi}{g}\,\frac{tg\,\theta}{\cos^2\theta}\left(\frac{d\theta}{du}\right)^2 + \varphi\,(v)\left(\frac{1}{u} + tg\,\theta\,\frac{d\theta}{du}\right)\frac{d\theta}{du} = 0 \qquad [32]$$

Questa espressione è indipendente da γ e quindi dal proietto e questa semplificazione si ottiene solo quando venga applicata la legge di Bessel.

Inoltre la v vi entra solo in quanto essa è parte della funzione $\varphi(v)$ che però varia assai meno della velocità, essendo:

$$\varphi(v) = n(v) + 1 \quad \text{cioè} \quad \varphi(v) = 2 \div 7$$

Se poniamo poi

$$\varphi(v) = \tau\, \varphi(u) \quad \text{ove} \quad \tau = \frac{\varphi(v)}{\varphi(u)} = \frac{n(v) + 1}{n(u) + 1};$$

τ varia meno ancora di $\varphi(v)$ perchè;

$$\tau_{min} = \frac{2}{7} = 0{,}3 \qquad \tau_{max} = \frac{7}{2} = 3{,}5$$

e quindi diventa più facile assegnargli un valore medio costante. In questa ipotesi, l'equazione definitiva si può scrivere:

$$\frac{d^2\theta}{du^2} + \frac{\alpha}{g}\cos^2\varphi\,\frac{tg\,\theta}{\cos^2\theta}\,u^2\left(\frac{d\theta}{du}\right)^2 + \tau\,\varphi(u)\left(\frac{1}{u} + tg\,\theta\,\frac{d\theta}{du}\right)\frac{d\theta}{du} = 0$$

e facendo per brevità:

$$\frac{\alpha\cos^2\varphi}{g} = K = \text{costante}$$

si ha:

$$\frac{d^2\theta}{du^2} + K\,\frac{tg\,\theta}{\cos^2\theta}\,u^2\left(\frac{d\theta}{du}\right) + \tau\,\varphi(u)\left(\frac{1}{u} + tg\,\theta\,\frac{d\theta}{du}\right)\frac{d\theta}{du} = 0 \qquad [33]$$

È bene osservare che:

$$\tau = \frac{n(v) + 1}{n(u) + 1} = 1 \quad \text{per} \quad f(v) = \gamma\, v^n$$

Questa equazione si sa integrare soltanto nel caso che la resistenza sia proporzionale alla velocità. In questo caso è $F(v) = \lambda\, v$ e quindi $\tau = 1$ e $\varphi(u) = 2$; ed allora l'equazione si riduce ad una forma semplice, con un doppio cambiamento di variabili. Poniamo:

$$\xi = tg\,\theta; \qquad u = \frac{2g}{\lambda\zeta}$$

da cui:

$$d\theta = \frac{d\xi}{1 + \xi^2} \qquad du = -\frac{2g}{\lambda\zeta^2}\,d\zeta$$

onde:

$$\frac{d\theta}{du} = -\frac{\lambda}{2g}\,\frac{\zeta^2}{1 + \xi^2}\,\frac{d\xi}{d\zeta}$$

Differenziando logaritmicamente si ottiene:

$$\frac{\dfrac{d^2\theta}{du^2}}{\dfrac{d\theta}{du}} = -\frac{\lambda\zeta^2}{2g}\left\{\frac{2}{\zeta} - \frac{2\xi}{1+\xi^2}\frac{d\xi}{d\zeta} + \frac{\dfrac{d^2\xi}{d\zeta^2}}{\dfrac{d\xi}{d\zeta}}\right\}$$

Eguagliando questo rapporto all'analogo rapporto che si ricava dalla [33] nella quale si sia posto $\tau\varphi(u) = 2$, dopo di avervi sostituite per θ, u e $\frac{d\theta}{du}$ le loro espressioni nelle nuove variabili, e riducendo, l'equazione si riduce alla forma semplice:

$$\frac{d^2\xi}{d\zeta^2} + K\left(\frac{2g}{\lambda}\right)^2 \frac{\xi}{\zeta^2}\left(\frac{d\xi}{d\zeta}\right)^2 = 0$$

In questa poniamo per brevità:

$$K\left(\frac{2g}{\lambda}\right)^2 = 2a^2 \text{ da cui } a = \sqrt{2\alpha g \frac{\cos\varphi}{\lambda}}$$

e poi poniamo:

$$\chi = a\xi$$

essendo x la nuova variabile dipendente. Sostituendo, l'equazione si riduce a

$$\frac{d^2\chi}{d\zeta^2} + 2\frac{\chi}{\zeta^2}\left(\frac{d\chi}{d\zeta}\right)^2 = 0$$

L'integrazione di questa equazione, mediante un'opportuna trasformazione, si può far dipendere dall'integrazione di un'equazione lineare del 1° ordine. Poniamo perciò anzitutto, per semplicità di scrittura:

$$-p = \frac{d\chi}{d\zeta} = a\frac{d\xi}{d\zeta}$$

che con la precedente si scrive:

$$\frac{dp}{d\zeta} - 2\frac{\chi}{\zeta}\frac{p^2}{\zeta} = 0$$

Operiamo ora una nuova trasformazione, introducendo una nuova variabile z definita da

$$z = \frac{1}{2p} - \frac{\chi}{\zeta} \text{ da cui } \frac{\chi}{\zeta} = \frac{1}{2p} - z$$

Sostituendo nella precedente equazione questo valore di $\frac{\chi}{\zeta}$, essa diventa:

$$\frac{dp}{d\zeta} = 2\frac{p^2}{\zeta}\left(\frac{1}{2p} - z\right) = \frac{p}{\zeta}(1 - 2zp)$$

da cui:

$$\frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{dp}{p(1-2zp)}$$

D'altra parte differenziando l'espressione di z, si ha:

$$dz = -\frac{dp}{2p^2} + (\zeta : p + \chi)\frac{d\zeta}{\zeta^2} = -\frac{dp}{2p^2} + \left(p - z + \frac{1}{2p}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}$$

da cui:

$$\frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{2p^2\, dz + dp}{p\,(2p^2 + 1 - 2zp)}$$

Eguagliando le due espressioni trovate per $\frac{d\zeta}{\zeta}$ si ha la relazione cercata tra p e z.

$$\frac{dp + 2p^2\, dz}{2p^2 + 1 - 2zp} = \frac{dp}{1 - 2zp}$$

e riducendo diventa:

$$\frac{dp}{dz} + 2zp = 1$$

ch'è infatti un'equazione lineare del 1° ordine.

Il suo integrale generale è:

$$p = e^{-z^2}\left(\Gamma + \int_0^z e^{z^2}\, dz\right)$$

essendo Γ una costante arbitraria. Lo scriveremo più brevemente

$$p = e^{-z^2}\left[\Gamma + \Phi(z)\right]$$

ponendo:

$$\Phi(z) = \int_0^z e^{z^2}\, dz$$

da cui si ricava:

$$\Phi'(z) = e^{z^2}$$

Ed ora passiamo a ricercare le variabili primitive χ e ζ. La ζ si ha subito dalla prima espressione di $\frac{d\zeta}{\zeta}$, la quale, poichè dall'equazione lineare si ricava:

$$\frac{dp}{1 - 2zp} = dz$$

si riduce a

$$\frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{dz}{p} = \frac{e^{z^2}\, dz}{\Phi(z) + \Gamma}$$

che s'integra immediatamente e fornisce:

$$\zeta = \Gamma_1\left[\Phi(z) + \Gamma\right]$$

essendo Γ_1 un'altra costante arbitraria.

La χ si ha dalla definizione di z che fornisce

$$\chi = -z\zeta + \frac{\zeta}{2p}$$

che per i precedenti valori di ζ e di p si può scrivere:

$$\chi = -z\zeta + \frac{1}{2}\Gamma_1 e^{z^2}$$

Sostituendo in questa l'espressione di ζ e dividendo per $\Gamma_1 z$, essa diventa:

$$\frac{\chi}{\Gamma_1 z} = -\Phi(z) - \Gamma + \frac{e^{z^2}}{2z} = \chi(z) - \Gamma$$

ponendo

$$\chi(z) = \frac{e^{z^2}}{2z} - \Phi(z)$$

Le due relazioni precedenti possono scriversi

$$\left.\begin{aligned} \frac{\zeta}{\Gamma_1} - \Phi(z) &= \Gamma \\ x(z) - \frac{1}{\Gamma_1}\frac{\chi}{z} &= \Gamma \end{aligned}\right\} \qquad [34]$$

le quali costituiscono l'integrale generale dell'equazione differenziale del 2° ordine, espresso per mezzo di un parametro z variabile.

Le due costanti Γ e Γ_1, ed il valore iniziale z_0 del parametro z devono determinarsi in funzione dei valori iniziali di χ, ζ e p, che sono:

$$\chi_0 = a\, tg\, \varphi\,; \qquad \zeta_0 = \frac{2g}{\lambda V}; \qquad p_0 = -\left(\frac{d\chi}{d\zeta}\right)_0 = -a\left(\frac{d\xi}{d\zeta}\right)_0$$

Quanto a p_0, dall'equazione dell'odografa che in questo caso si scrive:

$$du = \frac{\delta_y\, i\, \lambda \cos\varphi}{Cg} u^2 d\xi$$

da cui:

$$d\xi = \frac{C}{2\delta_y\, i \cos\varphi} \frac{2g}{\lambda u^2} du$$

e da:

$$d\zeta = -\frac{2g}{\lambda u^2} du$$

si ricava:

$$p = -a\frac{d\xi}{d\zeta} = \frac{Ca}{2\delta_y\, i\cos\varphi}$$

da cui ricordando il valore di a

$$p_0 = \frac{Ca}{2\delta_0\, i\cos\varphi} = \frac{C\sqrt{2\alpha g}}{2\delta_0\, i\,\lambda}$$

D'altra parte dividendo l'una per l'altra le espressioni di ζ e di p e ponendovi $z = z_0$, si ha:

$$\Gamma_1 = \frac{\zeta_0}{p_0} e^{-z_0^2}$$

quindi sostituendovi le espressioni di ζ_0 e p_0 e riducendo, si ottiene:

$$\Gamma_1 = \sqrt{\frac{2g}{\alpha}}\,\frac{2\delta_0 i}{CV}\,e^{-z_0^2}$$

Mettendo nelle [34] per ζ e χ le loro espressioni

$$\zeta = \frac{2g}{\lambda u} \qquad \chi = a\,tg\,\theta$$

esse assumono la forma:

$$\begin{cases} \dfrac{2g}{\lambda\Gamma_1}\,\dfrac{1}{u} - \Phi(z) = \Gamma \\ \chi(z) - \dfrac{a}{\Gamma_1}\,\dfrac{\operatorname{tg}\theta}{z} = \Gamma \end{cases}$$

I coefficienti di queste espressioni, introducendovi il valore trovato per Γ_1, diventano:

$$\frac{2g}{\lambda\Gamma_1} = \frac{CV\sqrt{2g\alpha}}{2\delta_0 i\lambda}\,e^{z_0^2}\,; \qquad \frac{a}{\Gamma_1} = \frac{\alpha CV\cos\varphi}{2\delta_0 i\lambda}\,e^{z_0^2}$$

Ponendo per brevità

$$\gamma = \frac{2\delta_0 i\lambda}{C}$$

e sostituendo le due precedenti si scrivono:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\sqrt{2\alpha g}}{\gamma}\,e^{z_0^2}\,\frac{V}{u} - \Phi(z) = \Gamma \\ &\chi_0(z) - \frac{\alpha V\cos\varphi}{\gamma}\,e^{z_0^2}\,\frac{tg\,\theta}{z} = \Gamma \end{aligned}\right\} \qquad [35]$$

Ponendo nella prima $z = z_0$ si ha l'espressione della costante Γ

$$\Gamma = \frac{\sqrt{2\alpha g}}{\gamma}\,e^{z_0^2} - \Phi(z_0)$$

Il valore iniziale z_0 lo otteniamo dall'espressione che definisce z, ponendovi per χ_0, ζ_0 e p_0 i valori ora trovati; allora si ha:

$$z_0 = \frac{1}{2p_0} - \frac{\chi_0}{\zeta_0} = \frac{\delta i\lambda}{C\sqrt{2\alpha g}} - \frac{\lambda a\operatorname{tg}\varphi}{2g}\,V =$$

$$= \frac{\gamma}{2\sqrt{2\alpha g}} - \frac{\sqrt{2\alpha g}}{2g}\,V\operatorname{sen}\varphi$$

e finalmente

$$z_0 = \frac{1}{2\sqrt{2\alpha g}}\,(\gamma - 2\alpha V\operatorname{sen}\varphi)$$

Determinate le costanti ed il valore iniziale di z, non resta che utilizzare le formule trovate per u e per $tg\,\theta$, per ottenere gli altri elementi.

E cominciamo dal tempo. Per t si ha:

$$dt = -\frac{v}{g}\frac{d\theta}{\cos\theta} = -\frac{u\cos\varphi}{g}\,d\,\xi = \frac{2\cos\varphi}{\lambda a}\,p\,\frac{d\zeta}{\zeta}$$

$$= \frac{2\cos\varphi}{\lambda a}\,dz = \frac{2}{\sqrt{2\,\alpha\,g}}\,dz$$

onde integrando

$$t = \frac{2}{\sqrt{2\,\alpha\,g}}\,(z - z_0)$$

da cui si deduce che in definitiva il parametro z è funzione lineare del tempo.

Per l'ascissa si ha:

$$d\,x = v\cos\theta\,dt = u\cos\varphi\,dt = \frac{2\cos\varphi}{\sqrt{2\,\alpha\,g}}\,u\,dz$$

Ora dalla prima delle [35] si ricava

$$u = \frac{V\sqrt{2\,\alpha\,g}}{\gamma}\,e^{z_0^2}\,\frac{1}{\Phi(z)+\Gamma}$$

quindi sostituendo viene

$$dx = \frac{2\,V\cos\varphi}{\gamma}\,e^{z_0^2}\,\frac{dz}{\Phi(z)+\Gamma}$$

da cui integrando dall'origine, si ha:

$$x = \frac{2V\cos\varphi}{\gamma}\,e^{z_0^2}\int_{z_0}^{z}\frac{dz}{\Phi(z)+\Gamma}$$

che ponendo

$$\Psi(z,\Gamma) = \int_0^z \frac{dz}{\Psi(z)+\Gamma}$$

si può scrivere:

$$x = \frac{2\,V\cos\varphi}{\gamma}\,e^{z_0^2}\left\{\Psi(z,\Gamma) - \Psi(z_0,\Gamma)\right\}$$

Finalmente l'ordinata l'otteniamo senza integrazione, considerando che dalla equazione dell'odografa abbiamo ottenuto una relazione della forma.

$$p\,\delta_y = \text{costante}$$

da cui ricaviamo, essendo $\delta_y = \delta_0\,e^{-\alpha y}$,

$$e^{\alpha y} = K\,p \quad \text{essendo } K \text{ una costante}$$

Da questa prendendo i logaritmi si ha:

$$\alpha\,y = \log K + \log p = \log K + \log[\,\Phi(z) + \Gamma\,] - z^2$$

la quale ponendovi $z = z_0$, $y = 0$ fornisce:

$$0 = \log K + \log \Phi[\,(z_0) + \Gamma\,] - z_0^2$$

che, sottratta dall'altra, permette di eliminare la costante K, e dà:

$$\alpha\,y = \log\frac{\Phi(z)+\Gamma}{\Phi(z_0)+\Gamma} - (z^2 - z_0^2).$$

Ora dalla prima delle [35] si ricava

$$\frac{\Phi(z)+\Gamma}{\Phi(z_0)+\Gamma} = \frac{V}{u} = \frac{V\cos\varphi}{v\cos\theta}$$

quindi si ha

$$y = \frac{1}{\alpha}\left\{\log_e \frac{V\cos\varphi}{v\cos\theta} - (z^2 - z_0^2)\right\}.$$

Riepilogando, e ponendo per brevità:

$$B = \frac{\gamma}{V\cos\varphi}\, e^{-z_0^2} = \frac{2\,\delta_0\, i\,\lambda}{C\,V\cos\varphi}\, e^{-z_0^2}$$

in modo che B sarà un coefficiente costante che raggruppa in sè tutti i dati iniziali, si hanno le seguenti formule del tiro definitive per il caso che si considera:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{v\cos\theta} - \frac{1}{V\cos\varphi} &= \frac{B}{\sqrt{2\alpha g}}\left\{\Phi(z) - \Phi(z_0)\right\}\\
\frac{tg\,\varphi}{z_0} - \frac{tg\,\theta}{z} &= \frac{B}{\alpha}\left\{\chi(z) - \chi(z_0)\right\}\\
x &= \frac{2}{B}\left\{\Psi(z,\Gamma) - \Psi(z_0,\Gamma)\right\}\\
y &= \frac{1}{\alpha}\left\{\log_e\frac{V\cos\varphi}{v\cos\theta} - (z^2 - z_0^2)\right\}\\
t &= \frac{2}{\sqrt{2\alpha g}}(z - z_0)
\end{aligned}\right\} \qquad [36]$$

Metodo Légendre per $F(v) = \lambda v^2$

Un altro caso d'integrabilità è quello trovato da Légendre (1) per la resistenza quadratica e supponendo la densità variabile secondo la legge:

$$\delta_y = \frac{\delta_0}{1 + \alpha y}$$

Ponendo quest'espressione ed ancora

$$F(v) = \lambda v^2$$

nella prima delle due equazioni fondamentali e ponendo per brevità

$$c = \frac{\delta_0\, i\,\lambda}{C\,g}$$

questa diventa:

$$(1 + \alpha y)\, d(v\cos\theta) = c\, v^3\, d\theta = c\,(v\cos\theta)^3\,\frac{d\theta}{\cos^3\theta}$$

Dividiamo per $(v\cos\theta)^3$ e integriamo: verrà:

$$\int (1 + \alpha y)\,\frac{d(v\cos\theta)}{(v\cos\theta)^3} = c\int\frac{d\theta}{\cos^3\theta} = c\,\xi_{\omega}(\theta)$$

(1) Légendre - *Dissertation sur la question balistique proposée par l'Académie royale de Prussie 1783.*

Integriamo per parti nel primo membro; otteniamo

$$c\,\xi_2(\theta) = -\frac{1+\alpha y}{2(v\cos\theta)^2} + \frac{\alpha}{2}\int\frac{dy}{v^2\cos^2\theta} \qquad [37]$$

Ora dalla seconda delle due equazioni c. s. si ricava:

$$\frac{dy}{v^2\cos^2\theta} = -\frac{1}{g}\,tg\,\theta\,\frac{d\,\theta}{\cos^2\theta} = -\frac{1}{g}\,tg\,\theta\,d\,tg\,\theta \qquad [38]$$

quindi sostituendo ed integrando si avrà:

$$c\,\xi_2(\theta) = -\frac{1+\alpha y}{2\,v^2\cos^2\theta} - \frac{\alpha}{4g}\,tg^2\,\theta + \frac{K}{2}$$

essendo $\frac{K}{2}$ una costante arbitraria.

Di qui si ricava

$$\frac{1+\alpha y}{v^2\cos^2\theta} = -2\,c\,\xi_2(\theta) - \frac{\alpha}{2g}\,tg^2\,\theta + K$$

Dividendo la [38] per questa si ottiene

$$\frac{g\,d\,y}{1+\alpha y} = \frac{tg\,\theta\,d\,tg\,\theta}{2\,c\,\xi_2(\theta) + \frac{\alpha}{2g}\,tg^2\,\theta - K}$$

Integrando dall'origine si ha:

$$\frac{g}{\alpha}\log(1+\alpha y) = \int_{\varphi}^{\theta}\frac{tg\,\theta\,d\,tg\,\theta}{2\,c\,\xi_2(\theta) + \frac{\alpha}{2g}\,tg^2\,\theta - K} = \frac{g}{\alpha}\,\Psi(\theta)$$

denotando con $\Psi(\theta)$ l'integrale moltiplicato per $\frac{\alpha}{g}$; di qui si ricava:

$$1+\alpha y = e^{\Psi} \text{ onde } y = \frac{e^{\Psi}-1}{\alpha}$$

Sostituendo nell'espressione trovata sopra, si ha:

$$v^2\cos^2\theta = \frac{e^{\Psi(\theta)}}{K - \frac{\alpha}{2g}\,tg^2\,\theta - 2\,c\,\xi_2(\theta)}$$

Per l'ascissa si ha:

$$gx = -\int_{\varphi}^{\theta} v^2\cos^2\theta\,d\,tg\,\theta = \int_{\varphi}^{\theta}\frac{e^{\Psi}\,d\,tg\,\theta}{2\,c\,\xi_2(\theta) + \frac{\alpha}{2g}\,tg^2\,\theta - K}$$

Così il problema è ridotto alle quadrature; ma queste formule non hanno finora trovato applicazione pratica, perchè alquanto complicate e d'altra parte non facilmente traducibili in tabelle, contenendo, oltre la variabile, anche tre costanti: φ, c, K.

Altri casi d'integrabilità, quando si supponga la densità variabile, non si conoscono.

CAPITOLO VI

METODO SIACCI

1 - Cenno sul metodo Didion.

Il primo che alterò la forma della resistenza in modo da ridurre le equazioni del moto alle quadrature fu il Didion il quale pose:

$$\rho = qv^2 \left(1 + \frac{v}{r}\right)$$

con q ed r costanti.

In tal caso

$$f(v) = \frac{v^2}{2c}\left(1 + \frac{v}{r}\right)$$

con c costante.

L'equazione del moto orizzontale

$$\frac{d(v \cos\theta)}{dt} = -f(v)\cos\theta\,;$$

si può pure scrivere

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{v^2}{2c}\left(1 + \frac{v}{r}\right)\cos\theta \qquad \text{ma } \frac{dx}{ds} = \cos\theta$$

quindi

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{v^2}{2c}\left(1 + \frac{v}{r}\right)\frac{dx}{ds}$$

Ponendo invece di $\frac{ds}{dx}$ un valore medio α poichè

$$\frac{ds}{dt} = v = \frac{ds}{dx}\,\frac{dx}{dt} = \alpha\,\frac{dx}{dt}$$

sarà

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{1}{2c}\,\alpha^2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\left(1 + \frac{\alpha}{r}\,\frac{dx}{dt}\right)\frac{dx}{ds} = \qquad [1]$$

$$= -\frac{1}{2c}\,\alpha\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\left(1 + \frac{\alpha}{r}\,\frac{dx}{dt}\right)$$

ma $\frac{dx}{dt} = v\cos\theta = v_1$; perciò la equazione [1] può scriversi

$$\frac{d(v\cos\theta)}{dt} = \frac{dv_1}{dt} = \frac{\frac{dv_1}{dx}}{\frac{dt}{dx}} = -\frac{1}{2c}\,\alpha\, v_1^2\left(1 + \frac{\alpha}{r}\, v_1\right)$$

e poichè

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{v_1}$$

quindi

$$\frac{dv_1}{dx} = -\frac{1}{2c}\alpha v_1\left(1 + \frac{\alpha}{r}v_1\right)$$

da cui

$$dx = -\frac{2c}{\alpha}\frac{dv_1}{v_1\left(1 + \frac{\alpha}{r}v_1\right)}$$

che integrata dall'origine in cui $x = 0$

$v_1 = V_1 = V\cos\varphi$ darà

$$x = \frac{2c}{\alpha}\log\frac{1 + \frac{r}{\alpha}\frac{1}{v_1}}{1 + \frac{r}{\alpha}\frac{1}{V_1}}$$

da cui

$$e^{\frac{\alpha x}{2c}} = \frac{1 + \frac{r}{\alpha}\frac{1}{v_1}}{1 + \frac{r}{\alpha}\frac{1}{V_1}}$$

$$1 + \frac{r}{\alpha}\frac{1}{v_1} = \left(1 + \frac{r}{\alpha}\frac{1}{V_1}\right)e^{\frac{\alpha x}{2c}}$$

$$\frac{\alpha v_1}{r} = \frac{1}{1 + \frac{r}{\alpha}\frac{1}{V_1}e^{\frac{\alpha x}{2c}}} - 1$$

$$v_1 = \frac{r}{\alpha}\left(\frac{1}{1 + \frac{r}{\alpha}\frac{1}{V_1}e^{\frac{\alpha x}{2c}}} - 1\right)$$

Si è ottenuto così in tal modo il valore di $v_1 = v\cos\theta$.
Se ora poniamo $v_1 = v\cos\theta = F(x)$ si deduce, dalle equazioni di S. Robert:

$$t = \int_0^x \frac{dx}{F(x)}$$

$$g\,dx = -v^2\,d\theta = -v_1^2\frac{d\theta}{\cos^2\theta} = -v_1^2\,d\,tg\,\theta$$

$$d\,tg\,\theta = -g\frac{dx}{[F(x)]^2} \quad \text{da cui}$$

$$tg\,\theta = tg\,\varphi - g\int_0^x \frac{dx}{[F(x)]^2}$$

e poichè $\frac{dy}{dx} = tg\,\theta$ si ricava

$$y = x\,tg\,\varphi - g\int_0^x dx\int_0^x \frac{dx}{[F(x)]^2} \qquad [2]$$

E il problema è ridotto alle quadrature.
Per il parametro α il Didion assume il valore medio dato dal Bézont.

$$\alpha = \frac{\xi_1(\varphi)}{tg\,\varphi}$$

2 - Cenno sul metodo di Saint-Robert.

Il S. Robert pone

$$f(v) = \frac{f(\alpha v \cos\theta)}{\alpha \cos\theta}$$

e suppone α = costante; in tal caso l'equazione dell'odografa diviene:

$$d(v\cos\theta) = v\frac{f(\alpha v \cos\theta)}{\alpha\cos\theta}\,d\theta \quad (g \text{ è compreso in } f(v))$$

Ponendo $\alpha v \cos\theta = u$ e moltiplicando ambo i membri dell'equazione dell'odografa per $\alpha\cos\theta$ sarà

$$\alpha\cos\theta\, d(v\cos\theta) = \frac{\alpha v\cos\theta\, f(\alpha v\cos\theta)}{\alpha u \cos\theta}\,d\theta$$

cioè

$$\alpha\, du = \frac{uf(u)}{\cos^2\theta}\,d\theta$$

e quindi

$$\frac{\alpha\, du}{uf(u)} = \frac{d\theta}{\cos^2\theta}$$

che integrata fornisce

$$tg\,\theta = tg\,\varphi + \alpha\int_{u_0}^{u}\frac{du}{uf(u)}$$

Calcolo delle x

$$gdx = -v^2\frac{\cos^2\theta\, d\theta}{\cos^2\theta} = -\frac{u^2}{\alpha^2}\,d\,tg\,\theta$$

$$= -\frac{u^2}{\alpha^2}\,\frac{\alpha\, du}{uf(u)} = -\frac{1}{\alpha}\,\frac{u\,du}{f(u)}$$

$$\alpha\, gx = -\int_{u_0}^{u}\frac{u\,du}{f(u)}$$

Calcolo del tempo

$$g\,dt = -v\frac{dt}{\cos\theta} = -v\cos\theta\frac{d\theta}{\cos^2\theta}$$

$$g\,dt = -\frac{u}{\alpha}\,\frac{d\theta}{\cos^2\theta} = -\frac{u}{\alpha}\,\frac{\alpha\,du}{uf(u)} = -\frac{du}{f(u)}$$

$$gt = -\int_{u_0}^{u}\frac{du}{f(u)}$$

Calcolo di y.

Se si indica con $F(x)$ la espressione delle u in funzione di x ed è

$$\frac{1}{u^2} = F(x);$$

$$gd\,x = -v^2\,d\theta = -(v\cos\theta)^2\frac{d\theta}{\cos^2\theta}$$

$$\frac{d\theta}{\cos^2\theta} = -\frac{g\,dx}{(v\cos\theta)^2} = -\frac{\alpha^2\, gd\,x}{u^2} = -\alpha^2\, g\, F(x)\, d\,x$$

che integrata dà

$$tg\,\theta = tg\,\varphi - \alpha^2 g \int_0^x F(x)\,dx$$

ma $\frac{dy}{dx} = tg\,\theta$ quindi moltiplicando per dx ed integrando di nuovo si ha

$$y = x\,tg\,\varphi - \alpha^2 g \int_0^x dx \int_0^x F(x)\,dx$$

3 - Metodo Siacci.

a) Premesse.

Le forme di resistenza studiate nei casi d'integrabilità non sono forme che si riscontrano nella pratica od almeno sono applicabili a tratti di traiettoria assai limitati e mai a tutta la traiettoria; da ciò la necessità di determinare forme e metodi approssimati che permettessero di calcolare le traiettorie in un solo arco.

Il metodo di approssimazione generalmente preferito fu quello di alterare alquanto la forma sperimentale della resistenza in modo da rendere integrabili le equazioni del moto.

b) Formule del tiro.

Abbiamo visto che la ritardazione su un proietto è funzione oltre che della velocità, anche di quantità proprie del proietto e della densità del mezzo, e giacchè il proietto nel suo cammino percorre strati d'aria di diverse densità, anche la ritardazione dovrà variare in funzione della quota.

Indicando con δ_y la densità dell'aria corrispondente alla ordinata y, scriveremo la ritardazione sotto la forma

$$f(v) = \frac{\delta_y\, i}{C} F(v)$$

per cui l'equazione dell'odografa diviene:

$$g d(v \cos\theta) = \frac{\delta_y\, i}{C} v F(v)\, d\theta$$

A questo punto Siacci introduce la posizione che è una delle particolarità del suo metodo, pone cioè

$$u \cos\varphi = v \cos\theta \qquad [3]$$

definendo la u come *pseudo velocità*.

In questo caso si avrà

$$g\,du = \frac{\delta_y\, i}{C} u F(v) \frac{d\theta}{\cos\theta}$$

$$g d x = - u^2 \cos^2\varphi \frac{d\theta}{\cos^2\theta}$$

$$g\,dt = - u \cos\varphi \frac{d\theta}{\cos^2\theta}$$

La variabile u può esser individuata nel seguente modo: se si immagina la velocità v in un punto qualunque decomposta in due componenti, una diretta secondo la linea di proiezione, ed una verticale, si ha (fig. 65)

$$u \cos \varphi = v \cos \theta$$

quindi la u è la componente sulla linea di proiezione della v, quando l'altra componente è verticale.

Considerando che nella

$$u = \frac{v \cos \theta}{\cos \varphi} \qquad \cos \varphi = \text{cost.}$$

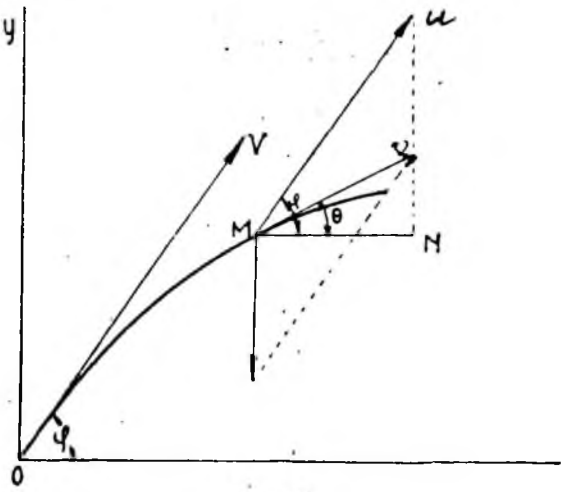


FIG. 65.

avviene che u è sempre decrescente perchè $v \cos \theta$ è decrescente e nell'origine essendo $\cos \theta = \cos \varphi$ sarà $u = V$.

Nel punto $P_{-\varphi}$, in cui $\theta = -\varphi$ è ancora $u = v$, dall'origine al punto $P_{-\varphi}$, $u > v$, dal punto $P_{-\varphi}$ in poi $u < v$.

Il 2° artificio del Siacci consiste nel porre

$$\delta_y F(v) = \delta_o \beta F(u) \frac{\cos^2 \varphi}{\cos \theta} \qquad [4]$$

essendo δ_o la densità all'origine della traiettoria e β una funzione variabile che fa sussistere l'equazione. In questo caso, la equazione dell'odografa, nella quale è già stata introdotta la u, diverrà:

$$g\, du = \frac{\delta_o i \beta}{C} \frac{\cos^2 \varphi}{\cos \theta} u F(u) \frac{d\theta}{\cos \theta} = \frac{\delta_o i \beta}{C} \cos^2 \varphi\, u F(u) \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}$$

da cui separando le variabili

$$\beta \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = \frac{C g}{\delta_o i \cos^2 \varphi} \frac{du}{u F(u)} \qquad [5]$$

Abbiamo già visto che

$$g d x = - v^2 d\theta = - u^2 \cos^2 \varphi \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}$$

quindi

$$\beta\, dx = - \frac{u^2 \cos^2 \varphi}{g} \beta \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}$$

e sostituendo:

$$\beta\, dx = - \frac{C g}{\delta_o i \cos^2 \varphi} \frac{u^2 \cos^2 \varphi}{g} \frac{du}{u F(u)} = - \frac{C}{\delta_o i} \frac{u\, d u}{F(u)} \qquad [6]$$

analogamente si ha da

$$g\, dt = - v \frac{d\theta}{\cos \theta} = - u \cos \varphi \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}; \qquad \beta\, dt = - \frac{u \cos \varphi}{g} \beta \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}$$

$$\beta\, dt = - \frac{u \cos \varphi}{g} \frac{C g}{\delta_o i \cos^2 \varphi} \frac{du}{u F(u)} = - \frac{C}{\delta_o i \cos \varphi} \frac{du}{F(u)}$$

Integrando queste tre equazioni dall'origine ad un punto generico, essendo all'origine $u = V$, si ha:

$$\left.\begin{array}{l} \int_0^x \beta\, dx = \frac{C}{\delta_0 i} \int_V^u - \frac{u\,du}{F(u)}\;; \qquad \int_\varphi^\theta \beta \frac{\delta\theta}{\cos^2\theta} = - \frac{C}{2\,\delta_0\, i \cos^2\varphi} \int_V^u \frac{-2\,g\,du}{u\,F(u)} \\ \int_0^t \beta\, dt = \frac{C}{\delta_0\, i \cos\varphi} \int_V^u - \frac{du}{F(u)} \end{array}\right\} \quad [7]$$

Si ponga ora

$$\left.\begin{array}{l} \int \frac{-2\,g\,du}{u\,F(u)} = J(u)\;; \qquad \int - \frac{u\,du}{F(u)} = D(u) \\ \int - \frac{du}{F(u)} = T(u) \end{array}\right\} \quad [8]$$

Sostituendo queste nuove notazioni avremo:

$$\left.\begin{array}{l} \int_\varphi^\theta \beta \frac{d\theta}{\cos^2\theta} = - \frac{C}{2\,\delta_0\, i \cos^2\varphi} [\,J(u) - J(V)\,] \\ \int_0^x \beta\, dx = \frac{C}{\delta_0 i} [D(u) - D(V)\,] \\ \int_0^t \beta\, dt = \frac{C}{\delta_0\, i \cos\varphi} [\,T(u) - T(V)\,] \end{array}\right\} \quad [7']$$

Calcolo della y.

Sappiamo che $\frac{dy}{dx} = tg\,\theta$ quindi

$$dy = dx\, tg\,\theta$$

moltiplicando la equazione [6] di $\beta\, dx$ per $\int_\varphi^\theta \beta \frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \int_\varphi^\theta \beta\, tg\,\theta$ si ha

$$\beta\, dx \int_\varphi^\theta \beta \frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \frac{C}{\delta_0 i} \frac{-u\,du}{F(u)} \left| \frac{-C}{2\,\delta_0\, i \cos^2\varphi} (J(u) - J(V) \right| =$$

$$= - \frac{1}{2} \left(\frac{C}{\delta_0\, i \cos\varphi} \right)^2 \left| \frac{-u\,du}{F\,u} J(u) - \frac{-u\,du}{F(u)} J(V) \right|$$

Integriamo tra l'origine ed un punto qualunque x

$$\int_0^x \left[\beta\, dx \int_\varphi^\theta \beta \frac{d\theta}{\cos^2\theta} \right] = - \frac{1}{2} \left(\frac{C}{2\,\delta_0\, i \cos\varphi} \right)^2 \int_V^u \left\{ \frac{-u\,du}{F(u)} J(u) - \frac{-u\,du}{F(u)} I(V) \right\}$$

ponendo

$$\int \frac{-u\,du}{F(u)} J(u) = A(u)$$

si avrà

$$\int_0^x \beta\, dx \int_\varphi^\theta \beta \frac{d\theta}{\cos^2\theta} = - \frac{1}{2} \left(\frac{C}{\delta_0\, i \cos\varphi} \right)^2 \Big| A(u) - A(V) - \Big(D(u) - D(V)\Big) J(V) \Big|$$

e dividendo per

$$\int_0^a \beta\, dx = \frac{C}{\delta_0 i} [D(u) - D(V)]$$

sarà

$$\frac{\int_0^x \left[\beta\, dx \int_\varphi^\theta \beta \frac{d\theta}{\cos^2\theta}\right]}{\int_0^x \beta\, dx} = \frac{-\frac{1}{2}\left[\frac{C}{\delta_0 i \cos\varphi}\right]^2}{\frac{C}{\delta_0 i}} \left\{ \frac{A(u) - A(V)}{D(u) - D(V)} - J(V) \right\} =$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{C}{\delta_0 i \cos^2\varphi} \left\{ \frac{A(u) - A(V)}{D(u)\, D(V)} - J(V) \right\}$$

che è la quarta della [7′]

Abbiamo così un sistema di quattro equazioni che ci danno, integrate, gli elementi del punto generico di una traiettoria e precisamente:

$$\left.\begin{aligned}
&\int_\varphi^\theta \beta \frac{d\theta}{\cos^2\theta} = -\frac{C}{2\,\delta_0 i \cos^2\varphi} [J(u) - J(V)] \\
&\int_0^x \beta\, dx = \frac{C}{\delta_0 i} [D(u) - D(V)] \\
&\int_0^t \beta\, dt = \frac{C}{\delta_0 i \cos\varphi} [T(u) - T(V)] \\
&\frac{\int_0^x \left[\beta\, dx \int_\varphi^\theta \beta \frac{d\theta}{\cos^2\theta}\right]}{\int_0^x \beta\, dx} = -\frac{C}{2\,\delta_0 i \cos^2\varphi} \left[\frac{A(u) - A(V)}{D(u) - D(V)} - J(V)\right]
\end{aligned}\right\} \quad [7']$$

Integriamo i primi membri applicando il teorema del valor medio cioè, ponendo per β un valore medio entro i limiti delle rispettive integrazioni (β_θ β_x β_t β_y); sarà:

$$\left.\begin{aligned}
&\int_\varphi^\theta \beta \frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \beta_\theta \int_\varphi^\theta \frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \beta_\theta (tg\,\theta - tg\,\varphi) \\
&\int_0^x \beta\, dx = \beta_x \int_0^x dx = \beta_x\, x \\
&\int_0^t \beta\, dt = \beta_t \int_0^t dt = \beta_t\, t \\
&\frac{\int_0^x \left[\beta\, dx \int_\varphi^\theta \beta \frac{d\theta}{\cos^2\theta}\right]}{\int_0^x \beta\, dx} = \beta_y \frac{\int_0^x dx \int_\varphi^\theta \frac{d\theta}{\cos^2\theta}}{\int_0^x dx} = \beta_y \frac{\int_0^x dx\,(tg\,\theta - tg\,\varphi)}{x} = \\
&= \beta_y \frac{\int_0^x tg\,\theta\, dx - x\, tg\,\varphi}{x}
\end{aligned}\right\} \quad [9]$$

Ma $tg\,\theta\, dx = dy$ quindi sostituendo ed integrando si avrà

$$\beta_y \left(\frac{y - x\, tg\,\varphi}{x}\right)$$

Sostituendo nelle [7] i valori trovati e portando i β ai secondi membri si avrà

$$\left.\begin{aligned} tg\,\theta &= tg\,\varphi - \frac{C}{2\,\delta_0\, i\, \beta_\theta \cos^2\varphi}\,[\,J(u) - J(V)\,] \\ x &= \frac{C}{\delta_0\, i\, \beta_x}\,[\,D(u) - D(V)\,] \\ t &= \frac{\delta_0\, i\, \beta_t \cos\varphi}{C}\,[\,T(u) - T(V)\,] \\ \frac{y}{x} &= tg\,\varphi - \frac{2\,\delta_0\, i\, \beta_y \cos^2\varphi}{C}\left[\frac{A(u) - A(V)}{D(u) - D(V)} - J(V)\right] \\ v\cos\theta &= u\cos\varphi \end{aligned}\right\} \qquad [10]$$

che danno gli elementi del punto della traiettoria in funzione della variabile ausiliaria u.

Queste costituiscono le prime formule del tiro del Metodo Siacci.

c) Limiti di β

Si è posto $\delta_y F(v) = \delta_0 \beta F(u) \frac{\cos^2\varphi}{\cos\theta}$ da cui

$$\beta = \frac{\delta_y}{\delta_0}\frac{F(v)}{F(u)}\frac{\cos\theta}{\cos^2\varphi} \quad \text{ma} \quad F(v) = K(v)\,v^2 = K(v)\,\frac{u^2\cos^2\varphi}{\cos^2\theta}$$

quindi

$$\beta = \frac{\delta_y}{\delta_0}\frac{K(v)}{K(u)}\frac{u^2\cos^2\varphi}{u^2\cos^2\theta}\frac{\cos\theta}{\cos^2\varphi} = \frac{\delta_y}{\delta_0}\frac{K(v)}{K(u)}\frac{1}{\cos\theta} \qquad [11]$$

Nell'origine $\delta_y = \delta_0$; $V = u$ quindi $K(v) = K(u)$ quindi

$$\beta = \frac{1}{\cos\varphi}$$

Dall'origine al vertice $\frac{\delta_y}{\delta_0}$ diminuisce sempre, al vertice $\delta_y = \delta_Y$; $v = v_0$ e se u_0 è la pseudo velocità sarà

$$u_0\cos\varphi = v_0; \qquad K(v) = K(v_0); \qquad K(u) = K(v_0 \sec\varphi)$$

quindi

$$\beta = \frac{\delta_Y}{\delta_0}\frac{K(v_0)}{K(v_0\sec\varphi)}$$

Nel punto in cui $\theta = -\varphi$ cioè in $P_{(-\varphi)}$; $v = u$; $\cos\theta = \cos\varphi$ quindi

$$\beta = \frac{\delta_y}{\delta_0}\frac{1}{\cos\varphi}$$

Nel punto di caduta $\delta_y = \delta_0$; $-\theta = \omega$; $v = U$, quindi

$$\beta = \frac{K(U)}{K(u)}\frac{1}{\cos\omega}$$

Il valore β decresce dall'origine al vertice, poco oltre il vertice assume il valore minimo, indi cresce indefinitamente.

Per angoli piccoli si può, senza commettere un notevole errore, assumere $\beta = 1$.

In prima approssimazione, e quando si tratti di angoli di tiro inferiori ai 20°, si può ritenere

$$\beta = \beta_x = \beta_y = \beta_\theta = \beta_t;$$

quando $\varphi > 20^\circ$ è necessario assumere per le varie quantità trovate in precedenza i rispettivi valori di β.

d) Valori medi di β.

Il Siacci trovò una espressione analitica del valor medio di β che serve a risolvere i problemi principali del tiro della quale il primo termine è:

$$\beta = \frac{3}{2\,F(V_0)\,\mathrm{sen}\,2\varphi} \int_0^\varphi F\left(\frac{V_0 \cos\varphi}{\cos\theta}\right)\left(1 + \frac{tg^2\,\theta}{tg^2\,\varphi}\right)\left[1 - \alpha\,Y\left(1 - \frac{tg^2\,\theta}{tg^2\,\varphi}\right)\right]\frac{d\,\theta}{\cos\theta}$$

ove $\quad V_0 = \sqrt{\dfrac{g\,X}{\mathrm{sen}\,2\,\varphi}} \qquad Y = \dfrac{1}{4}\,X\,tg\,\varphi \qquad \alpha = 0{,}000085$

Poichè gli altri termini sono di difficile sviluppo, egli consigliò di abbandonarli, trascurando per compenso la parte negativa del 1° termine, cioè quella parte che ha per coefficiente α e che poteva ritenersi, secondo il Siacci, dell'ordine di grandezza delle parti trascurate.

Con questa formula egli calcolò nel 1897 la tavola del β che contiene i valori di β in funzione della X e φ e che servì fino al 1932 nella nostra artiglieria.

Questa tavola dei valori di β (la vecchia tavola VIII) venne successivamente ampliata dal col. Bruno; però se la tavola pubblicata da Siacci si dimostrò sufficientemente approssimata per i bisogni della pratica di quel tempo, in seguito alle aumentate esigenze dell'artiglieria si rese assolutamente inadatta, perchè dava per forti velocità e per i grandi settori verticali di tiro valori troppo dissimili dalla realtà, tanto che i detrattori del metodo Siacci trovarono facile la critica del metodo stesso, attaccando appunto la tav. VIII.

Per ovviare a tali manchevolezze, il Cavalli riprese lo studio del β principale e dopo non poco lavoro riuscì a dare anche il 2° termine della serie del β, la cui espressione è estremamente complicata.

Il calcolo di questo secondo termine riuscirebbe molto laborioso, senza contare che non sapendo se la serie è più o meno convergente, si rischierebbe di fare un lavoro lunghissimo senza raggiungere una precisione voluta.

Queste considerazioni spinsero appunto a calcolare il β in un altro modo, ricorrendo cioè al calcolo per archi successivi.

Infatti, quando siano dati V, φ, $\dfrac{C}{\delta\,i}$ la traiettoria si può calcolare con tutta la precisione desiderabile spezzandola in archi sufficientemente piccoli, ottenuto il valore della X, risolvendo un problema del tiro che presto impareremo a conoscere, si potrà determinare direttamente il valore di β cioè di quel parametro che fa sussistere quella determinata traiettoria.

Si è inoltre ritenuto che il β non fosse funzione della sola X e φ ma dipendesse anche dal proietto (C) e di ciò ci si rende facilmente conto quando si pensi che una stessa gittata con lo stesso φ, si può ottenere con infinite traiettorie variando soltanto la V. Quindi la nuova tavola del β è funzione di X, φ, e

$C = \frac{p}{1000\,a^2}$ (Bruno e Galanzino « Nuova Tavola del β principale » *Rivista Artiglieria e Genio.* Agosto 1932-X).

La tavola poteva essere ridotta anche in funzione di V, φ, ed X ma avrebbe assunto una maggiore estensione perchè il coefficiente balistico varia praticamente fra limiti più ristretti che non la velocità iniziale.

Oltre al β principale ($\bar{\beta}$) Siacci diede anche le formule per calcolare i β secondari cioè i β che entrano nelle espressioni trovate relative ai vari elementi del punto :

$$\beta_\omega\ \beta_T\ \beta_v\ \beta_y$$

e Cavalli calcolò una tavola del β_ω simile a quella del β di Siacci.

Poichè fra il $\bar{\beta}$ ed i β secondari esistono le relazioni:

$$\beta_\omega = \beta_T = \beta_y; \qquad \beta_v = \frac{1}{2}(\bar{\beta} + \beta_\omega)$$

per mezzo delle due tavole si potevano dedurre i β secondari.

Però anche questa seconda tabella presenta più inconvenienti per cui non è più applicabile in pratica. Potrebbe esserne calcolata una nuova servendosi di un metodo analogo a quello impiegato per il calcolo del $\bar{\beta}$.

e) Coefficiente balistico ridotto.

Ammesso che i valori di β che entrano nelle formule del tiro siano tutti uguali tra loro ed indicando, come è detto in precedenza, questo valore unico con β, se si pone

$$C' = \frac{C}{\delta\, i\, \beta} \qquad [12]$$

le formule del tiro trovate diventano:

$$\left.\begin{aligned} x &= C'\,[D(u) - D(V)] \\ y &= x\,tg\,\varphi - \frac{C'x}{2\cos^2\varphi}\left[\frac{A(u)-A(V)}{D(u)-D(V)} - J(V)\right] \\ tg\,\theta &= tg\,\varphi - \frac{C'}{2\cos^2\varphi}\,[J(u) - J(V)] \\ t &= \frac{C'}{\cos\varphi}\,[T(u) - T(V)] \\ v &= \frac{u\cos\varphi}{\cos\theta} \end{aligned}\right\} \qquad [13]$$

La quantità C' si chiama coefficiente balistico ridotto.

Dalla 2ª e 3ª delle formule trovate si può dedurre, notando che $tg\,\varepsilon = \frac{y}{x}$:

$$tg\,\varphi - tg\,\varepsilon = \frac{C'}{2\cos^2\varphi}\left[\frac{A(u)-A(V)}{D(u)-D(V)} - J(V)\right] \qquad [14]$$

$$tg\,\varphi - tg\,\theta = \frac{C'}{2\cos^2\varphi}\,[J(u) - J(V)] \text{ e sottraendo dalla} \qquad [15]$$

la [10] $tg\,\varphi - tg\,\theta - tg\,\varphi + tg\,\varepsilon = tg\,\varepsilon - tg\,\theta = \frac{C'}{2\cos^2\varphi}\left[J(u) - \frac{A(u)-A(V)}{D(u)-D(V)}\right]$ [16]

Ciò è vero, come ben s'intende, quando per le due formule si considera lo stesso valore di β.

f) TAVOLA BALISTICA GENERALE.

I valori delle funzioni *D*, *J*, *A*, *T*, ed *u* si trovano nella tav. VII e si ricavano mediante le formule delle quadrature quando siano noti i valori di *F* (*u*). La tav. VII costituisce la « Tavola Balistica Generale, è a semplice entrata e viene impiegata come una tavola di logaritmi. L'argomento di essa è la *D* però in essa si può entrare conoscendo una qualunque delle quantità *A*, *I*, *T*, *U*.

Se deriviamo le funzioni finite rispetto a *D* (*u*) si ha

$$\left.\begin{aligned} \frac{dA(u)}{dD(u)} &= \frac{-\frac{u\,du}{F(u)}J(u)}{-\frac{u\,du}{F(u)}} = J(u); & \frac{dJ(u)}{dD(u)} &= \frac{-\frac{2g\,du}{uF(u)}}{-\frac{u\,du}{F(u)}} = \frac{2g}{u^2} \\ \frac{dT(u)}{dD(u)} &= \frac{-\frac{du}{F(u)}}{-\frac{u\,du}{F(u)}} = \frac{1}{u}; & \frac{du}{dD(u)} &= \frac{du}{-\frac{u\,du}{F(u)}} = -\frac{F(u)}{u} \end{aligned}\right\} \quad [17]$$

Da ciò si vede che le prime derivate rispetto a *D* (*u*) sono sempre positive mentre quella di *u* è negativa ; se ne deduce che le funzioni *A*, *T*, *J* sono crescenti con *D* mentre la *u* decresce. Questo fatto è utile a sapersi per le interpolazioni, inoltre si rileva che le parentesi delle formule che danno la *x*, la θ e la *t* sono sempre positive, poichè *u* è sempre minore di *V*.

Vediamo ora come sono le parentesi delle formule

$$tg\,\varepsilon = tg\,\varphi - \frac{C}{2\cos^2\varphi}\left[\frac{A(u)-A(V)}{D(u)-D(V)} - J(V)\right]$$

$$tg\,\varepsilon - tg\,\theta = \frac{C'}{2\cos^2\varphi}\left[J(u) - \frac{A(u)-A(V)}{D(u)-D(V)}\right]$$

Per definizione sappiamo che

$$A(u) - A(V) = \int_{D(V)}^{D(u)} J(u)\,dD(u) = J(u_m)\,[D(u) - D(V)]$$

essendo $J(u_m)$ il valore medio che *J* (*u*) assume entro i limiti d'integrazione per cui sarà

$$J(u_m) = \frac{A(u)-A(V)}{D(u)-D(V)}$$

e poichè *J* (*u*) cresce con *D* (*u*) sarà

$$J(V) < \frac{A(u)-A(V)}{D(u)-D(V)} < J(u)$$

Dalle due formule ora scritte, si deduce ancora che essendo sempre

$$\begin{aligned} tg\,\varphi - tg\,\varepsilon &> 0 \\ tg\,\varepsilon - tg\,\theta &> 0 \end{aligned} \qquad \text{risulta } \varphi > \varepsilon > \theta$$

Nel vuoto avevamo trovato

$$tg\,\varepsilon = \frac{tg\,\varphi + tg\,\theta}{2}$$

Applicazione:

Vediamo ora come fece Siacci per calcolare la sua tavola balistica generale e calcoliamo ad es. $D(u)$. Si è visto che

$$D(u) = \int_V^u \frac{-u\,du}{F(u)}$$

Applicando la formula di Simpson che dice essere

$$\int_a^h y\,dx = \frac{h-a}{6}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

essendo

$$y_1 = \frac{y_0 + y_2}{2}, \quad y_0 = y(a), \quad y_2 = y(h)$$

e considerando un intervallo d'integrazione $2\,\Delta u$ avremo, poichè $D(u)$ cresce col diminuire di u,

$$\int_u^{u-2\Delta u} \frac{-u\,du}{F(u)} = \frac{2\,\Delta u}{6}\left\{\frac{u}{F(u)} + 4\,\frac{u-\Delta u}{F(u-\Delta u)} + \frac{u-2\,\Delta u}{F(u-2\,\Delta u)}\right\} =$$

$$= D(u-2\,\Delta u) - D(u)$$

quindi

$$D(u-2\,\Delta u) = D(u) + \frac{\Delta u}{3}\left\{\frac{u}{F(u)} + 4\,\frac{u-\Delta u}{F(u-\Delta u)} = \frac{u-2\,\Delta u}{F(u-2\,\Delta u)}\right\}$$

Consideriamo $u = 1500$ m/s $\qquad \Delta u = 12$

$$u = 1500 \qquad F(u) = 451{,}53 \qquad \log u = 3{,}17609$$

$$u - \Delta u = 1488 \qquad F(u-\Delta u) = 447{,}15 \qquad \operatorname{colog} F(u) = \bar{3}{,}34531$$

$$u - 2\,\Delta u = 1476 \qquad F(u-2\,\Delta u) = 442{,}77 \qquad \log\frac{u}{F(u)} = 0{,}52140$$

$$\log 4 = 0{,}60206$$

$$\log(u-\Delta u) = 3{,}17260$$

$$\operatorname{colog} F(u-\Delta u) = \bar{3}{,}34955$$

$$\log\frac{F(u-\Delta u)}{u-\Delta u} = 1{,}12421$$

$$\log(u-2\,\Delta u) = 3{,}16909$$

$$\operatorname{colog} F(u-2\,\Delta u) = \bar{3}{,}35382$$

$$\log\frac{u-2\,\Delta u}{F(u-2\,\Delta u)} = 0{,}52291$$

$$\frac{u}{F(u)} = 3{,}3220$$

$$4\,\frac{u-\Delta u}{F(u-\Delta u)} = 13{,}3110$$

$$\frac{u-2\,\Delta u}{F(u-2\,\Delta u} = 3{,}3336$$

$$[\cdots\cdots] = 19{,}9666$$

$$\log \Delta u = 1{,}07918$$

$$\operatorname{colog} 3 = \bar{1}{,}52288$$

$$\log[\cdots\cdots] = 1{,}30031$$

$$\log \varepsilon = 1{,}90237$$

$$\varepsilon = 79{,}87 = \sim 80$$

Siacci ha assunto come costante d'integrazione, cioè come valore $D(u)$ relativo a $u = 1500$, $D = 1000$ quindi risulta

$$D(1476) = 1080$$

In modo analogo vennero calcolati gli altri fattori contenuti nella tavola balistica generale.

g) Tavole balistiche secondarie.

La tavola balistica generale è sufficiente per la risoluzione dei problemi del tiro, ma per rendere più spedita la soluzione di alcuni di essi si pensò di calcolare tabelle che contenessero già i valori dei binomi tra parentesi o di altri simili e facilmente riducibili ad essi, che appariscono nelle formule del tiro già trovate.

Il primo che ebbe l'idea di calcolare tali tabelle fu il Braccialini il quale calcolò tabelle di fattori di tiro leggermente diverse dalla forma di quelle attuali.

Il Parodi diede ai fattori di tiro la loro veste definitiva. Il Comandante Fasella calcolò i fattori di tiro per intervalli degli argomenti assai più ravvicinati; il Cavalli aggiunse ai vecchi fattori di tiro quelli per il calcolo delle variazioni, nel calcolo della traiettoria per archi.

Nella seguente tabella sono riportate le espressioni dei fattori di tiro, date dal Parodi e dal Fasella; nelle tavole numeriche ci riferiremo sempre ai fattori di tiro del Fasella, i quali, essendo calcolati come detto, per piccoli intervalli consentono una più esatta interpolazione.

Fattori di tiro.

Parodi

$$f_0 = \frac{x}{C'}$$

$$f = \frac{A(u) - A(V)}{D(u) - D(V)} - J(V) = \frac{2 \operatorname{sen}(\varphi - \varepsilon) \cos\varphi}{C' \cos\varepsilon}$$

$$f_1 = V^2 \cdot \frac{f}{f_0} = \frac{2 V^2 \operatorname{sen}(\varphi - \varepsilon) \cos\varphi}{x \cos\varepsilon}$$

$$f_2 = \frac{1}{f} \left\{ J(u) - \frac{A(u) - A(V)}{D(u) - D(V)} \right\} = \frac{tg\,\varepsilon - tg\,\theta}{tg\,\varphi - tg\,\varepsilon} = \frac{\operatorname{sen}(\varepsilon - \theta) \cos\varphi}{\operatorname{sen}(\varphi - \varepsilon) \cos\theta}$$

$$f_3 = \frac{V}{2} \frac{f}{T(u) - T(V)} = \frac{V \operatorname{sen}(\varphi - \varepsilon)}{t \cos\varepsilon}$$

$$f_4 = \frac{V}{u} = \frac{V \cos\varphi}{v \cos\theta}$$

$$f_5 = \frac{x_0}{X}$$

$$f_6 = \frac{Y}{X\, tg\,\varphi}$$

$$f_7 = T(u) - T(v) = \frac{t \cos\varphi}{C'}$$

$$f_8 = J(u) - J(V) = \frac{2 \cos^2\varphi}{C'} (tg\,\varphi - tg\,\theta)$$

Fasella

$$f_0 = \frac{x}{C'}$$

$$u = \frac{v \cos\theta}{\cos\varphi}$$

$$f = \frac{A(u) - A(V)}{D(u) - D(V)} - J(V) = \frac{2 \operatorname{sen}(\varphi - \varepsilon) \cos\varphi}{C' \cos\varepsilon}$$

$$f_1 = \frac{f}{f_0} = \frac{2 \operatorname{sen}(\varphi - \varepsilon) \cos\varphi}{x \cos\varepsilon}$$

$$f_2 = \frac{1}{f} \left\{ J(u) - \frac{A(u) - A(V)}{D(u) - D(V)} \right\} = \frac{tg\,\varepsilon - tg\,\theta}{tg\,\varphi - tg\,\varepsilon} = \frac{\operatorname{sen}(\varepsilon - \theta) \cos\varphi}{\operatorname{sen}(\varphi - \varepsilon) \cos\theta}$$

$$f_3 = T(u) - T(V) = \frac{t \cos\varphi}{C'}$$

$$f_4 = J(u) - J(V) = f(1 + f_2) = \frac{2 \cos^2\varphi}{C'} (tg\,\varphi - tg\,\theta)$$

$$f_5 = \frac{x_0}{X}$$

$$f_6 = \frac{Y}{X\, tg\,\varphi}$$

$$f_V = \frac{1}{f_0 f_2 K(V)} \left(1 + f_2 - \frac{2g}{f_1}\right)$$

Dall'esame di tali espressioni si rileva che le differenze sono:

a) sul fattore f_1, che per il Parodi contiene il fattore V^2 allo scopo di evitare i numerosi zeri dopo la virgola e prima delle cifre significative, che si trovano nel valore f_1 del Fasella;

b) il fattore f_3 del Fasella è eguale al fattore f_t del Parodi;

c) il fattore f_4 del Fasella corrisponde al f_θ del Parodi;

d) il fattore f_3 del Parodi non ha riscontro nel Fasella.

Per il calcolo della velocità residue, il Fasella dà la tabella dei valori della pseudovelocità $u = \frac{v \cos\theta}{\cos\varphi}$.

Come appare dalle formule, questi fattori sono tutti funzioni di V e di $\frac{x}{C'}$ perchè $D(u) = D(V) + \frac{x}{C'}$ e quindi anche A, J, T sono funzioni di V e di $\frac{x}{C'}$; ed avendo posto $f_0 = \frac{x}{C'}$, le tabelle dei fattori di tiro sono tabelle a doppia entrata in funzione di V e di f_0.

I valori di f, f_1, f_2, f_3, f_4, del Fasella si ottengono introducendo nelle formule del tiro i valori relativi espressi con le funzioni balistiche e precisamente:
dalla relazione

$$tg\,\varepsilon = tg\,\varphi - \frac{C'}{2\cos^2\varphi}\left[\frac{A(u) - A(V)}{D(u) - D(V)} - J(V)\right]$$

si ricava

$$tg\,\varepsilon = tg\,\varphi - \frac{C'}{2\cos^2\varphi}\cdot f$$

da cui

$$f = \frac{2\cos^2\varphi}{C'}(tg\,\varphi - tg\,\varepsilon) = \frac{2\cos^2\varphi}{C'}\,\frac{\operatorname{sen}(\varphi - \varepsilon)}{\cos\varphi\cos\varepsilon}$$

cioè

$$f = \frac{2\operatorname{sen}(\varphi - \varepsilon)\cos\varphi}{C'\cos\varepsilon}$$

Dalla relazione

$$tg\,\varepsilon - tg\,\theta = \frac{C'}{2\cos^2\varphi}\left[J(u) - \frac{A(u) - A(V)}{D(u) - D(V)}\right]$$

dividendo per

$$tg\,\varepsilon - tg\,\theta = \frac{C'}{2\cos^2\varphi}\cdot f$$

si ha

$$\frac{tg\,\varepsilon - tg\,\theta}{tg\,\varphi - tg\,\varepsilon} = \frac{1}{f}\left[J(u) - \frac{A(u) - A(V)}{D(u) - D(V)}\right] = f_2$$

Ma

$$\frac{tg\,\varepsilon - tg\,\theta}{tg\,\varphi - tg\,\varepsilon} = \frac{\operatorname{sen}(\varepsilon - \theta)\cos\varphi\cos\varepsilon}{\cos\varepsilon\cos\theta\operatorname{sen}(\varphi - \varepsilon)} = \frac{\operatorname{sen}(\varepsilon - \theta)\cos\varphi}{\operatorname{sen}(\varphi - \varepsilon)\cos\theta}$$

quindi

$$f_2 = \frac{\operatorname{sen}(\varepsilon - \theta)\cos\varphi}{\operatorname{sen}(\varphi - \varepsilon)\cos\theta}$$

Dalla relazione

$$t = \frac{C'}{\cos\varphi}\left[T(u) - T(V)\right]$$

si ricava

$$t = \frac{C'}{\cos\varphi} \cdot f_3 \qquad \text{cioè} \qquad f_3 = \frac{t\cos\varphi}{C'}$$

Dalla relazione

$$tg\,\theta = tg\,\varphi - \frac{C'}{2\cos^2\varphi}\left[J(u) - J(V)\right]$$

si ricava

$$tg\,\theta = tg\,\varphi - \frac{C'}{2\cos\varphi} f_4$$

di cui:

$$f_4 = \frac{2\cos^2\varphi}{C'}\left[tg\,\varphi - tg\,\theta\right] =$$

$$= \frac{2\cos^2\varphi}{C'} \cdot \frac{\text{sen}\,(\varphi - \theta)}{\cos\varphi\cos\theta} = \frac{2\,\text{sen}\,(\varphi - \theta)\cos\varphi}{C'\cos\theta}$$

Nel vuoto, i fattori f_0, f, f_3, non hanno alcun significato.
Per f_1, notando che nel vuoto

$$x = \frac{2\,V^2\,\text{sen}\,(\varphi - \varepsilon)\cos\varphi}{g\cos\varepsilon}$$

risulta

$$f_1 = \frac{g}{2}$$

Per f_2, poichè nel vuoto si ha:

$$tg\,\theta = 2\,tg\,\varepsilon - tg\,\varphi$$

risulta:

$$f_2 = \frac{tg\,\varepsilon - 2\,tg\,\varepsilon + tg\,\varphi}{tg\,\varphi - tg\,\varepsilon} = \frac{tg\,\varphi - tg\,\varepsilon}{tg\,\varphi - tg\,\varepsilon} = 1$$

CAPITOLO VII

PROBLEMI DEL TIRO

1 - Formule relative al punto di caduta e problemi principali.

Se nelle formule trovate nel capitolo precedente si pone $x = X, y = 0,$ $-\theta = \omega, t = T$ si deducono le formule relative al punto di caduta e cioè:

$$\begin{cases} X = C'\left[D(u) - D(V)\right] \\ \text{sen } 2\varphi = C'\left[\dfrac{A(u) - A(V)}{D(u) - D(V)} - J\,T(V)\right] \\ tg\,\omega = \dfrac{C'}{2\cos^2\varphi}\left[J(u) - \dfrac{A(u) - A(V)}{D(u) - D(V)}\right] \\ T = \dfrac{C'}{\cos\varphi}\left[T(u) - T(V)\right] \\ U = \dfrac{u\cos\varphi}{\cos\omega} \text{ ove } u \text{ è la pseudo velocità per il punto di caduta.} \end{cases}$$

Analogamente i fattori di tiro, del Fasella, facendo $\varepsilon = 0$, diventano:

$$f_0 = \frac{X}{C'}\,; \qquad f = \frac{\text{sen } 2\varphi}{C'}; \qquad f_1 = \frac{\text{sen } 2\varphi}{X}\,; \qquad f_2 = \frac{tg\,\omega}{tg\,\varphi}$$

$$f_3 = \frac{T\cos\varphi}{C'}\,; \qquad f_4 = \frac{2\cos^2\varphi}{C'}\left(tg\,\varphi + tg\,\omega\right)$$

Le formule

$$\begin{cases} X = C'\left[D(u) - D(V)\right] \\ \text{sen } 2\varphi = C'\left|\dfrac{A(u) - A(V)}{D(u) - D(V)} - J(V)\right| \end{cases}$$

permettono di risolvere i problemi principali del tiro, e cioè date 3 delle quantità φ, X, V, C', determinare la quarta.

Allo stesso scopo servono pure le formule:

$$f_0 = \frac{X}{C'} \qquad f = \frac{\text{sen } 2\varphi}{C'} \qquad f_1 = \frac{\text{sen } 2\varphi}{X}$$

Poichè non è possibile mettere in ognuna delle 4 formule del tiro il corrispondente valore di β e nella considerazione che le quantità che maggiormente interessano nel tiro sono la X e la φ, Siacci suggerì d'impiegare sempre lo stesso valore di β, cioè il $\bar{\beta}$, col quale si propose di risolvere i 4 problemi principali del tiro, sacrificando per gli elementi secondari un po' di esattezza alla rapidità.

Ancora, i 4 problemi possono essere risolti con l'impiego dei fattori di tiro o della tavola balistica generale. Il primo metodo è più rapido ma meno preciso e ciò dipende dal fatto che mentre con la tavola balistica generale gli inter-

valli della $D(u)$ sono di 10 unità e la tavola è a semplice entrata, nei fattori di tiro gli intervalli della f_0 sono di 100 unità e la tavola è a doppia entrata, per cui è richiesta la doppia interpolazione; appunto per questo i due metodi, che teoricamente dovrebbero dare la stessa approssimazione, in pratica risultano diversi.

Per quanto detto, risolveremo i problemi principali in prima approssimazione con i fattori di tiro, indi con la tavola balistica generale.

a) *Problema 1°*. — Data la velocità iniziale V, la gittata X, il coefficiente balistico C, la densità δ, il coefficiente di forma i, determinare l'angolo di proiezione φ.

Occorre anzitutto completare il valore di

$$C' = \frac{C}{\delta i \bar{\beta}}$$

e per fare ciò si ricava dalla Tav. VIII, in funzione di C, X dati e di una φ presunta, il valore di $\bar{\beta}$.

Quando non si ha alcuna idea circa il valore da dare a $\bar{\beta}$ si assume $\bar{\beta} = 1$ e si risolve il problema ottenendo un primo valore di φ, che servirà per ricercare $\bar{\beta}$ e proseguire il calcolo per la soluzione definitiva.

Completato il C', si risolve il problema con i fattori di tiro e cioè si calcola $f_0 = \frac{X}{C'}$; indi, in funzione di f_0 e V, si calcola f_1 e dalla relazione

$$f_1 = \frac{\operatorname{sen} 2\varphi}{X}$$

si calcola φ.

Se questo valore di φ risulta diverso da quello assunto per la determinazione di $\bar{\beta}$, si ripete il calcolo, altrimenti si può proseguirlo con la tavola balistica generale. In tal caso si calcola $\frac{X}{C'}$ indi con V si ricava $D(V)$ e $D(u) = D(V) + \frac{X}{C'}$ in corrispondenza di $D(u)$ si ricavano $J(u)$ ed $A(u)$, e si calcolerà

$$\operatorname{sen} 2\varphi \doteq C' \left| \frac{A(u) - A(V)}{D(u) - D(V)} - J(V) \right|$$

Se nella prima ricerca di φ si trova $\operatorname{sen} 2\varphi > 1$, prima di abbandonare il problema si ricomincerà il calcolo prendendo il $\bar{\beta}$ che corrisponde a $\varphi = 45°$ ed a C ed X dati, se questo è minore del valore assunto in precedenza

Applicazione: Cannone da 152/50; Tiro a palla.

Dati $X = 20.000$, $C = 2{,}31$, $i = 0{,}660$, $\delta_0 = 1$. $V = 850$: determinare φ.

Calcolo di C'. Si assume in prima approssimazione $\varphi = 30°$ e si cerca il valore di $\bar{\beta}$.

Per $X = 20.000$ $\quad C = 2{,}31$ $\quad \varphi = 30°$ $\quad \bar{\beta} = 0{,}744$

$lg\, C$	$= 0{,}36361$	$lg\, X$	$= 4{,}30103$
colg δi	$= 0{,}18046$	colg C'	$= \bar{1}{,}32750$
colg β	$= 0{,}12843$	$lg\, f_0$	$= 3{,}62853$
log C'	$= 0{,}67250$	f_0	$= 4251$

Dalla tav. X si ricava $f_1 = \frac{\text{sen } 2\varphi}{X}$

$$lg\, f_1 = \bar{5},61899$$
$$lg\, X = 4,30103$$

lg sen $2\varphi = \bar{1},92002$ $\qquad 2\varphi = 56^\circ\, 18'$ $\qquad \varphi = 28^\circ\, 9'$

Assumiamo questo valore e proseguiamo il calcolo con la tavola balistica generale:

per $V = 850$

$lg \frac{C}{\delta i} = 0,54407$ $\qquad D(V) = 3317,6$ $\qquad A(V) = 365,884$

colg $\bar{\beta} = 0,12784$ $\qquad \frac{X}{C'} = 4257,2$ $\qquad A(u) = 1700,868$

$lg\, C' = 0,67191$ $\qquad D(u) = 7574,8$ $\qquad A(u) - A(V) = 1334,984$

$lg\, X = 4,30103$ $\qquad J(V) = 0,13624$

$lg \frac{X}{C'} = 3,62912$

$$\text{sen } 2\varphi = C' \left[\frac{A(u) - A(V)}{D(u) - D(V)} - J(V)\right]$$

$lg\,[A(u) - A(V)] = 3,12547$

colg $[D(u) - D(V)] = \bar{4},37088$

$lg \left[\frac{A(u) - A(V)}{D(u) - D(V)}\right] = \bar{1},49635$

$\left[\frac{A(u) - A(V)}{D(u) - D(V)}\right] = 0,31358$

$J(V) = 0,13624$

$\left[\frac{A(u) - A(V)}{D(u) - D(V)} - J(V)\right] = 0,17734$

$lg\, C' = 0,67191$

$lg\, f = \bar{1},24881$

lg sen $2\varphi = \bar{1},92072$

$2\varphi = 56^\circ\, 26'$

$\varphi = 28^\circ\, 13'$

b) *Problema* 2°. - Data la velocità iniziale V, l'angolo di proiezione φ, il coefficiente balistico C, δ e i, determinare la gittata X.

Il problema può esser risolto coi fattori di tiro o con la tavola balistica generale. Nell'un caso e nell'altro occorre completare il valore di C' e ciò si fa cercando il valore di $\bar{\beta}$ nella tav. VIII in funzione di φ e C dati e di una X presumibile, oppure ponendo in prima approssimazione $\bar{\beta} = 1$.

Ciò fatto coi fattori si calcola

$$f = \frac{\text{sen } 2\varphi}{C'}$$

e dalle tavole balistiche secondarie con f e V si ricava f_0 indi

$$X = f_0\, C'$$

Avuto X, se occorre si ripete il calcolo con un $\bar{\beta}$ più approssimato.

Con la tavola balistica generale, una volta completato il valore di C', si prosegue il calcolo per approssimazioni successive mediante le prime due formule del tiro che si possono scrivere

$$\begin{cases} D(u) = D(V) + \frac{X}{C'} \\ A(u) - A(V) - [D(u) - D(V)]\left[J(V) + \frac{\text{sen } 2\varphi}{C'}\right] = 0 \end{cases}$$

Nella seconda equazione figura come incognita la u, che appare in forma trascendente nella funzione $A\ (u)$ e $D\ (u)$; ma $A\ (u)$ è noto quando sia noto $D\ (u)$, quindi considereremo come sola variabile la $D\ (u)$ e risolveremo la seconda equazione impiegando il metodo delle approssimazioni successive o di Newton.

Indicheremo con z il primo membro della seconda equazione ed esaminiamo quali sono le caratteristiche della curva rappresentante le variazioni di z col variare di $D\ (u)$. Per ciò facciamo la 1ª e la 2ª derivata rispetto a $D\ (u)$, si avrà

$$z' = \frac{d\,A\,(u)}{d\,D\,(u)} - J\,(V) - \frac{\operatorname{sen} 2\,\varphi}{C'} \qquad\qquad z'' = \frac{2\,g}{u^2}$$

La z'' è sempre positiva quindi la curva $z = z\,[D\,(u)]$ volge la concavità verso l'alto cioè verso le z positive; inoltre $z = O$ per $D\ (u) = D\ (V)$ e questo valore particolare di $D\ (u) = D\ (V)$ indicherà un primo punto d'incontro della curva con l'asse delle $D\ (u)$, ($z = O$). Il secondo punto, che soddisfa alla equazione data, sarà quello che risolve il nostro problema.

Se indichiamo questo punto con M, la curva $z = z\,[D\,(u)]$ avrà la forma indicata (fig. 66).

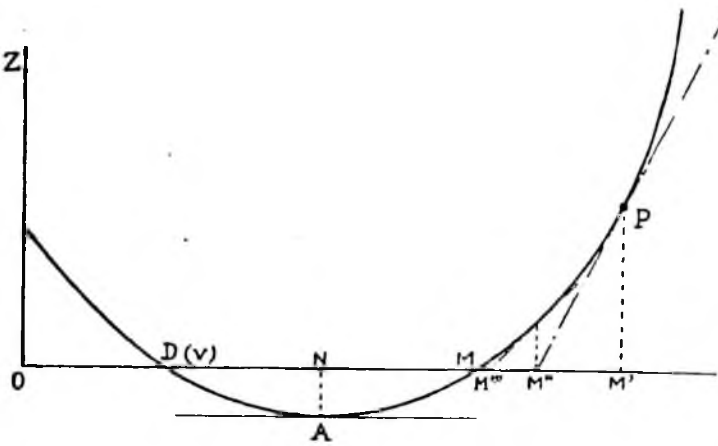


Fig. 66.

Per determinare il valore corrispondente ad M, procediamo per tentativi.

Supponiamo che $OM' = D\ (u_1)$ sia un valore arbitrario di $D\ (u)$ che assumeremo in prima approssimazione e che in mancanza d'altro trarremo dalla soluzione coi fattori di tiro.

Conducendo da M' l'ordinata, questa incontrerà il diagramma in P. Da P conduciamo la tangente alla curva, essa incontretà in M'' l'asse delle $D\ (u)$ e quindi M'' sarà più prossimo ad M di M'. Ora

$$OM'' = OM' - M'M''$$

ma

$$M'M'' = \frac{PM'}{tg\,PM''M'} = \frac{z}{z'}$$

quindi

$$OM'' = D\,(u_1) - \frac{z}{z'}$$

Ricavato il valore relativo ad M'', si può ripetere il calcolo e determinare un altro punto più prossimo alla soluzione vera e così di seguito. In generale basta un tentativo.

Nello scegliere il primo valore di $D\ (u)$, occorre avere una avvertenza e cioè tale valore deve essere maggiore di quello corrispondente al punto di minimo cioè maggiore di ON, essendo ON l'ascissa del punto più basso del diagramma.

In caso contrario, mediante il metodo di Newton, invece di avvicinarsi alla soluzione esatta ci si allontanerebbe, come facilmente risulta dalla figura.

Per assicurarsi che effettivamente è stato scelto un valore conveniente, basta osservare il valore di z': se questo è positivo, vorrà dire che la funzione è crescente cioè che si è dopo il minimo e quindi il valore scelto va bene, mentre se $z' < O$ vorrà dire che si è prima del minimo. Quindi, nell'eseguire il calcolo converrà, dopo aver determinato il valore di z', proseguirlo solo nel caso in cui questo sia positivo.

Ricapitolando: se $D\,(u_1)$ è un valore approssimato dell'incognita (data generalmente dalla soluzione con i fattori di tiro), un valore più approssimato sarà

$$D\,(u) = D\,(u_1) + \Delta\, D\,(u_1) \text{ essendo}$$

$$\Delta\, D\,(u_1) = -\frac{z}{z'} = -\frac{A\,(u_1) - A\,(V) - [D\,(u_1) - D\,(V)]\left[J\,(V) + \frac{\operatorname{sen} 2\,\varphi}{C'}\right]}{J\,(u_1) - J\,(V) - \frac{\operatorname{sen} 2\,\varphi}{C'}}$$

in cui $J\,(u_1)$ ed $A\,(u_1)$, vengono dedotti dalla Tavola balistica generale, in corrispondenza di

$$D\,(u_1) = D\,(V) + \left(\frac{X}{C'}\right)_1$$

essendo, come si è detto $\left(\frac{X}{C'}\right)_1$ un valore approssimato ed arbitrario di $\frac{X}{C'}$ incognita.

Per comodità di calcolo converrà alterare questo valore di $\left(\frac{X}{C'}\right)_1$ in modo che il $D\,(u_1)$ risultante sia un multiplo di 10 e ciò allo scopo di evitare possibili errori di interpolazione.

Applicazione. Obice da 305/17; Granata monoblocco. Dati: $V = 546$; $\varphi = 40^\circ$; $C = 3{,}19$; $i = 0{,}540$; $\delta = 0{,}927$. Determinare X.

In corrispondenza di $\varphi = 40^\circ$; $C = 3{,}19$; $X = 15000$, gittata presunta, si ha:

$$\bar{\beta} = 0{,}844$$

Calcolo di C' e di f:

$\lg C = 0{,}50379$
$\operatorname{colg} \delta = 0{,}03292$
$\operatorname{colg} i = 0{,}26761$
$\operatorname{colg} \beta = 0{,}07366$

$\lg C' = 0{,}87798$

f_0 \ V	550	546	540
2200	0,1227	0,1243	0,1267
2270		0,13040	
2300	0,1313	0,1330	0,1355

$\lg \operatorname{sen} 2\varphi = \bar{1},99335$
$\operatorname{colg} C' = \bar{1},12202$

$\lg f = \bar{1},11537$
$f = 0{,}1304$

$f_0 = 2270$

$\lg f_0 = 3{,}35603$
$\lg C' = 0{,}87798$
$\lg X = 4{,}23401$

$X = 17140$

A questo valore di X corrisponde $\bar{\beta} = 0{,}823$

$\lg \frac{C}{\delta_1} = 0{,}80432$
$\operatorname{colg} \beta = 0{,}08460$
$\lg C' = 0{,}88892$

f_0 \ V	546
2200	0,1243
2233	0,1272
2300	0,1330

$\lg \operatorname{sen} 2\varphi = \bar{1}{,}99335$
$\operatorname{colg} C' = \bar{1}{,}11108$
$\lg f = \bar{1}{,}10443$
$f = 0{,}1272$
$\lg f_0 = 3{,}34889$
$\lg C' = 0{,}88892$
$\lg X = 4{,}23781$
$X = 17291$

Possiamo ritenere questo valore come definitivo e procedere nel calcolo con la tavola balistica generale.

In questo caso

$$\frac{X}{C'} = 2233 \text{ per } V = 546$$

$$D(V) = 4675{,}3$$

$$A(V) = 584{,}775$$

$$J(V) = 0{,}19482$$

Per comodità di calcolo dato che $\frac{X}{C'}$ è approssimato, assumo per esso il valore 2234,7

$$A(u) = 1304{,}60$$

$$J(u) = 0{,}51406$$

$$D(u) = 6910{,}0$$

$$A(u) - A(V) = 719{,}84$$

Calcolo del denominatore della espressione di $\Delta D(u_1) = -\frac{z}{z'}$

$$J(u) - \left[J(V) + \frac{\operatorname{sen} 2\varphi}{C'}\right]$$

$$\lg \frac{\operatorname{sen} 2\varphi}{C'} = \bar{1}{,}10443$$

$$\frac{\operatorname{sen} 2\varphi}{C'} = 0{,}12718$$

$$J(V) = 0{,}19482$$

$$J(V) + \frac{\operatorname{sen} 2\varphi}{C'} = 0{,}32200$$

$$J(u) = 0{,}51406$$

$$D^{re} = 0{,}19206 > 0$$

Possiamo quindi proseguire nel calcolo del numeratore

$$A(u) - A(V) - [D(u) - D(V)]\left[J(v) + \frac{\operatorname{sen} 2\varphi}{C'}\right] = 0$$

$$\lg\left[J(V) + \frac{\operatorname{sen} 2\varphi}{C'}\right] = \bar{1},50786$$

$$\lg[D(u) - D(V)] = 3,34922$$

$$\lg[D(u) - D(V)]\left[J(V) + \frac{\operatorname{sen} 2\varphi}{C'}\right] = 2,85708$$

$$[D(u) - D(V)]\left[J(V) + \frac{\operatorname{sen} 2\varphi}{C'}\right] = 719,58$$

$$A(u) - A(V) = 719,84$$

$$N^{re} = 0,26$$

$\lg N^{re} = \bar{1},41497$	$-\Delta D(u_1) = 0,17$	$\lg \frac{X}{C'} = 3,34919$
$\operatorname{colg} D^{re} = \bar{1},80794$	$\frac{X}{C'} = 2234,70$	$\lg C' = 0,88892$
$\lg[\Delta D(u_1)] = \bar{1},22291$	$\left(\frac{X}{C'}\right)_{\text{definitivo}} = 2234,53$	$\lg X = 4,23811$
$-\Delta D(u_1) = 0,17$		

$$X = 17302$$

c) *Problema* 3°. — Data la gittata X, φ, C, δ_0, i determinare V.

In questo caso il $\bar{\beta}$ è subito determinato, perchè sono dati X, φ, C; si può quindi completare il C'.

Con i fattori di tiro, il problema si risolve calcolando

$$f_0 = \frac{X}{C'} \quad \text{ed} \quad f = \frac{\operatorname{sen} 2\varphi}{C'}$$

e quindi ricavando dalle tavole del fattore f il valore della V.

Per risolvere il problema con la tavola balistica generale si ricorre alle due prime formule del tiro:

$$D(u) - D(V) = \frac{X}{C'}$$

$$z = A(u) - A(V) - [D(u) - D(V)]\left[J(V) + \frac{\operatorname{sen} 2\varphi}{C'}\right] =$$

$$= A(u) - A(V) - \frac{X}{C'}\left[J(V) + \frac{\operatorname{sen} 2\varphi}{C'}\right] = 0$$

In esse l'incognita è la V e quindi le funzioni $D(V)$, $A(V)$, $J(V)$; ma poichè, quando è nota $D(V)$, tutte le altre funzioni sono certe perchè è pure noto $\frac{X}{C'}$, noi considereremo come unica incognita la $D(V)$.

Risolveremo anche questo problema per approssimazioni successive col metodo di Newton, attribuendo cioè un valore arbitrario a $D(V)$ (quello incerto coi fattori di tiro), indi calcoleremo l'incremento

$$\Delta D(V) = -\frac{z}{z'}$$

Vediamo ora come varia la funzione z al variare di $D\ (V)$.

La prima derivata di z è:

$$z' = \frac{d\,A\,(u)}{d\,D\,(u)}\;\frac{d\,D\,(u)}{d\,D\,(V)} - \frac{d\,A\,(V)}{d\,D\,(V)} - \frac{X}{C'}\;\frac{d\,J\,(V)}{d\,D\,(V)}$$

ma si ha:

$$d\,D\,(u) = d\,D\,(V); \qquad \text{quindi:} \qquad z' = J\,(u) - J\,(V) - \frac{X}{C'}\;\frac{2\,g}{V^2}$$

Analogamente a quanto si è osservato per il problema 2°, se $D\ (V)$ è un valore arbitrario, possibilmente approssimato, un valore più approssimato sarà dato da

$$D\,(V) = D\,(V_1) + \Delta\,D\,(V_1)$$

essendo

$$\Delta\,D\,(V_1) = - \frac{A\,(u_1) - A\,(V_1) - \frac{X}{C'}\left[\,J\,(V_1) + \frac{\operatorname{sen} 2\,\varphi}{C'}\,\right]}{J\,(u_1) - J\,(V_1) - \frac{2\,g}{V_1^2}\;\frac{X}{C'}}$$

in cui $A\ (V_1)$, $J\ (V_1)$ e V_1 corrispondono a $D\ (V_1)$ ed il valore di $D\ (u_1)$ è

$$D\,(u_1) = D\,(V_1) + \frac{X}{C'}$$

In questo caso, poichè $\frac{X}{C'}$ è dato, potremo alterare per comodità di calcolo il valore di $D\,(V_1)$ che è arbitrario; fare in modo cioè che $D\,(u_1)$ risulti multiplo di 10.

La seconda derivata di z vale:

$$z'' = \frac{2\,g}{u^2} - \frac{2\,g}{V^2} + \frac{X}{C'}\;\frac{2\,g\,2\,V}{V^4}\;\frac{d\,V}{d\,D\,(V)} = \frac{2\,g}{u^2} - \frac{2\,g}{V^2} + \frac{X}{C'}\;\frac{4\,g}{V^3}\;\frac{d\,V}{d\,D\,(V)}$$

ma

$$= \frac{d\,V}{d\,D\,(V)} = \frac{d\,V}{-\frac{V\,d\,V}{F\,(V)}} = - \frac{F\,(V)}{V}$$

quindi

$$z'' = \frac{2\,g}{u^2} - \frac{2\,g}{V^2} - \frac{X}{C'}\;\frac{4\,g\,F\,(V)}{V^4} = \frac{2\,g}{u^2} - \frac{2\,g}{V^2} - \frac{X}{C'}\;\frac{4\,g\,K\,(V)}{V^3}$$

e non si può prevedere se mantiene un segno costante e quale.

Però la prima derivata si mantiene sempre positiva perchè:

$$J\,(u) - J\,(V) = - \int_V^u \frac{-2\,g\,du}{u\,F\,(u)} = \int_V^u \frac{-2\,g}{u^2}\;\frac{u\,du}{F\,(u)} = \frac{2\,g}{m^2}\,[\,D\,(u) - D\,(V)\,]$$

essendo m^2 un valore medio di u^2, entro i limiti d'integrazione, per cui sarà certamente $u < m < V$.

Allora la z' può scriversi

$$z' = J\,(u) - J\,(V) - \frac{2\,g}{V^2}\;\frac{X}{C'} = \frac{2\,g}{m^2}\,[\,D\,(u) - D\,(V)\,] - \frac{2\,g}{V^2}\,[\,D\,(u) - D\,(V)\,]$$

$$= 2\,g\,\frac{X}{C'}\left[\,\frac{1}{m^2} - \frac{1}{V^2}\,\right] > 0 \qquad \text{perchè } \frac{1}{m^2} > \frac{1}{V^2} \text{ essendo } m^2 < V^2$$

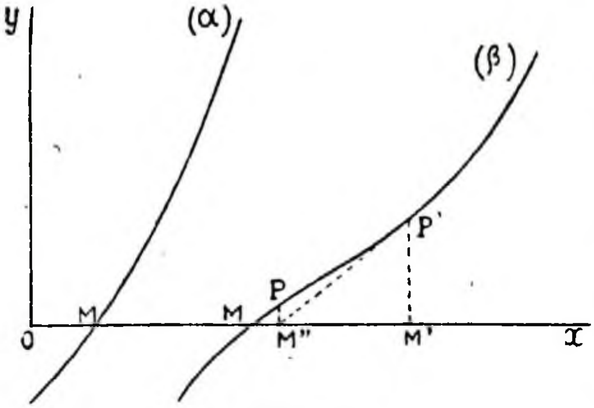


FIG. 67.

Quindi, se $z' > 0$, z cresce continuamente col crescere di $D(V)$ ed il diagramma che rappresenta la variazione di z con la $D(V)$ incontra una volta sola l'asse delle $D(V)$, ed il punto fornisce la soluzione del problema.

La curva avrà l'andamento (α) o (β) a seconda che z'' mantiene il suo segno oppure cambia di segno.

In ogni modo la curva è sempre assai tesa e basta un solo tentativo per trovare una soluzione esatta.

In questo caso, non si corre il pericolo di allontanarci dalla soluzione voluta, dato l'andamento della curva; quindi non ha influenza il valore arbitrario scelto per il calcolo.

Applicazione:

Cannone da 75/27; Granata; Dati: $X = 7526$; $\varphi = 30°$; $C = 1.144$; $i = 0{,}960$; $\delta_0 = 0{,}927$ determinare V.

Dalla Tav. VIII, in funzione di X φ C si determina

$$\bar{\beta} = 0{,}934$$

Risolviamo il problema con i fattori di tiro

$\lg C = 0{,}05854$	$\lg X = 3{,}87656$	$\lg \operatorname{sen} 2\varphi = \bar{1}{,}93753$
$\operatorname{colg} \delta = 0{,}03292$	$\operatorname{colg} C' = \bar{1}{,}86116$	$\operatorname{colg} C' = \bar{1}{,}86116$
$\operatorname{colg} i = 0{,}01773$	$\lg f_0 = 3{,}73772$	$\lg f = \bar{1}{,}79869$
$\operatorname{colg} \beta = 0{,}02965$	$f_0 = 5467$	$f = 0{,}6291$
$\lg C' = 0{,}13884$		

f_0 \ V	480	474	470
5400	0,6076		0,6209
5467	0,6205	0,6291	0,6340
5500	0,6268		0,6404

$$V = 474$$

Risolviamo ora il problema con la tavola balistica generale.

Si è trovato coi fattori di tiro che $V = 474$; alteriamo questo valore che è approssimato e poniamo $V = 474{,}2$. In corrispondenza di esso si ha:

$$D(V_1) = 5080 \qquad J(V_1) = 0{,}22558 \qquad A(V_1) = 669{,}56$$

Inoltre è $\frac{X}{C'} = 5467$

$D(u_1) = 10547$ cui corrispondono $A(u_1) = 5337{,}56$; $J(u_1) = 1{,}91420$

$$A(u_1) - A(V_1) = 4668{,}00$$

Calcolo di $\Delta D(V_1) = -\frac{z}{z'} = -\frac{A(u_1) - A(V_1) - \frac{X}{C'}\left[J(V_1) + \frac{\text{sen}\,2\varphi}{C'}\right]}{J(u_1) - J(V_1) - \frac{2g}{V_1^2}\,\frac{X}{C'}}$

$J(V_1)$	$= 0{,}22558$
$\frac{\text{sen}\,2\varphi}{C'}$	$= 0{,}62906$
$J(V_1) + \frac{\text{sen}\,2\varphi}{C'}$	$= 0{,}85464$
lg [......]	$= \bar{1}{,}93178$
lg $\frac{X}{C'}$	$= 3{,}73772$
lg $\frac{X}{C'}$ [......]	$= 3{,}66950$
lg N^{re}	$= 0{,}60206$
colg D^{re}	$= \bar{1}{,}91654$
lg $\Delta D(V_1)$	$= 0{,}51860$

lg 2	$= 0{,}30103$
lg g	$= 0{,}99145$
colg V_1^2	$= \bar{6}{,}64808$
lg $\frac{X}{C'}$	$= 3{,}73772$
lg $\frac{2g}{V^2}\,\frac{X}{C'}$	$= \bar{1}{,}67828$

$\frac{X}{C'}\left[J(V_1) + \frac{\text{sen}\,2\varphi}{C'}\right] = 4672{,}0$

$A(u_1) - A(V_1) = 4668$

N^{re}	$= -\ 4{,}0$
$J(u_1)$	$= 1{,}91420$
$J(V_1)$	$= 0{,}22558$
$J(u_1) - J(V_1)$	$= 1{,}68862$
$\frac{2g}{V^2}\,\frac{X}{C'}$	$= 0{,}47674$
D^{re}	$= 1{,}21188$
$\Delta D(V_1)$	$= 3{,}30$
$D(V_1)$	$= 5080$
$D(V)$	$= 5083{,}30$

$V = 473{,}6$

d) *Problema* 4°. — Dati X, φ, V determinare C'.

Anche in questo caso, il problema può essere risolto prima con le tavole balistiche secondarie, indi con la tavola balistica principale.

Con i fattori di tiro si calcola:

$$f_1 = \frac{\text{sen}\,2\varphi}{X}$$

quindi noti f_1 e V si ricava dalla tavola del fattore f_1 il valore di $f_0 = \frac{X}{C'}$, noto il quale si ha

$$C' = \frac{X}{f_0}$$

Questo è il problema che viene risolto nella costruzione delle tavole di tiro per determinare il valore di C' e quindi di $i\,\beta$, dai risultati sperimentali. Quando si voglia una approssimazione maggiore, si ricorre alla tavola balistica principale.

In questo caso, facendo $D(u) - D(V) = \frac{X}{C'} = f_0$ si avrà

$$D(u) = D(V) + f_0$$

$$z = A(u) - A(V) - f_0\left[J(V) + \frac{\text{sen}\,2\varphi}{C'}\right] = A(u) - A(V) - f_0\left[J(V) + f_0\,\frac{\text{sen}\,2\varphi}{X}\right]$$

nella quale la sola incognita è f_0.

Anche in questo caso si ricorrerà al metodo delle tangenti; indicando con f_{01} un valore approssimato della incognita, un valore più approssimato sarà

$$f_0 = f_{01} + \Delta f_{01}$$

ove

$$\Delta f_{01} = -\frac{z}{z'}$$

Poichè $d\,D(u_1) = d\,f_{01}$ il valore di z' è:

$$z' = J(u_1) - J(V) - 2\,f_{01}\frac{\text{sen}\,2\,\varphi}{X}$$

quindi

$$\Delta\,f_{01} = -\frac{A(u_1) - A(V) - f_{01}\left[J(V) + f_{01}\,\dfrac{\text{sen}\,2\,\varphi}{X}\right]}{J(u_1) - J(V) - 2\,f_{01}\,\dfrac{\text{sen}\,2\,\varphi}{X}}$$

in cui $A(u_1)$ ed $J(u_1)$ corrispondono a $D(u_1) = D(V) + f_{01}$.

Il valore f_{01} essendo approssimato, si può alterare in modo che $D(u_1)$ sia un multiplo di 10.

Vediamo ora quale andamento ha la curva $z = z(f_0)$ (fig. 68)

La espressione della derivata seconda è

$$z'' = \frac{2\,g}{u^2} - \frac{2\,\text{sen}\,2\,\varphi}{X}$$

Osservando che per

$$f_0 = 0 \qquad \text{è} \qquad z = 0 \qquad z' = 0$$

si ha

$$z''_{f_0 = 0} = \frac{2\,g}{V^2} - \frac{2\,\text{sen}\,2\,\varphi}{X} = \frac{2\,g}{V^2 X}\left(X - \frac{V^2\,\text{sen}\,2\,\varphi}{g}\right)$$

e poichè $\frac{V^2\,\text{sen}\,2\,\varphi}{g} > X$ perchè è la gittata nel vuoto che si ottiene con la stessa velocità V, sarà $z'' < 0$ quindi il diagramma $z - f_{01}$ passa per l'origine ($z = 0$) è tangente nell'origine all'asse della f_0 ($z' = 0$) e volge la concavità in basso ($z'' < 0$).

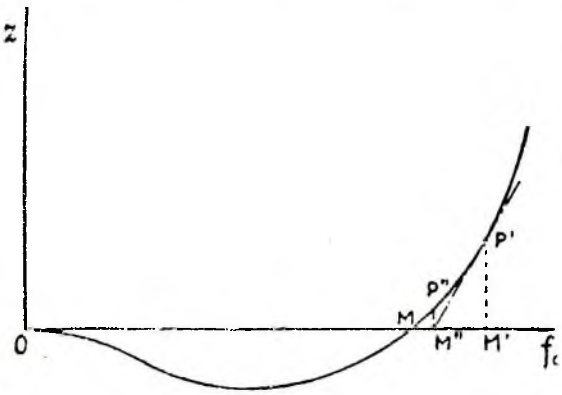


FIG. 68.

Con l'aumentare di f_0, $\frac{2\,g}{u^2}$ diminuisce; quindi in un certo punto sarà $X = \frac{u^2\,\text{sen}\,2\,\varphi}{g}$, in tal caso $z'' = 0$ e in questo punto si ha un flesso.

Poi la seconda derivata z'' diventa positiva e la curva volge la concavità in alto.

Anche in questo caso occorre calcolare prima il denominatore di $\frac{z}{z'}$ perchè se esso risulta negativo, la soluzione invece di avvicinarsi al valore vero di f_0 ci allontana da esso, perchè la curva prima decresce, indi cresce ed ha un punto in cui la sua tangente è parallela all'asse delle f_0.

Questo problema può essere dato sotto varie forme perchè si può richiedere, invece di C', uno dei fattori che entrano in detto coefficiente; generalmente il prodotto $i\,\bar{\beta}$ oppure $\bar{\beta}$.

Applicazione:

Cannone da 149/35; Granata inglese. Dati: $X = 12550$: $\varphi = 30°$: $V = 650$: $C = 1,87$; $\delta = 0,927$. Determinare il coefficiente $i\ \beta$.

Metodo dei fattori di tiro

$$\lg \operatorname{sen} 2\varphi = \bar{1},93753$$
$$\operatorname{colg} X = \bar{5},90136$$
$$\lg f_1 = \bar{5},83889$$
$$f_0 = 4548$$

f_0 \ V	650
4500	0,046842
4548	0,046901
4600	0,046966

Metodo della tavola balistica generale.
Per $V = 650$ si deduce:

$$D(V) = 4165,5 \qquad J(V) = 0,16653 \qquad A(V) = 493,093$$

poniamo

$$f_{01} = 4554,5$$
$$D(u_1) = 8720,0 \qquad J(u_1) = 1,05367 \qquad A(u_1) = 2685,14$$
$$J(u_1) - J(V) = 0,88714 \qquad A(u_1) - A(V) = 2192,05$$

Calcolo di $\Delta f_{01} = -\dfrac{A(u_1) - A(V) - f_{01}\left[J(V) + f_{01}\dfrac{\operatorname{sen} 2\varphi}{X}\right]}{J(u_1) - J(V) - 2 f_{01}\dfrac{\operatorname{sen} 2\varphi}{X}}$

$$\lg \frac{\operatorname{sen} 2\varphi}{X} = \bar{5},83889 \qquad f_{01}\frac{\operatorname{sen} 2\varphi}{X} = 0,31429$$
$$\lg f_{01} = 3,65844 \qquad J(V) = 0,16653$$
$$\lg f_{01}\frac{\operatorname{sen} 2\varphi}{X} = \bar{1},49733 \qquad J(V) + f_{01}\frac{\operatorname{sen} 2\varphi}{X} = 0,48082$$
$$\lg 2 = 0,30103 \qquad \lg[\cdots\cdots\cdots] = \bar{1},68198$$
$$\lg 2 f_{01}\frac{\operatorname{sen} 2\varphi}{X} = \bar{1},79836 \qquad \lg f_{01} = 3,65844$$
$$\lg f_{01}[\cdots\cdots\cdots] = 3,34042$$

$$J(u_1) - J(V) = 0,88714 \qquad A(u_1) - A(V) = 2192,05$$
$$2 f_{01}\frac{\operatorname{sen} 2\varphi}{X} = 0,62858 \qquad f_{01}[\cdots\cdots] = 2189,88$$

$$D^{re} = 0,25856 \qquad N^{re} = 2,17$$

$$\lg N^{re} = 0,33646$$
$$\operatorname{colg} D^{re} = 0,58744$$
$$\lg \Delta f_{01} = 0,92390$$
$$\Delta f_{01} = -8,4$$
$$f_{01} = 4554,5$$
$$f_0 = 4546,1$$

Calcolo di $i\,\beta = \frac{C f_o}{\delta X}$

$$\begin{aligned}
\lg C &= 0{,}27184 \\
\lg f_o &= 3{,}65764 \\
\operatorname{colg} \delta &= 0{,}03292 \\
\operatorname{colg} X &= \bar{5}{,}90136 \\
\lg i\,\beta &= \bar{1}{,}86376 \\
i\,\beta &= 0{,}731
\end{aligned}$$

Volendo ricavare il valore del coefficiente di forma, basta trovare sulla Tav. VIII il valore di β corrispondente a $\varphi = 30^\circ$; $C = 1{,}87$; $X = 12550$.

In tal caso si ha

$$\bar{\beta} = 0{,}896$$

e quindi

$$\begin{aligned}
\lg i\,\beta &= \bar{1}{,}86376 \\
\operatorname{colg} \beta &= 0{,}04769 \\
\lg i &= \bar{1}{,}91145 \\
i &= 0{,}816
\end{aligned}$$

2 - Problemi secondari.

Può darsi che nella risoluzione dei problemi principali siano richiesti oltre gli elementi X φ V C' anche quelli secondari ω T U.

In questo caso, volendo essere esatti, occorrerebbe impiegare per ciascuno degli elementi richiesti il relativo valore di β; però, come s'è detto, non disponendo di tali valori e d'altra parte avendo gli elementi secondari una importanza relativa, si procederà nel calcolo impiegando sempre lo stesso valore di β.

Anche questo problema può essere determinato coi fattori di tiro o con la tavola balistica principale.

Nel 1° caso in funzione di V ed f_o noti, si dedurrà

$$f_2 = \frac{tg\,\omega}{tg\,\varphi} \quad \text{e quindi} \quad tg\,\omega = f_2\, tg\,\varphi \quad \text{da cui si ricava } \omega$$

$$f_3 = \frac{T \cos\varphi}{C'} \quad \text{e quindi} \quad T = \frac{f_3\, C'}{\cos\varphi}$$

$$U = \frac{u \cos\varphi}{\cos\omega}$$

Con la tavola balistica generale si avrà:

$$tg\,\omega = \frac{C'}{2\cos^2\varphi}\left[J(u) - \frac{A(u) - A(V)}{D(u) - D(V)} \right]$$

$$T = \frac{C'}{\cos\varphi}\left[T(u) - T(V) \right]$$

$$U = \frac{u \cos\varphi}{\cos\omega}$$

Applicazione:

Cannone da 152/50. Dati: $X = 20.000$, $C = 2{,}31$, $i = 0{,}660$, $\delta_0 = 1$, $V = 850$. Determinare φ, ω, T, U.

Il valore di φ è già stato determinato e si è trovato allora: $\varphi = 28^\circ 13'$ (Esempio pag. 164)

$f_0 = \frac{X}{C'} = 4257{,}2 \qquad D(V) = 3317{,}6 \qquad A(V) = 365{,}884 \qquad J(V) = 0{,}13624$

$D(u) = 7574{,}8 \qquad A(u) = 1700{,}868 \qquad A(u) - A(V) = 1334{,}984$

$$\frac{A(u) - A(V)}{D(u) - D(V)} = 0{,}31358$$

Calcolo di ω

Con i fattori di tiro		Con la tavola balistica generale	
$\lg f_2$	$= 0{,}3186$	$J(u)$	$= 0{,}68325$
$\lg tg\,\varphi$	$= \bar{1}{,}7296$	$\frac{A(u) - A(V)}{D(u) - D(V)}$	$= 0{,}31358$
$\lg tg\,\omega$	$= 0{,}0482$	$J(u) - \frac{A(u) - A(V)}{D(u) - D(V)}$	$= 0{,}36967$
		$\lg C'$	$= 0{,}67191$
		colg $2\cos^2\varphi$	$= \bar{1}{,}80885$
		$\lg J(u) - \frac{A(u) - A(V)}{D(u) - D(V)}$	$= \bar{1}{,}56781$
		$\lg tg\,\omega$	$= 0{,}04857$
ω	$= 48^\circ\,10'$	ω	$= 48^\circ\,12'$

Calcolo di T

Con i fattori di tiro		Con la tavola balistica generale	
$\log f_3$	$= 1{,}0140$	$T(u)$	$= 13{,}368$
$\log C'$	$= 0{,}6719$	$T(V)$	$= 3{,}041$
colg $\cos\varphi$	$= 0{,}0549$	$T(u) - T(V)$	$= 10{,}327$
$\log T$	$= 1{,}7408$	$\lg[\cdots\cdots\cdots]$	$= 1{,}01397$
		$\lg C'$	$= 0{,}67191$
		colg $\cos\varphi$	$= 0{,}05494$
		$\lg T$	$= 1{,}74082$
T	$= 55''\,06$	T	$= 55''\,06$

Calcolo di U

Con i fattori di tiro		Con la tavola balistica generale	
$\log u$	$= 2{,}4241$	u	$= 265{,}5$
$\log\cos\varphi$	$= \bar{1}{,}9451$	$\lg u$	$= 2{,}42406$
colg $\cos\omega$	$= 0{,}1759$	$\lg\cos\varphi$	$= \bar{1}{,}94506$
$\lg u$	$= 2{,}5451$	colg $\cos\omega$	$= 0{,}17618$
			$= 2{,}54530$
U	$= 350{,}8$	U	$= 351{,}0$

8 - Problemi relativi a punti fuori dell'orizzonte del pezzo.

Questi problemi riguardano la determinazione degli elementi relativi a punti fuori dell'orizzonte, quindi la loro soluzione richiede l'impiego delle formule generali trovate precedentemente.

L'impiego di queste formule richiede la conoscenza di C' e quindi di β. Noi attribuiremo al $\bar{\beta}$ lo stesso valore del punto di caduta; l'approssimazione dei risultati conseguiti sarà tanto maggiore quanto più vicino è il punto considerato al punto di caduta. Non essendo nota la X relativa ai dati del problema, questa potrà essere calcolata con i fattori di tiro, risolvendo il secondo problema principale del tiro.

Completato in tal modo il valore di C', si procederà al calcolo.

a) *Problema* 5°. Dati: V, φ, C, δ, i; determinare y, θ, t, v corrispondenti ad una ascissa x qualunque.

Si calcola C' prendendo dalla tav. VIII il $\bar{\beta}$ corrispondente al coefficiente balistico C e all'angolo φ dati, ed alla gittata X, calcolata in modo approssimativo (cioè colle tavole balistiche secondarie) quando non è nota. Quindi si calcolano successivamente $D(u)$; $J(u)$; $A(u)$; $T(u)$; u; U ed y, θ, t, v.

$$\left\{\begin{aligned} D(u) &= D(V) + \frac{x}{C'} \\ y &= x\, tg\, \varphi - \frac{C' x}{2\cos^2\varphi}\left[\frac{A(u) - A(V)}{D(u) - D(V)} - J(V)\right] \\ tg\,\theta &= tg\,\varphi - \frac{C'}{2\cos^2\varphi}\left[J(u) - J(V)\right] \\ t &= \frac{C'}{\cos\varphi}\left[T(u) - T(V)\right] \\ v &= \frac{u\cos\varphi}{\cos\theta} \end{aligned}\right.$$

In modo analogo si procede qualora siano dati, invece di x, la θ oppure t, oppure $v\cos\theta$.

La soluzione con i fattori di tiro non presenta difficoltà; però, qualora fosse noto l'elemento θ, si deve ricorrere ai fattori di tiro f_4 del Fasella (f_θ del Parodi) il cui valore è, come noto:

$$f_4 = f(1 + f_2) = \frac{2\cos^2\varphi}{C'}(tg\,\varphi - tg\,\theta) = J(u) - J(V)$$

per mezzo del quale, dato θ, è possibile calcolare gli altri fattori.

b) *Problema* 6°. Elementi del vertice.

Dati: V, φ, C', δ, i; trovare l'ascissa x_0 e l'ordinata Y del vertice.

Si completerà il C' prendendo il $\bar{\beta}$ corrispondente ad X, e se questo non fosse noto, si risolverà prima il secondo problema del tiro per determinarlo.

Nel vertice $\theta = o$ allora la formula

$$tg\,\theta = tg\,\varphi - \frac{C'}{2\cos^2\varphi}\left[(J(u) - J(V) \right] \quad \text{essendo } tg\,\theta = o \quad u = u_o \quad \text{diventa}$$

$$tg\,\varphi = \frac{C'}{2\cos^2\varphi}\left[J(u_o) - J(V) \right]$$

$$\frac{\operatorname{sen} 2\varphi}{C'} + J(V) = J(u_o)$$

Trovato $J(u_o)$ si deduce dalla tav. VII $A(u_o)$, $D(u_o)$, e quindi sarà:

$$\left\{\begin{aligned} x_o &= C'\left[D(u_o) - D(V) \right] \\ Y &= x_o\, tg\,\varphi - \frac{C' x_o}{2\cos^2\varphi}\left[\frac{A(u_o) - A(V)}{D(u_o) - D(V)} - J(V) \right] = \\ &= \frac{C' x_o}{2\cos^2\varphi}\left[\frac{\operatorname{sen} 2\varphi}{C'} + J(V) - \frac{A(u_o) - A(V)}{D(u_o) - D(V)} \right] \\ Y &= \frac{C' x_o}{2\cos^2\varphi}\left[J(u_o) - \frac{A(u_o) - A(V)}{D(u_o) - D(V)} \right] \end{aligned}\right.$$

Il problema si risolve assai più facilmente impiegando i fattori di tiro. Dalle formule precedenti si ricava:

$$\frac{x_o}{X} = \left[D(u_o) - D(V) \right] \frac{C'}{X}$$

$$\frac{Y}{X\, tg\,\varphi} = \frac{x_o}{X}\, \frac{C'}{\operatorname{sen} 2\varphi}\left[J(u_o) - \frac{A(u_o) - A(V)}{D(u_o) - D(V)} \right]$$

Porremo $\frac{x_o}{X} = f_5$, $\frac{Y}{X\, tg\,\varphi} = f_6$

Che f_5 ed f_6 siano fattori di tiro, si deduce dal fatto che essi sono funzione di f_o e V. Infatti

$$f_5 = \frac{1}{f_o}\left[D(u_o) - D(V) \right] \quad \text{e a} \quad D(u_o) \quad \text{corrisponde} \quad J(u_o) = J(V) + f$$

$$f_6 = \frac{x_o}{X}\, \frac{C'}{\operatorname{sen} 2\varphi}\left[\cdots\cdots \right] = f_5\, \frac{1}{f}\left[\cdots\cdots\cdots \right] \qquad \text{c. v. d.}$$

Applicazione:

Cannone da 149/35; Granata inglese.

Con i dati ed i risultati dell'applicazione del problema 4° e cioè $X = 12550$; $\varphi = 30°$; $V = 650$; $f_o = 4546{,}1$; $\lg C' = 0.44100$ si vogliono determinare x_o ed Y.

Con i fattori di tiro

$\lg f_5 = \bar{1},7564$
$\lg X = 4{,}0986$

$\lg x_o = 3{,}8550$
$x_o = 7161$

$\lg f_6 = \bar{1},5525$
$\lg X = 4{,}0986$
$\lg tg\,\varphi = \bar{1},7614$

$\lg Y = 3{,}4125$
$Y = 2585$

Con la tavola balistica generale.

$\lg \text{sen}\, 2\varphi$	$= \bar{1},93753$
$\text{colg}\, C'$	$= \bar{1},55900$
$\lg \dfrac{\text{sen}\, 2\varphi}{C'}$	$= \bar{1},49653$
$\dfrac{\text{sen}\, 2\varphi}{C'}$	$= 0,31371$
$J(V)$	$= 0,16653$
$J(u_0)$	$= 0,48024$
$D(u_0)$	$= 6760,1$
$D(V)$	$= 4165,5$
$D(u_0) - D(V)$	$= 2594,6$
$\lg [\cdots\cdot]$	$= 3,85507$
$\lg C'$	$= 0,44100$
$\log x_0$	$= 3,85507$
x_0	$= 7163\text{m}.$

$A(u_0)$	$= 1320,10$
$A(V)$	$= 493,093$
$A(u_0) - A(V)$	$= 737,01$
$\lg [\cdots\cdot\cdot]$	$= 2,86747$
$\text{colg}\, [D(u_0) - D(V)]$	$= \bar{4},58593$
$\lg \dfrac{A(u_0) - A(V)}{D(u_0) - D(V)}$	$= \bar{1},45340$
$\dfrac{A(u_0) - A(V)}{D(u_0) - A(V)}$	$= 0,28405$
$J(u_0)$	$= 0,48024$
$J(u_0) - \dfrac{A(u_0) - A(V)}{D(u_0) - D(V)}$	$= 0,19619$
$\lg C'$	$= 0,44100$
$\lg x_0$	$= 3,85507$
$\text{colg}\, 2\cos^2\varphi$	$= 1,82391$
$\lg [\cdots\cdots]$	$= \bar{1},29268$
$\lg Y$	$= 3,41266$
Y	$= 2586\text{ m}.$

CAPITOLO VIII

RELAZIONI FRA TRAIETTORIE DIVERSE

1 – Ipotesi.

Variando l'angolo di proiezione varia certamente il valore di C'; però se le variazioni nell'angolo sono piccole, si può ritenere che il coefficiente C' non cambi con lo spostarsi del punto d'arrivo su di una verticale. Appunto in questa ipotesi ricaveremo delle relazioni che si chiamano relazioni fra traiettorie diverse in punti di uguale ascissa.

Queste relazioni sono tanto più attendibili quanto più piccole sono le variazioni di φ e della quota per cui esse dovranno essere impiegate con criterio per non trovare dei risultati assurdi.

2 – Relazione fra gli angoli di proiezione.

Faremo l'ipotesi che C' si mantenga costante per tutti i punti sulla verticale di C.

In questo caso poichè si spara sempre con la stessa velocità iniziale, x e C' sono costanti, sarà costante $D\ (u)$ per tutti i punti della verticale in C, essendo

$$D(u) = D(V) + \frac{x}{C'}$$

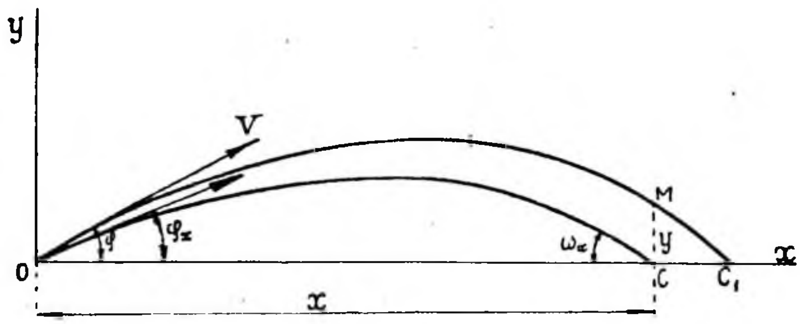


Fig. 68-*bis*.

Ma se $D\ (u)$ è costante lo saranno pure $A\ (u)$, $J\ (u)$, $T\ (u)$ e quindi lo saranno i vari fattori di tiro

$$f_1 \ f_2 \ f_3 \ f_4$$

i quali dipendono dalla sola x.

Potremo quindi eguagliare i vari fattori di tiro per il punto di caduta della traiettoria di angolo di proiezione φ_x e per un punto della traiettoria di angolo φ che stà sulla verticale del punto di caduta.

In particolare si eguagliano i fattori di tiro f_1 essendo essi

$$f_1 = \frac{2\cos^2\varphi}{x}(tg\,\varphi - tg\,\varepsilon) \qquad f_1 = \frac{2\cos^2\varphi_x}{x}\,tg\,\varphi_x$$

sarà

$$\cos^2\varphi\,(tg\,\varphi - tg\,\varepsilon) = \cos^2\varphi_x \cdot tg\,\varphi_x \qquad \frac{tg\,\varphi - tg\,\varepsilon}{tg\,\varphi_x} = \frac{\cos^2\varphi_x}{\cos^2\varphi} \qquad [1]$$

la quale relazione ci permette di ricavare le formule più importanti atte a risolvere i vari problemi.

Queste formule sono d'importanza capitale perchè vengono comunemente applicate per l'elaborazione dei dati che servono alla costruzione di tavole di tiro, come pure per la risoluzione di importanti problemi pratici di tiro.

Dalla [1] risolvendo rispetto a $tg\,\varepsilon$ si ha

$$tg\,\varphi - tg\,\varepsilon = \frac{\cos^2\varphi_x\, tg\,\varphi_x}{\cos^2\varphi}; \qquad tg\,\varepsilon = tg\,\varphi - \frac{\text{sen}\,\varphi_x \cos\varphi_x}{\cos^2\varphi}$$

$$tg\,\varepsilon = \frac{\text{sen}\,\varphi\cos\varphi}{\cos^2\varphi} - \frac{\text{sen}\,\varphi_x\cos\varphi_x}{\cos^2\varphi} = \frac{\text{sen}\,2\,\varphi - \text{sen}\,2\,\varphi_x}{2\cos^2\varphi} = \frac{y}{x}$$

cioè

$$\frac{y}{x} = \frac{\text{sen}\,(\varphi - \varphi_x)\cos(\varphi + \varphi_x)}{\cos^2\varphi} \tag{2}$$

Questa formula si presta al calcolo di y quando sia nota x e viene impiegata per la costruzione delle traiettorie grafiche.

Infatti in tal caso disponendo delle tavole numeriche si hanno per vari valori di x i corrispondenti φ_x, l'angolo di proiezione per il quale si vuole la traiettoria è prefissato e sia φ; con la [2] si ricava y.

Si noti che questo procedimento, che una volta era l'unico per la costruzione di tavole di tiro grafiche, si presta bene solo per piccoli angoli di proiezione, perchè per grandi angoli disponiamo di procedimenti che danno una approssimazione maggiore.

Risolvendo la formula rispetto a φ_x si ottiene

$$tg\,\varepsilon = \frac{\text{sen}\,2\,\varphi - \text{sen}\,2\,\varphi_x}{2\cos^2\varphi}$$

$$\text{sen}\,2\,\varphi_x = \text{sen}\,2\,\varphi - 2\cos^2\varphi\, tg\,\varepsilon = \frac{\text{sen}\,2\,\varphi\cos\varepsilon - 2\cos^2\varphi\,\text{sen}\,\varepsilon}{\cos\varepsilon}$$

cioè

$$\text{sen}\,2\,\varphi_x = \frac{2\,\text{sen}\,\varphi\cos\varphi\cos\varepsilon - 2\cos^2\varphi\,\text{sen}\,\varepsilon}{\cos\varepsilon} =$$

$$= \frac{2\cos\varphi\,(\text{sen}\,\varphi\cos\varepsilon - \text{sen}\,\varepsilon\cos\varphi)}{\cos\varepsilon} = \frac{2\,\text{sen}\,(\varphi - \varepsilon)\cos\varphi}{\cos\varepsilon}$$

formula questa molto importante che permette la riduzione all'orizzonte cioè consente di determinare l'angolo di proiezione φ_x necessario per battere la distanza X quando sia noto l'angolo di proiezione che batte un bersaglio posto alla stessa distanza x, ma fuori dell'orizzonte del pezzo ed avente ordinata y.

Infine dalla relazione

$$\text{sen}\,2\,\varphi_x = \frac{2\,\text{sen}\,(\varphi - \varepsilon)\cos\varphi}{\cos\varepsilon} = \frac{\text{sen}\,(2\,\varphi - \varepsilon) - \text{sen}\,\varepsilon}{\cos\varepsilon}$$

si ricava

$$\text{sen}\,(2\,\varphi - \varepsilon) = \text{sen}\,2\,\varphi_x\cos\varepsilon + \text{sen}\,\varepsilon$$

formula che permette di risolvere il problema inverso a quello precedente e che servì per molto tempo per calcolare la correzione complementare dell'angolo di elevazione per effetto dell'angolo di sito.

La formula trovata non è logaritmica, la si può rendere tale ponendo

$$\text{sen}\,2\,\varphi_x = tg\,\psi$$

in tal caso

$$\text{sen}(2\varphi - \varepsilon) = tg\,\psi \cos\varepsilon + \text{sen}\,\varepsilon = \frac{\text{sen}\,\psi\cos\varepsilon + \text{sen}\,\varepsilon\cos\psi}{\cos\psi}$$

cioè

$$\text{sen}(2\varphi - \varepsilon) = \frac{\text{sen}(\psi + \varepsilon)}{\cos\psi}$$

Le formule trovate ci permettono di risolvere problemi importanti per noi e cioè:

3 - Problema 1°.

Dati V, φ, C' determinare y corrispondente ad una data x.

(È questo il problema che si presenta nella costruzione grafica delle traiettorie e che servì fino alla guerra 1915-1918 per costruire tutti i fasci grafici).

Si risolve innanzi tutto il 1° problema del tiro per il quale sono dati V, C' ed $X = x$ e si vuol determinare $\varphi = \varphi_x$.

Trovato φ_x si avrà subito

$$y = x\,\frac{\text{sen}(\varphi - \varphi_x)\cos(\varphi + \varphi_x)}{\cos^2\varphi}$$

Disponendo delle tavole di tiro numeriche non è necessario risolvere il primo problema del tiro perchè il valore di φ_x si deduce dalle tavole in corrispondenza della x data.

a) *Applicazione:*

Cannone da 152/50; Palla. Dati: $V = 850$; $\varphi = 32^\circ$, $x = 20.000$; $\delta = 1$. Determinare y.

Si è trovato che $\varphi_x = 28^\circ 3'$ quindi

$$\varphi - \varphi_x = 3^\circ 57' \qquad \varphi + \varphi_x = 60^\circ 3'$$

$$\begin{aligned}
\lg x &= 4{,}30103\\
\lg \text{sen}(\varphi - \varphi_x) &= \bar{2}{,}83813\\
\lg \cos(\varphi + \varphi_x) &= \bar{1}{,}69831\\
\text{colg}\cos^2\varphi &= 0{,}14316\\
\lg y &= 2{,}98063\\
y &= 956
\end{aligned}$$

4 - Problema 2°.

Dati V, C, δ, i ed un punto $x\ y$ da colpire determinare φ.

Anche in questo caso occorre determinare l'angolo φ_x necessario per colpire il punto a distanza $X = x$ sull'orizzonte, si risolve cioè il 1° problema principale indi si applica la formula:

$$\text{sen}(2\varphi - \varepsilon) = \frac{\text{sen}(\psi + \varepsilon)}{\cos\psi}$$

Si noti che quando l'angolo di sito è negativo può avvenire che la traiettoria relativa a φ batta un punto d'ascissa x per il quale non vi è il corrispondente φ_x,

se ciò avviene nella risoluzione del 1° problema del tiro risulta sen $2\varphi_x > 1$ m ciò non importa poichè essendo sen $2\varphi_x = tg\,\psi > 1$ può darsi che il problem ammetta ancora una soluzione.

Applicazione:

Cannone da 152/50. Dati: $V = 850$; $\delta = 1$; $x = 20000$; $y = 100$ Determinare φ.

Si è trovato che per $x = 20000$ $\varphi_x = 28°3'$ $2\varphi_x = 56°6'$

lg y	$= 3{,}00000$	lg sen $2\varphi_x$ = lg $tg\,\psi$	$= \bar{1}{,}91908$
colg x	$= \bar{5}{,}69897$	ψ	$= 39°42'$
lg $tg\,\varepsilon$	$= \bar{2}{,}69897$	ε	$= 2°52'$
lg sen $(\psi + \varepsilon)$	$= \bar{1}{,}83023$	$\psi + \varepsilon$	$= 42°34'$
colg cos ψ	$= 0{,}11385$		
lg sen $(2\varphi - \varepsilon)$	$= \bar{1}{,}94408$		
$2\varphi - \varepsilon$	$= 61°33'$		
ε	$= 2°52'$		
2φ	$= 64°25'$		
φ	$= 32°12'$		

5 - Problema 3°.

Dati φ, C' ed un punto x, y da colpire - Determinare V.

Coi dati del problema si può calcolare ε e quindi φ_x, si può cioè procede alla riduzione all'orizzonte; trovato φ_x è possibile calcolare V risolvendo 3° problema del tiro cioè:

Dati $\varphi = \varphi_x$, $x = X$, C' determinare V.

a) *Applicazione*

Cannone da 75/27. Dati: $\varphi = 30°18'$; $x = 7500$; $y = 320$; $C' = 1{,}3$ Determinare V.

Si comincia col ridurre i dati all'orizzonte cioè si calcola φ_x.

$$\text{sen } 2\varphi_x = \frac{2 \text{ sen } (\varphi - \varepsilon) \cos \varphi}{\cos \varepsilon}.$$

lg y	$= 2{,}50515$	φ	$= 30°18'$	lg 2	$= 0{,}30103$
colg x	$= \bar{4}{,}12494$	ε	$= 2°27'$	lg sen $(\varphi - \varepsilon)$	$= \bar{1}{,}66946$
lg $tg\,\varepsilon$	$= \bar{2}{,}63009$	$\varphi - \varepsilon$	$= 27°51'$	lg cos φ	$= \bar{1}{,}93621$
ε	$= 2°27'$			colg cos ε	$= 0{,}00040$
				lg sen $2\varphi_x$	$= \bar{1}{,}90710$
				$2\varphi_x$	$= 53°51'$
				φ_x	$= 26°55'$

Trovato φ_x si risolve il 3° problema del tiro cioè: Dati φ C' X determinare

6 – Problema 4°.

Dati V, φ, x ed y determinare C'.

È questo il problema che si presenta nella compilazione delle tavole di tiro sulla base di risultati sperimentali.

Infatti generalmente vengono eseguiti tiri su terreno che non è perfettamente orizzontale e quindi si tratta di ridurre i dati trovati all'orizzonte, indi si deve risolvere il 4° problema principale per determinare C', oppure qualcuno degli elementi del C', noti gli altri.

La riduzione all'orizzonte viene eseguita con la formula:

$$\operatorname{sen} 2\,\varphi_x = \frac{2 \operatorname{sen}(\varphi - \varepsilon) \cos \varphi}{\cos \varepsilon}$$

noto φ_x si risolve il problema:

Dati: $\varphi = \varphi_x$; $X = x$; V; determinare C'.

Applicazione:

Cannone da 305/50. Dati: $V = 800$; $\varphi = 35°$; $x = 23.187$; $y = 990$; $\delta_0 = 1$. Calcolare C'.

Riduzione all'orizzonte:

$$\begin{aligned} \lg y &= 2{,}99564 & \varphi &= 35° \\ \operatorname{colg} x &= \bar{5}{,}63476 & \varepsilon &= 2°27' \\ \lg tg\, \varepsilon &= \bar{2}{,}63040 & \varphi - \varepsilon &= 32°33' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lg \operatorname{sen}(\varphi - \varepsilon) &= \bar{1}{,}73081 \\ \lg 2 &= 0{,}30103 \\ \lg \cos \varphi &= \bar{1}{,}91336 \\ \operatorname{colg} \cos \varepsilon &= 0{,}00040 \\ \lg \operatorname{sen} 2\,\varphi_x &= \bar{1}{,}94560 \\ 2\,\varphi_x &= 61°55' \\ \varphi_x &= 30°58' \end{aligned}$$

Calcolo di $f_1 = \dfrac{\operatorname{sen} 2\,\varphi_x}{X}$

$$\begin{aligned} \lg \operatorname{sen} 2\,\varphi_x &= \bar{1}{,}94560 \\ \operatorname{colg} X &= \bar{5}{,}63476 \\ \lg f_1 &= \bar{5}{,}58036 \\ f_0 &= 3438{,}5 \\ \lg X &= 4{,}36524 \\ \operatorname{colg} f_0 &= \bar{4}{,}46363 \\ \lg C' &= 0{,}82887 \\ C' &= 6{,}743 \end{aligned}$$

In seconda approssimazione applicando la tavola balistica generale, si ha

$$\Delta f_{o_1} = - \frac{A(u_1) - A(V) - f_{o_1}\left[J(V) + f_{o_1}\dfrac{\operatorname{sen} 2\varphi_s}{X}\right]}{J(u_1) - J(V) - 2 f_{o_1}\dfrac{\operatorname{sen} 2\varphi_s}{X}}$$

Per $V = 800$ [assumendo per f_o il valore ricavato in 1ª approssimazione $f_o = 3440{,}8$ che sommato a $D(V)$ da un valore intero di $D(u)$].

$D(V)$	$= 3519{,}2$	$J(V)$	$= 0{,}14205$	$A(V)$	$= 393{,}923$
f_o	$= 3440{,}8$	$J(u_1)$	$= 0{,}52572$	$A(u_1)$	$= 1330{,}60$
$D(u_1)$	$= 6960{,}0$	$J(u_1) - J(V)$	$= 0{,}38367$	$A(u_1) - A(V)$	$= 936{,}68$

$\lg \operatorname{sen} 2\varphi_s$	$= \bar{1}{,}94560$	$f_{o_1}\dfrac{\operatorname{sen} 2\varphi_s}{X}$	$= 0{,}13093$
$\lg f_{o_1}$	$= 3{,}53666$	$J(V)$	$= 0{,}14205$
$\operatorname{colg} X$	$= \bar{5}{,}63476$	$J(V) + f_{o_1}\dfrac{\operatorname{sen} 2\varphi_s}{X}$	$= 0{,}27298$
$\lg 2$	$= 0{,}30103$	$\lg[\cdots\cdots\cdot]$	$= \bar{1}{,}43613$
$\lg 2 f_{o_1}\dfrac{\operatorname{sen} 2\varphi_s}{X}$	$= \bar{1}{,}41805$	$\lg f_{o_1}$	$= 3{,}53666$
$2 f_{o_1}\dfrac{\operatorname{sen} 2\varphi_s}{X}$	$= 0{,}26185$	$\lg f_{o_1}[\cdots\cdots\cdot]$	$= 2{,}97279$
$J(u_1) - J(V)$	$= 0{,}38367$	$f_{o_1}[\cdots\cdots\cdot]$	$= 939{,}27$
D.re	$= 0{,}12182$	$A(u_1) - A(V)$	$= 936{,}68$
		N.re	$= -2{,}59$

$\lg \lvert \text{N.}^{re} \rvert$	$= 0{,}41330$	Δf_{o_1}	$= 3{,}2$	$\lg X$	$= 4{,}36524$
colg. D.re	$= 0{,}08572$	f_{o_1}	$= 3440{,}8$	$\operatorname{colg} f_o$	$= \bar{4}{,}46294$
$\lg \Delta f_{o_1}$	$= 0{,}49902$	f_o	$= 3444{,}0$	$\lg C'$	$= 0{,}82818$

$$C' = 6{,}732$$

7 – Relazioni fra inclinazioni, tempi e velocità.

Come è stato fatto precedentemente per i fattori di tiro f_1 altrettanto si può fare per gli f_2, f_3, f_4 e quindi trovare relazioni fra θ ed ω, t e T, v e u.

Infatti eguagliando gli f_2 si ha

$$\frac{tg\,\varepsilon - tg\,\theta}{tg\,\varphi - tg\,\varepsilon} = \frac{tg\,\omega_s}{tg\,\varphi_s}$$

quindi

$$\frac{tg\,\varepsilon - tg\,\theta}{tg\,\omega_s} = \frac{tg\,\varphi - tg\,\varepsilon}{tg\,\varphi_s} = \frac{\cos^2\varphi_s}{\cos^2\varphi}$$

Per il tempo eguagliando gli f_3

$$\frac{t\cos\varphi}{C'} = \frac{T_s\cos\varphi_s}{C'}$$

quindi

$$\frac{t}{T_x} = \frac{\cos \varphi_x}{\cos \varphi}; \qquad t = T_x \frac{\cos \varphi_x}{\cos \varphi}$$

Per la velocità: da $v \cos \theta = u \cos \varphi$ si ha:

$$U_x \cos \omega_x = u \cos \varphi_x \text{ quindi } \frac{v \cos \theta}{U_x \cos \omega_x} = \frac{\cos \varphi}{\cos \varphi_x}$$

8 – Relazioni per proietti differenti.

Consideriamo due proietti diversi fra di loro, lanciati con la stessa velocità iniziale ma con angoli di proiezione diversi.

Lungo le due traiettorie così ottenute le pseudo velocità avranno valori diversi, però molto probabilmente ci saranno due punti (fig. 69) A e B nei quali le pseudo velocità sono uguali fra di loro. In tal caso risulterà

$$D(u_A) = D(u_B)$$

quindi

$$D(u_A) - D(V) = \frac{x}{C'}$$

$$D(u_B) - D(V) = \frac{x_1}{C'_1}$$

da cui $\frac{x}{C'} = \frac{x_1}{C'_1}$.

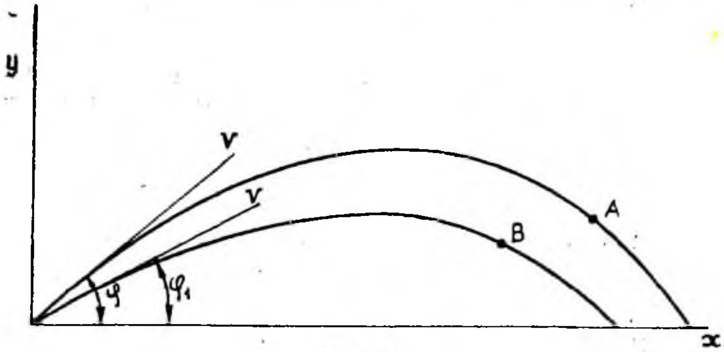


FIG. 69.

Inoltre, se u è costante, per quanto si è detto precedentemente, i fattori di tiro nei due punti considerati sono eguali per cui, eguagliandoli si avrà

$$f_1 = \frac{2 \operatorname{sen}(\varphi - \varepsilon) \cos \varphi}{x \cos \varepsilon} = \frac{2 \operatorname{sen}(\varphi_1 - \varepsilon_1) \cos \varphi_1}{x_1 \cos \varepsilon_1}$$

cioè

$$\frac{\operatorname{sen}(\varphi - \varepsilon) \cos \varphi}{x \cos \varepsilon} = \frac{\operatorname{sen}(\varphi_1 - \varepsilon_1) \cos \varphi_1}{x_1 \cos \varepsilon_1}$$

ed ancora

$$\frac{tg\,\varepsilon - tg\,\theta}{tg\,\varphi - tg\,\varepsilon} = \frac{tg\,\varepsilon_1 - tg\,\theta_1}{tg\,\varphi_1 - tg\,\varepsilon_1}; \qquad \frac{\operatorname{sen}(\varphi - \varepsilon)}{t \cos \varepsilon} = \frac{\operatorname{sen}(\varphi_1 - \varepsilon_1)}{t_1 \cos \varepsilon_1}$$

$$\frac{\cos \varphi}{v \cos \theta} = \frac{\cos \varphi_1}{v_1 \cos \theta_1}$$

Le formule considerate hanno poca importanza in pratica, ne acquistano però una notevole quando i punti nei quali si considera che le pseudo velocità sono uguali cadono sull'orizzonte.

In questo caso essendo $\varepsilon = \varepsilon_1 = 0$ si avrà

$$\frac{X}{C'} = \frac{X'}{C'_1}; \qquad \frac{\operatorname{sen} 2\varphi}{X} = \frac{\operatorname{sen} 2\varphi_1}{X_1}; \qquad \frac{tg\,\omega}{tg\,\varphi} = \frac{tg\,\omega_1}{tg\,\varphi_1}; \qquad \frac{\operatorname{sen}\varphi}{T} = \frac{\operatorname{sen}\varphi_1}{T_1}$$

$$\frac{\cos \varphi}{U \cos \omega} = \frac{\cos \varphi_1}{U_1 \cos \omega_1}$$

Dalle quali si deduce:

$$\frac{X_1}{X} = \frac{C'_1}{C'} = \frac{\text{sen } 2\,\varphi_1}{\text{sen } 2\,\varphi} = \frac{tg\,\omega_1}{tg\,\omega} \cdot \frac{\cos^2\varphi_1}{\cos^2\varphi} = \frac{T_1 \cos\varphi_1}{T\cos\varphi} = \frac{U_1\cos\omega_1 \text{ sen }\varphi_1}{U\cos\omega \text{ sen }\varphi}$$

Infatti dalla

$$\frac{tg\,\omega_1}{tg\,\omega} = \frac{tg\,\varphi_1}{tg\,\varphi} = \frac{\text{sen }\varphi_1 \cos\varphi}{\cos\varphi_1 \text{ sen }\varphi}$$

moltiplicando per $\frac{\cos^2\varphi_1}{\cos^2\varphi}$ si ha

$$\frac{tg\,\omega_1}{tg\,\omega}\,\frac{\cos^2\varphi_1}{\cos^2\varphi} = \frac{\text{sen }\varphi_1\cos\varphi_1}{\text{sen }\varphi\cos\varphi} = \frac{\text{sen } 2\,\varphi_1}{\text{sen } 2\,\varphi}$$

Da

$$\frac{T_1}{T} = \frac{\text{sen }\varphi_1}{\text{sen }\varphi} \quad \text{si ha} \quad \frac{T_1\cos\varphi_1}{T\cos\varphi} = \frac{\text{sen }\varphi_1\cos\varphi_1}{\text{sen }\varphi\cos\varphi} = \frac{\text{sen } 2\,\varphi_1}{\text{sen } 2\,\varphi}$$

$$\frac{U_1\cos\omega_1}{U\cos\omega} = \frac{\cos\varphi_1}{\cos\varphi}; \qquad \frac{U_1\cos\omega_1 \text{ sen }\varphi_1}{U\cos\omega \text{ sen }\varphi} = \frac{\text{sen } 2\,\varphi_1}{\text{sen } 2\,\varphi}$$

Queste relazioni trovano una utile applicazione quando, disponendo di u avola di tiro ad una determinata quota, si vuole costruire la tavola per un'alt quota.

Purchè la differenza delle quote non sia eccessiva, e la b. d. f. non spari c forti angoli d'elevazione si possono applicare le formule trovate; ciò perchè n si è lontani dalla realtà supponendo che le pseudo velocità relative ai punti caduta delle due traiettorie che si hanno variando δ, siano uguali.

In questo caso si tratta di proietti differenti perchè il parametro che carat rizza il proietto risulta variato $\left(C' = \frac{C}{\delta\, i\, \beta}\right)$.

Nell'applicazione di queste formule occorre essere molto cauti e tener p sente l'ipotesi semplificativa fatta, poichè, volendo generalizzarle applicand ad angoli di proiezione molto grandi, si può incorrere in errori notevoli, tali condurre a risultati in aperta contraddizione fra di loro.

Applicazione:

Dalle tavole di tiro da 149/35; Granata monoblocco corrispondente $V = 500$ m/s; $\delta = 0{,}927$; $h = 1000$ ricavare la tavola per lo stesso proiett per la stessa V ma corrispondente alla quota di 1500 m. $\delta = 0{,}879$.

Pur trattandosi dello stesso proietto, si possono applicare le relazioni trov per proietti diversi, giacchè in realtà variando δ varia il C'; inoltre, poic $C' = \frac{C}{\delta\, i\, \beta}$ si avrà che

$$\frac{C'_1}{C'} = \frac{\dfrac{C}{\delta_1\, i\, \beta}}{\dfrac{C}{\delta_0\, i\, \beta}} = \frac{\delta_0}{\delta_1} = \eta$$

Dalla tavola di tiro esistente si deduce, ad es. per: $X = 6000$; $\varphi = 11°22'$; $\omega = 15°45'$; $T = 17''1$; $u = 294$ m/s.

Per la nuova tavola si pone:

$$X_1 = \eta X; \quad \text{sen } 2\varphi_1 = \eta \text{ sen } 2\varphi; \quad tg\,\omega_1 = \eta\, tg\,\omega \frac{\cos^2\varphi}{\cos^2\varphi_1}; \quad T_1 = \eta T \frac{\cos\varphi}{\cos\varphi_1};$$

$$U_1 = \eta \frac{U \cos\omega \text{ sen }\varphi}{\cos\omega_1 \text{ sen }\varphi_1}$$

lg δ_0	$= \bar{1},96708$	lg X	$= 3,77815$	lg sen 2φ	$= \bar{1},57809$
colg δ_1	$= 0,05601$	lg η	$= 0,02309$	lg η	$= 0,02309$
lg η	$= 0,02309$	lg X_1	$= 3,80124$	lg sen $2\varphi_1$	$= \bar{1},60118$
		X_1	$= 6328$	$2\varphi_1$	$= 23°\,32'$
				φ_1	$= 11°\,46'$

lg η	$= 0,02309$	lg η	$= 0,02309$	lg η	$= 0,02309$
lg $tg\,\omega$	$= 1,45029$	lg T	$= 1,23300$	lg U	$= 2,46835$
lg $\cos^2\varphi$	$= \bar{1},98280$	lg $\cos\varphi$	$= \bar{1},99140$	lg $\cos\omega$	$= \bar{1},98338$
colg $\cos^2\varphi_1$	$= 0,01844$	colg $\cos\varphi_1$	$= 0,00922$	lg sen φ	$= 0,29466$
lg $tg\,\omega_1$	$= \bar{1},47462$	$tg\, T_1$	$= \bar{1},25671$	colg $\cos\omega_1$	$= 0,01853$
				colg sen φ_1	$= 0,69053$
ω_1	$= 16°\,37'$	T_1	$= 18''\,1$	lg U_1	$= 0,47854$
				U_1	$= 301,0$

Eseguendo il calcolo per varie distanze e diagrammando i valori così trovati è possibile costruire la nuova T. T. per la densità dell'aria corrispondente a 1500 metri dal livello del mare.

9 - Teoremi sul tiro teso.

Il tiro è più o meno teso secondo che l'angolo di proiezione è più o meno piccolo. I teoremi sul tiro teso sono applicabili solo nel caso in cui l'angolo di proiezione non superi i 6° o 7° in tal caso si può ritenere che gli archi siano eguali alle tangenti mentre il valore dei coseni si assume uguale ad 1.

a) *Teorema* I. — L'angolo di partenza e l'angolo di arrivo sono indipendenti dall'altezza del punto d'arrivo sull'orizzonte.

Abbiamo visto nelle relazioni tra traiettorie diverse per punti d'uguale ascissa che si poteva scrivere:

$$\frac{tg\,\varphi - tg\,\varepsilon}{tg\,\varphi_x} = \frac{\cos^2\varphi_x}{\cos^2\varphi}$$

Se il tiro è teso si può ritenere

$$\frac{\cos^2\varphi_x}{\cos^2\varphi} = 1$$

e quindi $tg\,\varphi - tg\,\varepsilon = tg\,\varphi_x$ e ponendo gli archi invece delle tangenti, $\varphi = \varphi_x + \varepsilon$.

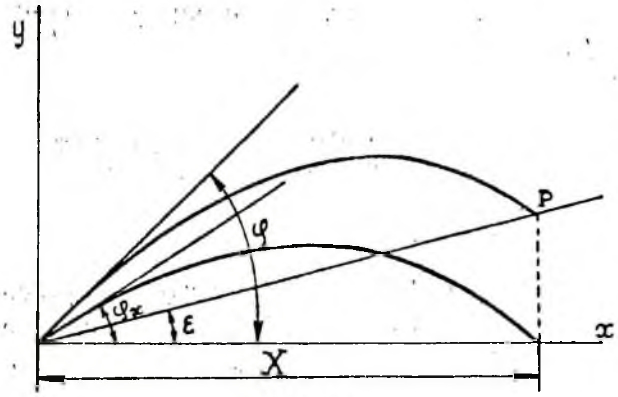


Fig. 70.

Ciò equivale a dire che per battere il punto P posto su una linea di sito ε, basta sommare al sito l'angolo che batte la distanza x sull'orizzonte, oppure che il punto d'arrivo si sposta su una verticale, variando l'angolo di sito (figura 70).

Ricordiamo che per il principio della rigidità delle traiettorie, il punto d'arrivo si sposta su una circonferenza con centro in O.

In modo analogo, dalla $\frac{tg\,\varepsilon - tg\,\theta}{tg\,\omega_x} = \frac{\cos^2 \varphi_x}{\cos^2 \varphi}$ si deduce $\varepsilon - \theta = \omega_x$.

b) *Teorema* II. — Il tempo e la velocità sono indipendenti dall'altezza del punto d'arrivo.

Infatti:

$$T_x = \frac{C'}{\cos \varphi_x}\Big(T(u) - T(V)\Big); \quad t = \frac{C'}{\cos \varphi}\Big(T(u) - T(V)\Big)$$

$$\frac{t}{T_x} = \frac{\cos \varphi_x}{\cos \varphi} = 1\,; \quad t = T_x\,; \quad \frac{v \cos \theta}{\cos \varphi} = \frac{U \cos \omega}{\cos \varphi_x}\,; \quad \frac{v \cos \theta}{U \cos \omega} = \frac{\cos \varphi}{\cos \varphi_x} = 1$$

e ritenendo che sia

$$\cos \theta = \cos \omega \qquad \text{si ha } v = U$$

c) *Teorema* III. — Se due proietti partono con velocità iniziale uguali ed arrivano con la stessa velocità, gli spazi percorsi, gli angoli di partenza e quelli di arrivo ed i tempi sono proporzionali ai coefficienti balistici ridotti dei due proietti.

Se le velocità sono uguali, trattandosi di tiro teso si possono ritenere uguali anche le pseudo velocità. In tal caso si possono applicare le relazioni trovate per proietti diversi e cioè

$$\frac{C'_1}{C'} = \frac{X_1}{X} = \frac{\text{sen } 2\,\varphi_1}{\text{sen } 2\,\varphi} = \frac{tg\,\omega_1 \cos^2 \varphi_1}{tg\,\omega \cos^2 \varphi} = \frac{T_1 \cos \varphi_1}{T \cos \varphi}$$

Ma il tiro è teso; quindi si sostituisce ai seni e tangenti gli archi; ai coseni l'unità cioè

$$\frac{C'_1}{C'} = \frac{X_1}{X} = \frac{\varphi_1}{\varphi} = \frac{\omega_1}{\omega} = \frac{T_1}{T}$$

Questi teoremi del tiro teso che una volta erano molto impiegati ora hanno perduta la loro importanza perchè sono applicabili soltanto in rari casi. Infatti essi rispondono bene solo nel tiro con piccoli angoli.

Occorre perciò essere molto cauti nell'applicarli e ricordare le ipotesi semplificative che si fanno per poterli ricavare. Essi servono ancora in qualche caso come per es. nella determinazione dei dati del tiro a tempo, quando l'altezza di scoppio è assai piccola e quindi si può ricavare θ essendo noti ω ed ε.

CAPITOLO IX

CALCOLO DELLA TRAIETTORIA PER ARCHI SUCCESSIVI

1 - Generalità.

Il concetto della determinazione grafica o numerica per archi successivi è sorto prima ancora che la balistica assumesse veste di scienza, perchè esso rimonta a Niccolò Tartaglia, il quale, come già è stato detto, per primo descrisse la traiettoria percorsa dal proietto spezzandola in tre tratti di cui due rettilinei raccordati da un arco di cerchio.

Anche Galileo e Newton studiarono le traiettorie del moto di un grave nell'aria; però il primo che diede un metodo completo e razionale di calcolo per archi successivi fu Eulero, il quale fece l'ipotesi che la resistenza dell'aria si mantenesse proporzionale al quadrato della velocità.

Appare quindi chiaro che il metodo di calcolo per archi è sorto prima del metodo che permette il calcolo della traiettoria in un arco solo, ma venne in seguito alquanto trascurato quando i metodi della balistica razionale permisero di sviluppare soluzioni rapide e semplici del problema balistico principale.

I progressi del tiro d'artiglieria fecero uscire la balistica dai limiti che l'organizzazione delle b. d. f. ed affusti faceva considerare come normale.

Il tiro con angoli del secondo arco è stato generalizzato, lo sfruttamento della massima potenza dei cannoni, il raggiungimento di grandissime gittate è stato imposto agli artiglieri, per cui vennero posti ai cultori della balistica dei problemi nuovi per lo studio di traiettorie, che fino ad allora avevano presentato soltanto un interesse speculativo e teorico.

La divisione di queste traiettorie molto estese in parti più o meno grandi, ciascuna calcolabile separatamente coi procedimenti della balistica razionale, si è imposta come l'unico procedimento idoneo, sia per la determinazione di tavole di tiro sufficientemente approssimate, che per il calcolo di coefficenti di correzione resisi indispensabili per la esecuzione rapida e precisa del tiro.

La impostazione ed il calcolo delle tavole di tiro controaerei richiede la determinazione degli elementi della traiettoria in ogni suo punto e con la massima esattezza, la quale si ottiene soltanto dividendo la traiettoria in tanti piccoli archi e calcolando ognuno di questi archi con le relazioni della balistica razionale.

Per sopperire alle nuove necessità della balistica sono stati ripresi i vecchi metodi di calcolo per archi e contemporaneamente vennero ideati nuovi metodi.

Molte discussioni vennero fatte circa la esattezza fornita dai vari procedimenti ideati, discussioni però che non portarono a risultati conclusivi.

Tutti i metodi ideati vanno bene e rispondono allo scopo, purchè la divisione in archi sia conveniente. L'elemento che occorre invece considerare è il tempo ri-

chiesto dai vari procedimenti per il calcolo di una traiettoria completa ed punto la rapidità del calcolo è la caratteristica peculiare di un metodo rispe ad un altro.

Occorre notare che il calcolo per archi successivi è sempre lungo e fa dioso per cui si farà ricorso ad esso solo nei casi particolari in cui i procedime normali non forniscono la voluta approssimazione; inoltre con esso si riso direttamente solo un problema del tiro, quello in cui, essendo dati V φ C δ i, occorre determinare gli elementi della traiettoria, gli altri problemi che possono presentare, o non sono solubili, oppure debbono essere risolti tentativi.

I diversi procedimenti di calcolo per archi possono essere classificati a conda della variabile indipendente assunta per definire l'estremità dell'arco calcolare.

Tale variabile può essere l'inclinazione della traiettoria nel punto finale d l'arco oppure il tempo impiegato dal proietto per percorrere tale arco.

Avremo così due categorie di metodi di calcolo:

1) Metodi di calcolo in cui viene fissata l'inclinazione θ finale dell'ar

2) Metodi di calcolo in cui viene fissato il tempo necessario a perc rere l'arco.

Noi ci proponiamo di studiare i principali metodi di calcolo appartenenti alla 1ª che alla 2ª categoria.

2 – Metodo Siacci.

a) Generalità.

Il metodo di calcolo per archi ideato da Siacci è una diretta applicazio delle formule del tiro trovate nella integrazione Siacci; quindi esso richiede l'i piego della tavola balistica generale.

L'impiego delle formule ora dette esige la conoscenza del β: occorre quin spezzare la traiettoria in archi tali che il valore di β, che si può calcolare, sia p quanto, possibile esatto.

Qualora si considerassero archi di traiettoria molto piccoli, il β varierєb assai poco quindi si potrebbe ritenere uguale al valore del β all'origine che, com noto, vale $\frac{1}{\cos\varphi}$; da ciò ne deriva come conseguenza che del Metodo Siacci con dereremo due casi.

b) Metodo per archi brevi.

In questa ipotesi si tratta di risolvere il problema.

« Dati $\frac{C}{i}$, δ, V, φ, determinare le coordinate x, y, la velocità v, il tempo nel punto in cui l'inclinazione è θ ».

Noi abbiamo già visto come si risolve questo problema, infatti, se è noto si calcola $C' = \frac{C}{\delta i \beta}$ indi dalla

$$tg\,\theta = tg\,\varphi - \frac{C'}{2\cos^2\varphi}\left[J(u) - J(V)\right]$$

si ricava

$$J(u) = J(V) + \frac{2\cos^2\varphi}{C'}(tg\,\varphi - tg\,\theta)$$

noto $J(u)$ saranno noti $A(u)$, $D(u)$, $T(u)$, u e quindi

$$\begin{cases} v = \dfrac{u\cos\varphi}{\cos\theta} \\ x = C'[D(u) - D(V)] \\ y = x\,tg\,\varphi - \dfrac{C'x}{2\cos^2\varphi}\left[\dfrac{A(u) - A(V)}{D(u) - D(V)} - J(V)\right] \\ t = \dfrac{C'}{\cos\varphi}[T(u) - T(V)] \end{cases}$$

Per β, come s'è detto, si prende $\frac{1}{\cos\varphi}$ e volendo una approssimazione maggiore

$$\beta = \frac{\delta_y}{\delta_o}\frac{K(V)}{K(u)}\frac{1}{\cos\theta}$$

Considerando $\frac{K(V)}{K(u)} = 1$ e prendendo invece di θ il valore $\frac{\varphi + \theta}{2}$ sarà:

$$\beta = \frac{\delta_{ym}}{\delta_o}\sec\frac{(\varphi + \theta)}{2}$$

in cui δ_o è la densità all'origine e δ_{ym} è la densità corrispondente all'ordinata media dell'arco che non si conosce e che sarà un valore ricavato in funzione di una y_m dedotta con le formule del vuoto cioè

$$y_m = \frac{V^2\cos^2\varphi}{4g}(tg^2\,\varphi - tg^2\,\theta)$$

Noti così gli elementi del punto P_θ si assumeranno i dati trovati come dati iniziali ove si porrà $\theta = \varphi$; $v = V$ si ricaverà δ corrispondente alla nuova quota dell'origine e si proseguirà nel calcolo fino a giungere oltre il punto di caduta.

Questo metodo, com'è stato detto, richiede che la traiettoria sia spezzata in archi di ampiezza assai piccola e ciò perchè il valore di β assunto non sia troppo diverso dal valore reale dell'arco considerato.

c) Applicazione.

Dati: $\varphi = 24°$; $V = 434$ m/s; $\frac{C}{i} = 6{,}053$; $\lg\frac{C}{i} = 0{,}78195$; $\delta = 1$; $\theta = 23°$.

Trovare x, y, v e t.

Assumiamo

$$\beta = \frac{1}{\cos\varphi}$$

Calcolo di C'

$\lg \frac{C}{i}$	$= 0.78195$
$\operatorname{colg} \delta \beta$	$= \bar{1},96073$
$\lg C'$	$= 0,74268$
$J(u) - J(V)$	$= 0,00627$
$J(V)$	$= 0,25024$
$J(u)$	$= 0,25651$
$D(u)$	$= 5397,6$
$D(V)$	$= 5338,7$
$D(u) - D(V)$	$= 58,9$
$\lg u$	$= 2,62900$
$\lg \cos \varphi$	$= \bar{1},96073$
$\operatorname{colg} \cos \theta$	$= 0,03597$
$\lg v$	$= 2,62570$
v	$= 442,4$
$\lg C'$	$= 0,74268$
$\operatorname{colg} \cos \varphi$	$= 0,03927$
$\lg [T(u) - T(V)]$	$= \bar{1},13672$
$\lg t$	$= \bar{1},91867$
t	$= 0''\,829$
$tg\, \varphi$	$= 0,44523$
$tg\, \theta$	$= 0,42447$
$tg\, \varphi - tg\, \theta$	$= 0,02076$
$A(u)$	$= 745,932$
$A(V)$	$= 731,009$
$A(u) - A(V)$	$= 14,923$
u	$= 425,6$
$\lg [D(u) - D(V)]$	$= 1,77012$
$\lg C'$	$= 0,74268$
$\lg x$	$= 2,51280$
x	$= 325,7$

$\lg 2$	$= 0,30103$
$\lg \cos^2 \varphi$	$= \bar{1},92146$
$\lg (tg\, \varphi - tg\, \theta)$	$= \bar{2},31723$
$\operatorname{colg} C'$	$= \bar{1},25732$
$\lg J(u) - J(V)$	$= \bar{3},79704$
$T(u)$	$= 6,543$
$T(V)$	$= 6,406$
$T(u) - T(V)$	$= 0,137$
$\lg [A(u) - A(V)]$	$= 1,17386$
$\operatorname{colg} [D(u) - D(V)]$	$= 2,22988$
$\lg \frac{A(u) - A(V)}{D(u) - D(V)}$	$= \bar{1},40374$
$\frac{A(u) - A(V)}{D(u) - D(V)}$	$= 0,25336$
$J(V)$	$= 0,25024$
$\frac{\operatorname{sen} 2\varphi}{C'}$	$= 0,13440$
$J(V) + \frac{\operatorname{sen} 2\varphi}{C'}$	$= 0,38464$
$J(V) + \frac{\operatorname{sen} 2\varphi}{C'} - \frac{A(u) - A(V)}{D(u) - D(V)}$	$= 0,13128$
lg [id.]	$= \bar{1},11820$
$\lg C'$	$= 0,74268$
$\operatorname{colg} 2$	$= \bar{1},69897$
$\operatorname{colg} \cos^2 \varphi$	$= 0,07854$
lg	$= \bar{1},63839$
$\lg x$	$= 2,51280$
$\lg y$	$= 2,15119$
y	$= 141,6$

d) VALORE MEDIO DI β PER LA RESISTENZA ENNESIMA.

Seguendo il metodo esposto, occorre spezzare la traiettoria in numero molto grande di archi e quindi il lavoro risulta poco agevole. Si può dividere la traiettoria in archi di maggiore ampiezza se lungo ciascuno di essi la funzione $F(v)$ si può ritenere proporzionale ad una potenza intera della velocità.

Allorchè si parlò della funzione $F(v)$ si disse che vani erano riusciti gli sforzi di rappresentare la funzione resistente con una espressione monomia della velocità $[F(v) = \lambda v^n]$ con n e λ interi e costanti.

Infatti si vede che la n varierà da 2 a 5,9 e ad 1. Però la traiettoria può essere spezzata in archi in modo tale che la n resti costante per tutto l'arco.

In tal caso l'equazione della odografa:

$$gd(v\cos\theta) = v\frac{\delta_y i}{C}F(v)\,d\theta$$

ponendo

$$v\cos\theta = u\cos\varphi; \qquad F(v) = \lambda v^n$$

diventa

$$gdu\cdot\cos\varphi = \frac{u\cos\varphi}{\cos\theta}\,\frac{\delta_y i}{C}\,\lambda\left(\frac{u\cos\varphi}{\cos\theta}\right)^n d\theta$$

cioè

$$\frac{\delta_y}{\delta_o}\,\frac{d\theta}{\cos^{n+1}\theta} = \frac{Cg}{\delta_o i\lambda\cos^n\varphi}\,\frac{du}{u^{n+1}}$$

Ponendo invece la notazione di Siacci cioè

$$\delta_y F(v) = \delta_o\beta F(u)\frac{\cos^2\varphi}{\cos\theta}$$

si ha

$$gdu\cdot\cos\varphi = \frac{u\cos\varphi}{\cos\theta}\,\frac{\delta_o i}{C}\,\beta F(u)\frac{\cos^2\varphi}{\cos\theta}\,d\theta$$

cioè

$$gd\,u = \frac{\delta_o i}{C}\cos^2\varphi\,\beta\lambda u^{n+1}\frac{d\theta}{\cos^2\theta}$$

e quindi

$$\frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \frac{Cg}{\delta_o i\lambda\cos^2\varphi}\,\frac{du}{\beta u^{n+1}}$$

Integrando ora le equazioni trovate si ha ponendo per δ_y il valore medio entro i limiti d'integrazione e per β il valore β_θ

$$\frac{\delta_m}{\delta_o}\int_\varphi^\theta\frac{d\theta}{\cos^{n+1}\theta} = \frac{Cg}{\delta_o i\lambda\cos^n\varphi}\int_V^u\frac{du}{u^{n+1}}$$

$$\int_\varphi^\theta\frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \frac{Cg}{\delta_o i\lambda\cos^2\varphi}\,\frac{1}{\beta\theta}\int_V^u\frac{du}{u^{n+1}}$$

dividendo membro a membro

$$\frac{\delta_m}{\delta_o}\,\frac{\displaystyle\int_\varphi^\theta\frac{d\theta}{\cos^{n+1}\theta}}{tg\,\theta - tg\,\varphi} = \frac{1}{\cos^{n-2}\varphi}\,\beta\theta$$

Ma abbiamo visto che

$$\int_0^\theta \frac{d\theta}{\cos^{n+1}\theta} = \xi_n(\theta)$$

quindi

$$\beta_\theta = \frac{\delta_m}{\delta_0} \frac{\xi_n(\varphi) - \xi_n(\theta)}{tg\,\varphi - tg\,\theta} \cos^{n-1}\varphi$$

formula che ci dà il valore di β_θ e quindi sarà:

$$C' = \frac{C}{\delta_m i} \frac{1}{\cos^{n-2}\varphi} \frac{tg\,\varphi - tg\,\theta}{\xi_n(\varphi) - \xi_n(\theta)}$$

La tav. XVIII contiene i valori di $\xi_n(\theta)$, si nota che per

$$n = 1;$$

$$\xi_1(\theta) = tg\,\theta$$

poichè

$$\xi(-\theta) = -\xi(\theta)$$

la tavola serve anche nel caso di angoli negativi (basta cambiare il segno).

Abbiamo così modo di calcolare il valore di β_θ però in esso vi compare la δ_m che non è nota e che bisogna calcolare con varie approssimazioni.

e) Valore di δ_m.

Per determinare δ_m varrà conoscere y_m. Per fare ciò sostituiremo all'arco di traiettoria un arco di parabola ad asse verticale tale che l'inclinazione iniziale e finale dei due archi siano uguali ed abbiano la stessa ordinata estrema

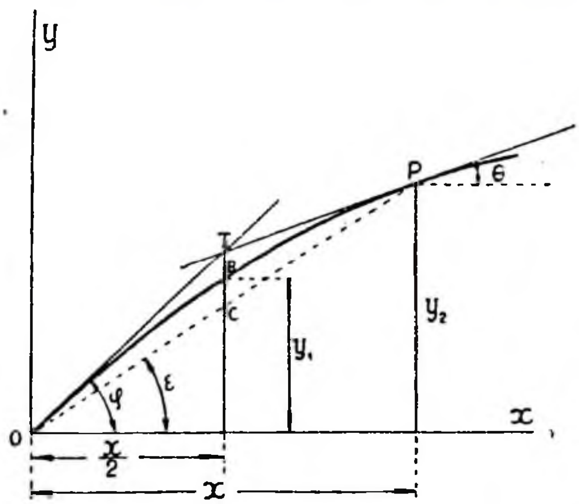


Fig. 71.

$$y = \frac{x}{2}(tg\,\varphi + tg\,\theta)$$

L'ordinata media si avrà dalla formula di Simpson che dà

$$y_m = \frac{1}{6}(y_0 + 4\,y_1 + y_2)$$

ed essendo $y_0 = 0$

$$y_m = \frac{1}{6}(4\,y_1 + y_2)$$

essendo y_1 ed y_2 le ordinate corrispondenti ai punti $\frac{x}{2}$ ed x dell'arco.

Ora: (fig. 71)

$$y_1 = \frac{x}{4} (tg\,\varphi + tg\,\varepsilon) \qquad y_2 = x\,tg\,\varepsilon$$

e quindi:

$$4\,y_1 + y_2 = x\,(tg\,\varphi + 2\,tg\,\varepsilon)$$

e poichè:

$$2\,tg\,\varepsilon = tg\,\varphi + tg\,\theta$$

sarà:

$$y_m = \frac{1}{6}(4\,y_1 + y_2) = \frac{x}{6}(2\,tg\,\varphi + tg\,\theta)$$

nella quale φ e θ sono date e per x si porrà il valore calcolato in 1ª approssimazione con la formula

$$x = C'\,[\,D\,(u) - D\,(V)\,]$$

ove

$$C' = \frac{C}{8\,i\,\sec\varphi}$$

$D\ (u)$ si calcola con $J\ (u)$ ricavato nel modo indicato.

Ottenuto il valore di β_θ definitivo si procede nel calcolo com'è stato detto precedentemente.

Occorre ora vedere come deve essere spezzata la traiettoria in archi in modo che n sia mantenuto costante.

Abbiamo visto che dalla

$$F\,(v) = \lambda\,v^n$$

si deduce

$$n = \frac{v\,F'\,(v)}{F\,(v)}$$

e quindi n è calcolabile.

Calcolando i valori di n per le velocità corrispondenti ai punti di separazione dei valori di n tra unità e unità, si trova:

$1 < n < 1{,}5$	per	$v > 787$	
$1{,}5 < n < 2{,}5$	»	$787 > v > 423$	e per $258 > v$
$2{,}5 < n < 3{,}5$	»	$423 > v > 362$	» $277 > v > 258$
$3{,}5 < n < 4{,}5$	»	$362 > v > 335$	» $286 > v > 277$
$4{,}5 < n < 5{,}5$	»	$335 > v > 315$	» $293 > v > 286$
$5{,}5 < n < 5{,}9$	»	$315 > v > 293$	

Occorrerebbe quindi, per fissare il valore di n da attribuire ad un arco, far cadere i punti di divisione degli archi là dove la velocità è prossima a

87; 423; 362; 335; 315; 293; 286; 277; 258.

Ora ciò è alquanto difficile, per non dire impossibile.

Il Cavalli consigliava di procedere per tentativi e cioè scelto il valore della velocità si cercava per tentativi il corrispondente valore di θ, con le due relazioni

$$J(u) = J(V) + \frac{2\cos^2\varphi}{C'}(tg\,\varphi - tg\,\theta)$$

$$v = \frac{u\cos\varphi}{\cos\theta}$$

in cui C' è quello di 1ª approssimazione ed il resto è noto, meno $J(u)$ che s deduce.

Questo metodo richiedeva vari tentativi, allo scopo di trovare due valor della velocità che comprendessero il valore prefissato e venne chiamato metod delle forcelle.

Però tale metodo, oltre a riuscire lungo e non facile, presentava pochi vantaggi sul metodo che esporremo in seguito e che riesce molto più rapido.

Anzichè prefissare la velocità si fissa il valore di θ alla fine dell'arco e s procede nel calcolo degli elementi di 1ª approssimazione.

Ottenuto $D(u)$ di 1ª approssimazione si ricava u e quindi

$$v = \frac{u\cos\varphi}{\cos\theta}$$

avuto v si cerca il valore intero di n più prossimo a $\frac{v+V}{2}$ e si assume tal valore come grado della resistenza.

Poichè l'influenza di tale valore non è molto grande, non è necessario considerare i valori frazionari di n; al massimo si può, volendo, anche considerare valori di n 1,5, 2,5 ecc.

Il calcolo procede quindi com'è stato detto più sopra.

f) Riepilogo.

Riassumendo, il calcolo di un arco di traiettoria quando sono dati V, $\frac{C}{i}$, φ, θ procede come segue:

1) Calcoli preliminari

Calcolo di

$$C' = \frac{C}{\delta_m\, i \sec\frac{\varphi+\theta}{2}}$$

ove tutto è noto meno δ_m che si deduce in corrispondenza di

$$y_m = \frac{V^2 \cos^2 \varphi}{4g} (tg^2 \varphi - tg^2 \theta)$$

2) Calcolo del β definitivo

$$J(u) = J(V) + \frac{2 \cos^2 \varphi}{C'} (tg\, \varphi - tg\, \theta)$$

Avuto $J(u)$ si deduce $D(u)$ e quindi

$$y_m = C' \frac{D(u) - D(V)}{6} (2\, tg\, \varphi + tg\, \theta)$$

Da $D(u)$ si ricava u e quindi

$$v = \frac{u \cos \varphi}{\cos \theta} \text{ e da } \frac{v + V}{2} \text{ si ha } n.$$

Si calcola poi

$$C' = \frac{C}{\delta_m i} \frac{1}{\cos^{n-2} \varphi} \frac{tg\, \varphi - tg\, \theta}{\xi_n(\varphi) - \xi_n(\theta)}$$

3) Calcoli definitivi.

Formule:

$$J(u) = J(V) + \frac{2 \cos^2 \varphi}{C'} (tg\, \varphi - tg\, \theta); \quad v = \frac{u \cos \varphi}{\cos \theta}$$

$$x = C' [D(u) - D(V)]; \quad y = x\, tg\, \varphi - \frac{C' x}{2 \cos^2 \varphi} \left[\frac{A(u) - A(V)}{D(u) - D(V)} - J(V) \right]$$

$$t = \frac{C'}{\cos \varphi} [T(u) - T(V)]$$

g) Determinazione dei valori medi di β.

Calcolata per punti la traiettoria, mediante diagrammi è possibile ricavare tutti gli elementi del punto di caduta e cioè

$$X \quad \omega \quad T \quad u$$

Si può allora risolvere il 4° problema principale del tiro e determinare il valore di C' e quindi $\bar{\beta}$ relativo al punto di caduta.

Se con questo valore di $\bar{\beta}$ si ricavassero le quantità ω T u risolvendo i relativi problemi del tiro, si troverebbero delle differenze rispetto ai valori trovati

nel calcolo per archi le quali non sempre sono trascurabili. Volendo si possono calcolare i valori dei β secondari rivacando i vari C' degli elementi trovati nel calcolo per archi e cioè la quantità

$$\beta_\theta \quad \beta_x \quad \beta_t \quad \beta_y$$

occorrenti a risolvere esattamente i problemi del tiro.

h) Applicazione.

Cannone da 105 – Granata mod. 32.
Calcolo della traiettoria relativa ai seguenti dati iniziali

$V = 810;$ $\varphi = 40°;$ $lg \frac{C}{i} = 0{,}48323;$ $h_0 = 300;$ $\delta_0 = 1{,}000$

Formule:

Calcoli preliminari:

$$C'_{app.} = \frac{C \cos\varphi}{\delta_0 i}; \qquad J(u_1) = J(V) + \frac{2\cos^2\varphi}{C'_{app.}}(tg\,\varphi - tg\,\theta)$$

Dal valore di $J(u_1)$ si deduce u_1 e quindi

$$v_1 = \frac{u_1 \cos\varphi}{\cos\theta}$$

mediante V e v_1 verrà ricavato il valore di n (grado della resistenza).

$$x_1 = C'_{app.}[D(u_1) - D(V)]$$

Calcoli definitivi.

$$y_m = \frac{x_1}{6}(2\,tg\,\varphi + tg\,\theta)$$

$$C' = \frac{C}{i\,\delta_m} \frac{tg\,\varphi - tg\,\theta}{[\xi_n(\varphi) - \xi_n(\theta)]\cos^{n-2}\varphi}$$

$$J(u) = J(V) + \frac{2\cos^2\varphi}{C'}(tg\,\varphi - tg\,\theta)$$

$$v = \frac{u\cos\varphi}{\cos\theta}$$

$$x = C'[D(u) - D(V)]$$

$$y = x\,tg\,\varphi - \frac{C'x}{2\cos^2\varphi}\left[\frac{A(u) - A(V)}{D(u) - D(V)} - J(V)\right]$$

$$t = \frac{C'}{\cos\varphi}[T(u) - T(V)]$$

V	810	701
n	1	1
φ	40°	39°
θ	39°	38°
$h_o + y$	300	1132.4
δ_o	1.000	0.9138
$\log \frac{C}{i}$	0.48323	0.48323
colog δ_o	0.	0.03915
log cos φ	$\bar{1}.88425$	$\bar{1}.89050$
log $C'_{app.}$	0.36748	0.41288
$tg\,\varphi$	0.83910	0.80978
$tg\,\theta$	0.80978	0.78129
$tg\,\varphi - tg\,\theta$	0.02932	0.02849
log 2	0.30103	0.30103
log $\cos^2 \varphi$	$\bar{1}.76850$	$\bar{1}.78100$
log $(tg\,\varphi - tg\,\theta)$	$\bar{2}.46716$	$\bar{2}.45469$
colog $C'_{app.}$	$\bar{1}.63252$	$\bar{1}.58712$
$\log \frac{2\cos^2\varphi}{C'_{app.}} (tg\,\varphi - tg\,\theta)$	$\bar{2}.16921$	$\bar{2}.12384$
$\frac{2\cos^2\varphi}{C'_{app.}} (tg\,\varphi - tg\,\theta)$	0.01476	0.01330
$J(V)$	0.14082	0.15665
$J(u_1)$	0.15558	0.16995
$D(u_1)$	3908.98	4237.14
$D(V)$	3478.75	3936.09
$[D(u_1) - D(V)]$	430.23	301.05
log $[D(u_1) - D(V)]$	2.63370	2.47864
log $C'_{app.}$	0.36748	0.41288
log x_1	3.00118	2.89152
x_1	1002.7	779.96
$2\,tg\,\varphi$	1.67820	1.61956
$tg\,\theta$	0.80978	0.78129
$2\,tg\,\varphi - tg\,\theta$	2.48798	2.40085
log $(2\,tg\,\varphi - tg\,\theta)$	0.39585	0.38036
log x_1	3.00118	2.89152
colog 6	$\bar{1}.22185$	$\bar{1}.22185$
log y_m	2.61888	2.49373
y_m	415.8	311.7
y_m	415.8	311.7
$h_o + y$	300	1132.4
$h_o + y_m + y$	715.8	1444.1
δ_m	0.95542	0.88403

$\xi_n(\varphi)$	0.83910	0.80978
$\xi_n(\theta)$	0.80978	0.78129
$\xi_n(\varphi) - \xi_n(\theta)$	0.02932	0.02849
$\log \frac{C}{i}$	0.48323	0.48323
colog δ_m	0.01981	0.05353
log $(tg\,\varphi - tg\,\theta)$	2.46716	—
colog $[\xi_n(\varphi) - \xi_n(\theta)]$	1.53284	—
colog $\cos^{n-2} \varphi$	1.88425	1.89050
log C' definitivo	0.38729	0.42726
log $2\cos^2\varphi\,(tg\,\varphi - tg\,\theta)$	2.53669	2.53672
colg C'	1.61271	1.57274
$\log \frac{2\cos^2\varphi}{C'} (tg\,\varphi - tg\,\theta)$	2.14940	2.10946
$\frac{2\cos^2\varphi}{C'} (tg\,\varphi - tg\,\theta)$	0.01411	0.01287
$J(V)$	0.14082	0.15665
$J(u)$	0.15493	0.16952
$D(u)$	3892.31	4228.37
$D(V)$	3478.75	3936.09
$D(u) - D(V)$	413.57	292.28
$A(u)$	449.231	503.653
$A(V)$	388.203	456.051
$A(u) - A(V)$	61.028	47.602
$T(u)$	3.78123	4.2804
$T(V)$	3.23550	3.8435
$T(u) - T(V)$	0.54573	0.4369
log $[D(u) - D(V)]$	2.61654	2.24680
log C'	0.38729	0.42726
log x	3.00383	2.89306
x	1008,9	781.7
log $[A(u) - A(V)]$	1.78553	1.67762
colog $[D(u) - D(V)]$	$\bar{3}.38345$	$\bar{3}.53420$
$\log \frac{A(u) - A(V)}{D(u) - D(V)}$	$\bar{1}.16898$	$\bar{1}.21182$
Nro	0.14756	0.16286
$J(V)$	0.14082	0.15665
$\frac{A(u)-A(V)}{D(u)-D(V)} - J(V) = f$	0.00674	0.00621
log f	$\bar{3}.82866$	$\bar{3}.79309$
log C'	0.38729	0.42726
log x	3.00383	2.89306
colog $2\cos^2\varphi$	$\bar{1}.93047$	$\bar{1}.91797$
$\log \frac{C'\,x}{2\cos^2\varphi}\, f$	1.15025	1.03138

$\log x$	3.00383	2.89306	u	711.17	636.36
$\log tg\,\varphi$	$\bar{1}.92381$	$\bar{1}.90837$	$\log u$	2.85197	2.80369
$\log x\, tg\,\varphi$	2.92764	2.80143	$\log\cos\varphi$	$\bar{1}.88425$	$\bar{1}.89050$
$x\, tg\,\varphi$	846.52	633.04	$\mathrm{colog}\cos\theta$	0.10950	0.10347
$\frac{C'x}{2\cos^2\varphi}\,t$	14.13	10.75	$\log v$	2.84572	2.79766
y	832.39	622.29	v	701.2	627.67
$\log[T(u)-T(V)]$	$\bar{1}.73698$	$\bar{1}.64038$	x dell'arco	1009	781.7
$\log C'$	0.38729	0.42726	x	1009	1790.7
$\mathrm{colog}\cos\varphi$	0.11575	0.10950	y dell'arco	832.39	622.29
$\log t$	0.24002	0.17714	y	832.39	1454.68
t	1.738	1.504	t dell'arco	1.738	1.504
			t	1.738	3.242

2 *bis* – Metodo Siacci modificato dal Cavicchioli.

a) Descrizione del metodo.

Il Col. Cavicchioli ha apportato al metodo classico di Siacci alcune modifiche geniali atte a renderlo di impiego più comodo.

Il metodo si basa sulla determinazione iniziale di un β medio più approssimato di quello che ci può essere dato dalle formule di prima approssimazione, pur ritenendo ancora il β che compare nelle formule dei vari elementi, uguale per tutte le formule del tiro.

Al termine del calcolo dell'arco, i valori degli elementi finali ci daranno modo di determinare un β medio ancora più approssimato; studieremo allora il modo di effettuare le conseguenti correzioni direttamente sugli elementi finali di prima approssimazione, senza dover rifare tutti i calcoli, evitando così i penosi tentativi richiesti dai procedimenti ora in uso.

Sceglieremo come valore medio di β comune a tutte le formule del tiro, il β_θ che compare implicitamente nella formula della inclinazione e che indicheremo con β_m, appunto perchè lo riteniamo comune a tutte le formule.

Esso risulta definito da:

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \beta \frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \beta_m (tg\,\theta - tg\,\theta_0) = \beta_m \Delta\, tg\,\theta \qquad [1]$$

Da questa, sviluppando in serie il primo membro, si trae

$$\int_0^{\Delta\, tg\,\theta} \left[\beta_0 + \beta'_0 \Delta\, tg\,\theta + \beta''_0 \frac{(\Delta\, tg\,\theta)^2}{2!} + \dots \right] d\,\Delta\, tg\,\theta = \beta_m \Delta\, tg\,\theta \qquad [2]$$

ove β_0, β_0', β_0'' ..... sono rispettivamente i valori di β e delle derivate successive di β fatte rispetto a $tg\,\theta$, calcolate nell'origine dell'arco.

Eseguendo l'integrazione indicata nella formula [2] si ha:

$$\beta_0 \Delta\, tg\,\theta + \beta'_0 \frac{(\Delta\, tg\,\theta)^2}{2} + \beta''_0 \frac{(\Delta\, tg\,\theta)^3}{2\cdot 3} + \dots = \beta_m \Delta\, tg\,\theta \qquad [3]$$

da cui, arrestando lo sviluppo al terzo termine, e ponendo

$$\Delta \xi_1 (\theta) = - \Delta \, tg \, \theta = tg \, \theta_0 - tg \, \theta$$

$$\beta_m = \beta_0 - \beta'_0 \frac{\Delta \xi_1 (\theta)}{2} + \beta''_0 \frac{[\Delta \xi_1 (\theta)]^2}{6} \qquad [4]$$

Il parametro β, come è noto, è definito da

$$\beta = \frac{\delta_y}{\delta_0} \frac{F(v)}{F(u)} \frac{\cos \theta}{\cos^2 \theta_0} \qquad [5]$$

Derivando rispetto a $tg \, \theta$ e calcolando il valore della derivata nell'origine dell'arco, si ha

$$\beta' = \frac{d \beta}{d \, tg \, \theta} = \frac{d \beta}{d \theta} \frac{d \theta}{d \, tg \, \theta} \qquad [6]$$

Essendo per la [5]

$$\beta = \frac{\delta_y}{\delta_0} \frac{F(v)}{F(u)} \frac{\cos \theta}{\cos^2 \theta_0} \qquad [7]$$

ove per la formula del Bessel

$$\delta_y = \delta_0 \, e^{-\alpha y} \quad \text{con } \alpha = \text{costante}$$

si ha, derivando logaritmicamente :

$$\frac{d \beta}{d \theta} = \beta \frac{d}{d \theta} (- \alpha y + lg \, F(v) - lg \, F(u) + lg \cos \theta) \qquad [8]$$

Calcoliamoci separatamente le derivate del secondo membro della [8]:

$$\frac{d}{d \theta} (- \alpha y) = - \alpha \frac{d y}{d \theta} = \frac{\alpha v^2 \, tg \, \theta}{g}$$

essendo

$$g d y = - v^2 \, tg \, \theta \, d \theta$$

$$\frac{d}{d \theta} lg \, F(v) = \frac{F'(v)}{F(v)} \frac{dv}{d \theta} = \frac{v F'(v)}{F(v)} \left[tg \, \theta + \frac{f(v)}{g \cos \theta} \right] = n(v) \left[tg \, \theta + \frac{f(v)}{g \cos \theta} \right]$$

essendo

$$\frac{d v}{d \theta} = v \left[tg \, \theta + \frac{f(v)}{g \cos \theta} \right]$$

$$\frac{d}{d \theta} lg \, F(u) = \frac{F'(u)}{F(u)} \frac{du}{d \theta} = u \frac{F'(u)}{F(u)} \frac{f(v)}{g \cos \theta} = n(u) \frac{f(v)}{g \cos \theta}$$

come si può ricavare dall'equazione dell'odografa e della definizione di u

$$u \cos \theta_0 = v \cos \theta$$

$$\frac{d \, lg \cos \theta}{d \theta} = - \frac{\text{sen} \, \theta}{\cos \theta} = - tg \, \theta$$

Sostituendo nella [8] e tenendo conto della [6] si trae in definitiva:

$$\beta' = \beta \left\{ \frac{\alpha v^2 tg\,\theta}{g} + [n(v) - 1]\, tg\,\theta + [n(v) - n(u)] \frac{f(v)}{g \cos\theta} \right\} \cos^2\theta$$

Calcolando tale derivata nell'origine in cui

$$n(v_0) = n(u_0) \quad e \quad \theta = \theta_0$$

si ricava:

$$\beta'_0 = \beta_0 \left[\frac{\alpha v^2_0}{g} + n(v_0) - 1 \right] \operatorname{sen} \theta_0 \cos \theta_0 \qquad [9]$$

per cui sostituendo nella [4] e tenendo conto che

$$\beta_0 = \frac{1}{\cos\theta_0}$$

il valore di β_m diventa, ove si trascuri ancora in prima approssimazione il terzo termine dello sviluppo [4]

$$\beta_m = \beta_0 - \beta'_0 \frac{\Delta \xi_1(\theta)}{2} = \beta_0 - \frac{1}{2} \left[\frac{\alpha v^2_0}{g} + n(v_0) - 1 \right] \operatorname{sen} \theta_0 \,(tg\,\theta_0 - tg\,\theta) \qquad [10]$$

Posto in questa:

$$\frac{\alpha v^2_0}{g} + n(v_0) - 1 = N(v_0) \qquad [11]$$

la [10] diventa:

$$\beta_m = \beta_0 - \Delta\beta \qquad [12]$$

ove:

$$\Delta\beta = \frac{1}{2} N(v_0) \operatorname{sen} \theta_0 \, \Delta \xi_1(\theta) \qquad [13]$$

In quest'espressione tutto è noto, $N(v_0)$ è solo funzione di v_0 e pertanto si può calcolare volendo una tabella una volta per tutte.

Calcolato il β_m servendoci delle formule [12] e [13], abbiamo subito il valore di C' e mediante le formule generali di Siacci seguendo il procedimento già noto, tutti i valori v, x, y e t di prima approssimazione.

Per la seconda approssimazione, quella che ci consentirà di ottenere con tutta l'esattezza desiderabile gli elementi sopradetti, osserviamo che sviluppando in serie il β dall'origine alla estremità dell'arco, otteniamo per il valore di β_1 alla estremità:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \beta_0 + \beta'_0 \Delta\, tg\,\theta + \beta''_0 \frac{(\Delta\, tg\,\theta)^2}{2} + \cdots = \\ &= \beta_0 - \beta'_0 \Delta \xi_1(\theta) + \beta''_0 \frac{[\Delta \xi_1(\theta)]^2}{2} + \cdots \end{aligned} \qquad [14]$$

Da questa si ricava tenendo presenti la [10] e la [13]

$$\beta''_0 \frac{[\Delta \xi_1(\theta)]^2}{2} = \beta_1 - \beta_0 + 2\Delta\beta \qquad [15]$$

e pertanto il termine trascurato in prima approssimazione nello sviluppo [4] vale:

$$\Delta' \beta = \beta''_0 \frac{[\Delta \xi_1 (\theta)]^2}{6} = \frac{\beta_1 - \beta_0 + 2 \Delta \beta}{3} \qquad [16]$$

Il termine correttivo [16] nel quale compaiono tutte quantità note, in quanto il β_1 si può calcolare per mezzo della [5] e degli elementi relativi all'estremità dell'arco, aggiunto al valore di prima approssimazione, ci fornisce il valore definitivo del β medio e perciò potremmo ottenere con una seconda iterazione i valori definitivi di v, x, y e t.

Ma anzichè ripetere i calcoli, studieremo un procedimento più comodo, che permetterà di apportare le correzioni direttamente, lavorando sugli elementi di prima approssimazione.

Notiamo infatti, che differenziando logaritmicamente il valore di

$$C' = \frac{C}{\delta_0 \, i \, \beta}$$

e ritenendo di potere, per piccole variazioni, sostituire i differenziali con le differenze finite, si ottiene per una variazione di β (qualora nell'espressione di C' rimangano costanti tutte le altre quantità) una variazione di C'

$$\frac{\Delta C'}{C'} = - \frac{\Delta \beta}{\beta} \qquad [17]$$

e quindi

$$\Delta \lg C' = - \Delta \lg \beta \qquad [18]$$

essendo per una nota formula di analisi

$$d \lg f(x) = \frac{d f(x)}{f(x)}$$

La [18] ci fa conoscere la differenza logaritmica di C', nota quella di β, per cui i calcoli risulteranno, come vedremo, molto semplificati.

Infatti, il problema a questo punto si riduce a calcolare le variazioni di v, x, y e t dovute ad una data variazione del coefficiente balistico ridotto C'.

Potremmo, quindi, seguire la trattazione classica delle variazioni data in forma completa dal generale Cavalli, ma notiamo subito che quel procedimento non è conveniente perchè le formule relative sono molto complesse e pertanto la loro applicazione non risulterebbe pratica e non presenterebbe alcun vantaggio sul procedimento, che abbiamo scartato, di ripetere il calcolo da capo.

Osserviamo che la variazione Δv di v per una variazione $\Delta C'$ di C', ove non si tenga conto della ripercussione dovuta alla variazione della x, (rappresentata nel caso nostro dalla differenza fra i valori della x di prima e di seconda approssimazione e che possiamo ritenere trascurabile), è data dalla formula

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{x}{C'} K(u) \frac{\Delta C'}{C'} \qquad [19]$$

Per cui, passando alle differenze logaritmiche si ha:

$$\delta\, lg\, v = \frac{x}{C'} K(u)\, \delta\, lg\, C' = -\frac{x}{C'} K(u)\, \delta\, lg\, \beta \qquad [20]$$

La [20] ci rappresenta quindi il termine correttivo da aggiungere al $lg\ v$ per avere il $lg\ v$ definitivo ed è facilmente calcolabile, partendo da quantità note.

Per le correzioni sugli elementi x, y e t di prima approssimazione, osserviamo che, ove nell'intorno del punto generico P si ritenga la resistenza lineare, partendo dalle note formule

$$x = \frac{u_0 u}{g} (tg\, \theta_0 - tg\, \theta); \qquad y = \frac{x}{2} (tg\, \theta_0 + tg\, \theta);$$

$$t = \frac{\sqrt{u_0 u}}{g} (tg\, \theta_0 - tg\, \theta) \qquad [21]$$

(ove $u = v \cos\theta$), possiamo calcolare le variazioni di x, y e t dovute ad una data variazione di v, qualora rimangano costanti tutte le altre quantità che compaiono nei secondi membri delle [21].

Si ha infatti colle solite ipotesi:

$$\left.\begin{aligned} \delta\, lg\, x &= \delta\, lg\, u = \delta\, lg\, v = \Gamma \\ \delta\, lg\, y &= \delta\, lg\, x = \delta\, lg\, v = \Gamma \\ \delta\, lg\, t &= \frac{1}{2}\, \delta\, lg\, u = \frac{1}{2}\, \delta\, lg\, v = \frac{1}{2}\, \Gamma \end{aligned}\right\} \qquad [22]$$

Abbiamo così ricavato molto semplicemente le correzioni da apportare ai logaritmi degli elementi di prima approssimazione per avere i logaritmi e quindi gli elementi definitivi.

Dette relazioni, pur essendo soltanto approssimate, perchè ricavate nella ipotesi che nell'intorno del punto che si considera la resistenza sia lineare, ipotesi del resto largamente ammissibile trattandosi di variazioni molto piccole, forniscono valori assai esatti dalle correzioni come vedremo nelle applicazioni pratiche.

b) Errori massimi temibili.

Si noti che gli errori da temere negli elementi definitivi sono essenzialmente quelli dovuti al fatto di aver trascurato nello sviluppo [4] del β_m i termini successivi al terzo.

Se facciamo l'ipotesi, assai attendibile, che i termini trascurati siano inferiori alla metà dell'ultimo termine di cui si è tenuto conto, gli errori residui massimi sono espressi:

sul logaritmo di v da
» » » x » $\frac{1}{2}\, \delta\, lg\, v$
» » » y »
» » » t » $\frac{1}{4}\, \delta\, lg\, v$ [23]

Passiamo ora agli errori massimi percentuali.

Se con ε indichiamo un elemento generico, si ha:

$$\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon} = \delta\, lg_e\, \varepsilon = \frac{1}{M}\, \delta\, lg_{10}\, \varepsilon \qquad [24]$$

ove $M = 0{,}43429$ è il modulo del sistema dei logaritmi decimali, per cui

$$\Delta\,\varepsilon\,\% = \frac{100\,\Delta\,\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{100}{M}\,\delta\, lg_{10}\,\varepsilon = 2\,K\,\delta\, lg_{10}\,\varepsilon \qquad [25]$$

con k costante ($lg\ k = 2{,}06119$).

Pertanto possiamo ritenere gli errori massimi percentuali dati dalle seguenti espressioni:

$$\left.\begin{aligned} \Delta\,v\,\% = \Delta\,x\,\% = \Delta\,y\,\% = K\,\delta\, lg\, v = K\,\Gamma \\ \Delta\,t\,\% = \frac{K}{2}\,\delta\, lg\, v = \frac{K}{2}\,\Gamma \end{aligned}\right\} \qquad [26]$$

Il sistema di calcolo è così completo, in quanto:

consente una prima determinazione dei valori di v, x, y e t senza tentativi di sorta. Facciamo notare che il pratico impiego ha dimostrato che i risultati così ottenuti sono in genere già molto approssimati, e che talvolta non si rende neppure indispensabile la successiva correzione;

consente di effettuare una seconda approssimazione senza ripetere i calcoli, ma correggendo molto rapidamente, mediante una semplice somma, tutti i logaritmi dei vari elementi;

consente, infine, con una semplice moltiplicazione mediante le [26] di ottenere gli errori massimi discrezionali che con pratica certezza non verranno superati e permette quindi di commisurare l'ampiezza dell'arco agli errori massimi che non si vogliono superare nel calcolo dell'intera traiettoria.

c) Osservazioni.

Il sistema esposto è di impiego assai rapido. Si osserva che, comunque, è possibile introdurre ancora una notevolissima semplificazione che consente un'economia di tempo molto sensibile con risultati praticamente eguali.

Infatti, una volta determinata la v con il procedimento indicato, consigliamo di abbandonare per il calcolo dei rimanenti elementi le formule del tiro e di ricorrere, molto più semplicemente, (evitando così la lettura delle funzioni balistiche $D\ (u)$, $A\ (u)$, $T\ (u)$ e le conseguenti interpolazioni, nonchè la determinazione della y mediante una formula che poco si presta al calcolo logaritmico) alle note relazioni:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{v_0 \cos\theta_0 \cos\theta}{g}\,(tg\,\theta_0 - tg\,\theta) \\ y &= \frac{x}{2}\,(tg\,\theta_0 - tg\,\theta) \\ t &= \frac{x}{\sqrt{v_0 \cos\theta_0\, v \cos\theta}} \end{aligned}\right\} \qquad [27]$$

I risultati che si ottengono sono molto soddisfacenti, tanto più quando si consideri che nel calcolo per archi è necessario eliminare gli errori dell'elemento dinamico che entra in gioco, la velocità, perchè gli errori nella v, oltre a produrre errori sugli elementi x, y, t dell'arco, si ripercuotono sensibilmente sugli archi successivi.

Con la semplificazione accennata, mentre non rinunciamo affatto a determinare la v con tutta la possibile esattezza, sacrifichiamo un poco l'esattezza alla semplicità nel calcolo dei rimanenti elementi.

Notiamo che una volta calcolati gli elementi di prima approssimazione ed il termine correttivo $\delta \lg v$ non rimane, per avere gli elementi definitivi, che sommare detto termine correttivo ai logaritmi di v, x ed y e la metà di detto termine a quello di t come risulta evidente dall'esame delle [27] e da quanto si è detto in precedenza.

Notiamo ancora che, a correzione apportata, abbiamo esattamente i valori di uno qualunque degli elementi richiesti nell'ipotesi che effettivamente sussistano le relazioni [27]; ma noi sappiamo che tali relazioni sono valide soltanto pel caso della resistenza lineare.

Occorre perciò ricavare un'espressione che ci permetta di valutare l'errore commesso. Ricordiamo che la prima delle formule [27] può ricavarsi dalla equazione:

$$g\,d\,x = -\,v^2\,d\,\theta = -\,u^2\,d\,tg\,\theta \qquad [28]$$

e per integrazione:

$$x = \frac{u_m^2}{g}\,(tg\,\theta_0 - tg\,\theta) \qquad [29]$$

ove u_m è un valore intermedio fra quelli che la velocità orizzontale assume entro i limiti di integrazione. Se accettiamo come valore di u_m, incognito, la media geometrica delle velocità all'origine e dall'estremità dell'arco, cioè la $\sqrt{u_0\,u}$, abbiamo la prima delle [27].

Analogamente per gli altri elementi.

Così procedendo abbiamo sostituito ad un integrale del tipo:

$$\int_{x_0}^{x_1} f^2\,(x)\,d\,x \qquad [30]$$

l'espressione

$$f\,(x_0)\,f\,(x_1)\,(x_1 - x_0) \qquad [31]$$

Si tratta quindi di valutare la differenza:

$$\varphi\,(x) = \int_{x_0}^{x_1} f^2\,(x)\,d\,x - f\,(x_0)\,f\,(x_1)\,(x_1 - x_0) \qquad [32]$$

Sviluppando in serie la $\varphi\,(x)$ con la formula di Taylor e considerando in linea approssimata la differenza $(x_1 - x_0)$ come un infinitesimo del 1° ordine, il che equivale a confondere i differenziali con le differenze finite, potremmo vedere che $\varphi\,(x)$ risulta un infinitesimo di 3° ordine, la cui parte principale è data dall'espressione:

$$\frac{(x_1 - x_0)^3}{6}\,[\,2\,f'^2\,(x_0) - f''\,(x_0)\,f\,(x_0)\,] \qquad [33]$$

Senza stare a svolgere tutto il procedimento, che del resto si può trovare nel volume « Les méthodes actuelles de la Balistique Extérieure » del Dufrenois, Parigi, 1921, pagg. 62-65, diremo che si giunge all'espressione:

$$R_x = -\frac{1}{6g}(tg\,\theta_0 - tg\,\theta)^3\, u_0^2 \cos^2\theta_0 \frac{c}{g}\, m\,(v_0)\left[\frac{c}{g}\,F\,(v_0) + \text{sen}\,\theta_0\right] \qquad [34]$$

ove abbiamo indicato con R_x il secondo termine correttivo da aggiungere al valore della x ottenuta al termine del nostro calcolo per avere la x esatta.

Nella formula [30] abbiamo posto

$$\left.\begin{aligned} u_0 &= v_0 \cos\theta_0 \\ c &= \frac{\delta_0\, i}{C} \\ m\,(v) &= v_0 F'\,(v_0) - F\,(v_0) \end{aligned}\right\} \qquad [35]$$

$m\,(v_0)$ risulta funzione soltanto di v_0 ed è data dalla tabella II.

Espressioni analoghe alla R_x potremmo scrivere per i termini R_y ed R_t, ma notiamo che per la R_y si avrebbe una formula ancora più complessa e quindi poco conveniente per i calcoli, mentre possiamo ritenere approssimativamente:

$$R_y = \frac{R_x}{2}(tg\,\theta_0 + tg\,\theta) \qquad [36]$$

e che per il tempo, trattandosi di un elemento secondario, possiamo accontentarci dei risultati forniti dall'ultima delle [27] corretta naturalmente per la velocità.

La formula [34] appare in definitiva assai complicata, per quanto in realtà il calcolo ne sia abbastanza rapido, poichè in essa entrano per la maggior parte quantità di cui già conosciamo i logaritmi, ad eccezione della $m\,(v)$ che però ricaviamo rapidamente da una tabella.

Il vantaggio derivante dall'impiego delle formule [27] potrebbe perciò apparire, a causa del tempo richiesto per il calcolo del termine aggiuntivo R_x, soltanto illusorio.

Ma così non è, perchè in pratica non occorrerà calcolare sistematicamente al termine di ciascun arco, il valore di R_x e tanto meno quelli di R_y e di R_t.

Basterà, nel corso di un calcolo, ricavare il termine [34] per il primo arco ed ogni qualvolta si è cambiata l' ampiezza dell'arco: quindi, in definitiva, nel calcolo di un'intera traiettoria si tratterà di pochissime determinazioni.

In altre parole, il termine R_x ci servirà non tanto per apportare sistematicamente le correzioni quanto per avere saltuariamente una nozione dell'errore commesso e, quindi, per trarne norma nell'adeguare l'ampiezza dell'arco all'esattezza che si vuole conseguire e per stabilire se possiamo proseguire nel calcolo con l'ampiezza d'arco prescelta oppure se dobbiamo restringerla.

È intanto evidente che la determinazione della x risulta affetta da due errori e cioè :

l'errore proveniente dalla incertezza nella determinazione della v, che possiamo chiamare errore balistico e che risulta dato per le [26] da:

$$\Delta\, x_1\, \% = K\,\Gamma \qquad [37]$$

l'errore proveniente dal fatto di avere sostituito nella [29] al valore u_m un valore approssimato dato da $\sqrt{u_0 u}$ e che possiamo chiamare errore geometrico.

Facendo la solita ipotesi che i termini trascurati nello sviluppo della $\varphi(x)$ siano inferiori alla metà dell'ultimo termine di cui si può tener conto, cioè inferiori ad $1/2\, R_x$, quest'ultimo errore risulta:

a) non apportando la correzione R_x

$$\Delta_{x_2\%} = 150 \frac{R_x}{x} \qquad [38]$$

b) apportando la correzione R_x

$$\Delta_{x_2\%} = 50 \frac{R_x}{x} \qquad [39]$$

Potendosi ritenere le due cause di errori indipendenti, l'errore massimo pratico sarà dato, per la composizione quadratica degli errori da:

$$(\Delta x\,\%)^2 = (\Delta x_1\,\%)^2 + (\Delta x_2\,\%)^2 \qquad [40]$$

ove Δ_{x_1} è dato dalla [37] e $\Delta_{x_2}\%$ dalla [38] o [39].

Abbiamo voluto riportare la trattazione sistematica dell'errore massimo, essenzialmente per indicare quale sarebbe la soluzione rigorosa del problema, ma, ripetiamo, in pratica basterà determinare una volta tanto il termine R_x e dalla entità di tale correzione, possiamo trarre senz'altro le conclusioni che ci interessano ai nostri fini pratici.

Concludendo, le formule da impiegare sono le seguenti:

α) *Primo metodo*

a) Calcoli di prima approssimazione

$$\left\{\begin{array}{l}
\beta_0 = \dfrac{1}{\cos\theta_0} \qquad \Delta\beta = \dfrac{1}{2} N(v_0)\,\mathrm{sen}\,\theta_0\,(tg\,\theta_0 - tg\,\theta) \\
\beta_{ma} = \beta_0 - \Delta\beta \qquad C'_a = \dfrac{C}{\delta_0\, i\, \beta_{ma}} \\
J(u_a) = J(v_0) + \dfrac{2\cos^2\theta_0}{C'_a}(tg\,\theta_0 - tg\,\theta) \qquad v_a = \dfrac{u_a\cos\theta_0}{\cos\theta} \\
x_a = C'_a\,[\,D(u_a) - D(v_0)\,] \\
y_a = \dfrac{C'_a\, x_a}{2\cos^2\theta_0}\left[\dfrac{\mathrm{sen}\,2\theta_0}{C'_a} + J(v_0) - \dfrac{A(u_a) - A(v_0)}{D(u_a) - D(v_0)}\right] \\
t_a = \dfrac{C'_a}{\cos\theta_0}\,[\,T(u_a) - T(v_0)\,]
\end{array}\right.$$

b) Calcoli di seconda approssimazione

$$\left\{\begin{array}{l}
\beta_1 = \dfrac{\delta_{ya}}{\delta_0}\,\dfrac{F(v_a)}{F(u_a)}\,\dfrac{\cos\theta}{\cos^2\theta_0} \\
\beta_m = \dfrac{2\,\beta_{ma} + \beta_1 + \Delta\beta}{3} \\
\delta\, lg\,\beta = lg\,\beta_m - \log\beta_{ma} \qquad \Gamma = \delta\, lg\, v = -\dfrac{x}{C'_a} K(u_a)\,\delta\, lg\,\beta
\end{array}\right.$$

Correggere i $lg\, v_a, lg\, y_a$, di: Γ

Correggere il $lg\, t_a$ di: $\frac{1}{2}\Gamma$

c) Errori massimi percentuali

$$\Delta v\,\% = \Delta x\,\% = \Delta y\,\% = K\Gamma$$

$$\Delta t\,\% = \frac{1}{2} K\Gamma \qquad lg\, K = 2{,}06119$$

β) *Secondo metodo*

a) Calcoli di prima approssimazione

$$\left\{\begin{aligned} \beta_0 &= \frac{1}{\cos\theta_0} & \Delta\beta &= \frac{1}{2} N(v_0)\,\text{sen}\,\theta_0\,(tg\,\theta_0 - tg\,\theta) \\ \beta_{ma} &= \beta_0 - \Delta\beta & C'_a &= \frac{C}{\delta_0\, i\, \beta_{ma}} \\ J(u_a) &= J(v_0) + \frac{2\cos^2\theta_0}{C'_a}(tg\,\theta_0 - tg\,\theta) & v_a &= \frac{u_a\cos\theta_0}{\cos\theta} \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} x_a &= \frac{v_0\cos\theta_0\, v_a\cos\theta}{g}(tg\,\theta_0 - tg\,\theta) \\ y_a &= \frac{x_a}{2}(tg\,\theta_0 + tg\,\theta) \\ t_a &= \frac{x_a}{\sqrt{v_0\cos\theta_0\, v_a\cos\theta}} \end{aligned}\right.$$

b) Calcoli di seconda approssimazione
Eguali a quelli del primo metodo.

c) Calcolo del termine R_x.

$$R_x = -\frac{1}{6g}(tg\,\theta_0 - tg\,\theta)^3\, u^2_0 \cos^2\theta_0 \frac{c}{g}\, m(v_0)\left[\frac{c}{g}F(v_0) + \text{sen}\,\theta_0\right]$$

d) Calcolo degli elementi X, Y, t, con formule di quadrature.

Facciamo osservare che dovendosi eseguire il calcolo sistematico di una traiettoria non è necessario determinare alla fine di ogni arco gli elementi x, y e t (specialmente x e t), in quanto detti elementi possono essere calcolati con una delle formule di quadratura, ad esempio quella di Cavalieri - Torricelli - Simpson, dopo un certo numero di archi od anche alla fine del calcolo.

Infatti, dalle equazioni del moto:

$$\left.\begin{aligned} dx &= -\frac{v^2}{g}\, d\theta \\ dy &= -\frac{v^2}{g}\, tg\,\theta\, d\theta \\ dt &= -\frac{v^2}{g\cos\theta}\, d\theta \end{aligned}\right\} \qquad [41]$$

ricordando la formula di Cavalieri - Torricelli - Simpson si ha immediatamente,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] \qquad [42]$$

qualora si conoscano le coppie corrispondenti dei valori di θ e di v nei tre punti di divisione di due archi aventi la stessa ampiezza $\Delta\theta = \theta - \theta_0$ (in valore assoluto):

$$\left.\begin{aligned} \Delta x &= x_2 - x_0 = \frac{\Delta\theta}{6}\left[\frac{v_0^2}{g} + 4\frac{v_1^2}{g} + \frac{v_2^2}{g}\right] \\ \Delta y &= y_2 - y_0 = \frac{\Delta\theta}{6}\left[\frac{v_0^2}{g} tg\,\theta_0 + 4\frac{v_1^2}{g} tg\,\theta_1 + \frac{v_2^2}{g} tg\,\theta_2\right] \\ \Delta t &= t_2 - t_0 = \frac{\Delta\theta}{6}\left[\frac{v_0}{g\cos\theta_0} + 4\frac{v_1}{g\cos\theta_1} + \frac{v_2}{g\cos\theta_2}\right] \end{aligned}\right\} \qquad [43]$$

ove con gli indici 0,1 e 2 abbiamo indicato rispettivamente gli elementi corrispondenti all'origine del primo arco, all'estremità del primo ed origine del secondo, all'estremità del secondo arco ed ove l'ampiezza comune $\Delta\theta$ dei due archi è espressa in radianti

$$\left(\Delta\,\theta^{rad} = \frac{\Delta\,\theta^{o}\,\pi}{180}\right)$$

Con questo sistema si può teoricamente conseguire qualunque grado di approssimazione prefissato, in quanto, una volta determinata la v con uno dei sistemi e con i criteri precedentemente indicati, è possibile stabilire una tabella di corrispondenza tra i valori di v e di θ, che potrà poi essere raffittita quanto si vuole, ad esempio con l'interpolazione quadratica o cubica (ciò che in genere non sarà però necessario).

Questo procedimento può essere convenientemente applicato:

con quei metodi che non richiedono, per il calcolo della correzione sulla v di prima approssimazione, la determinazione preventiva degli altri elementi (o di gran parte di essi);

con quei metodi che esigono per la determinazione degli elementi x, y e t formule complicate e calcoli penosi; a scopo di controllo.

Osserviamo però che con tutti i metodi occorrerà sempre conoscere la y al termine di ciascun arco per determinare la densità δ dell'arco successivo, ma in genere sarà sufficiente per la determinazione della densità servirsi di un valore di y approssimato se il calcolo è limitato a pochi archi; quindi, in un calcolo completo, occorrerà, dopo un certo numero di archi, mettere a posto il valore della y con le formule di quadratura, in modo da evitare il sommarsi degli errori.

Le quadrature della x e della t potranno invece essere effettuate, di massima, al termine dell'intero calcolo.

Sarà infine necessario con questo procedimento aver cura di suddividere la traiettoria in serie comprendenti un numero pari di archi della stessa ampiezza.

3 - Metodo Bianchi.

a) Generalità.

Il metodo che più si accosta al metodo Siacci è quello elaborato dal Bianchi.

L'autore in seguito a laboriosi studi è riuscito ad impostare un procedimento di calcolo che dovrebbe servire per il caso di forti velocità iniziali e forti angoli di proiezione.

Egli infatti afferma che quando si abbia da calcolare un arco nel quale la velocità iniziale e l'angolo di proiezione siano molto grandi, i limiti entro i quali varia il β sono eccessivi e si commette un sensibile errore assumendo un valore medio di β per tutto l'arco considerato.

Con il suo metodo l'A. afferma di poter evitare un simile inconveniente.

Egli considera un arco di traiettoria *OC* (figura 72) corrispondente ad una data velocità iniziale *V* e ad un dato angolo di proiezione φ la cui corda *OC* è inclinata sull'orizzonte di un angolo η.

Pone poi

$$\varphi - \eta = \psi \qquad \theta - \eta = \rho$$

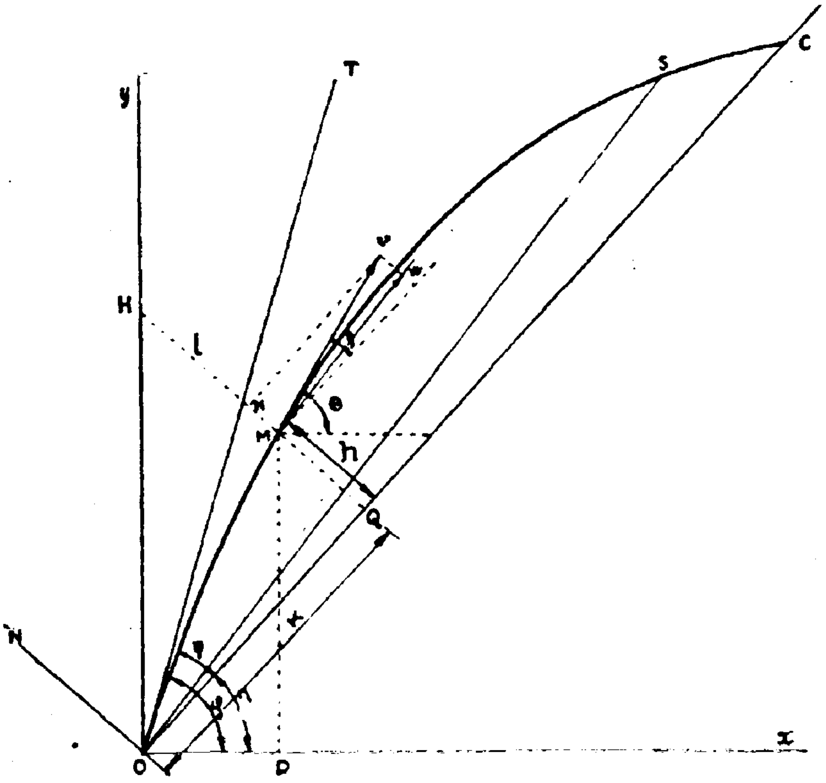


FIG. 72.

Essendo θ l'inclinazione in un punto qualunque *M* dell'arco, gli angoli ψ e ρ sono rispettivamente gli angoli che la tangente nell'origine θ e nel punto *M* fanno con la corda *OC*, ψ è costante; ρ è variabile e nell'origine vale ψ.

Consideriamo due assi ausiliari, la corda *OC* e la *ON* normale ad *OC* in O. Rispetto a questi due assi le coordinate di *M* sono

$$OQ = k \qquad \text{ed} \qquad MQ = h$$

Riferiamo il moto di *M* ai due assi ausiliari. Nel caso dell'asse *OC* sarà

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\,(v\cos\rho)}{dt} &= -\,g \operatorname{sen}\eta - f\,(v)\cos\rho \\ \frac{d\,(v\operatorname{sen}\rho)}{dt} &= -\,g\cos\eta - f\,(v)\operatorname{sen}\rho \end{aligned}\right\} \qquad [1]$$

Si conduca da *O* una corda arbitraria *OS* facente con la corda *OC* un angolo τ e si prenda come variabile ausiliaria una quantità w determinata da

$$w\cos\tau = v\cos\rho$$

cioè w è la componente della velocità parallela ad *OS* quando l'altra componente è perpendicolare ad *OC*.

Ponendo la nuova variabile nella prima delle [1], ricordando che

$$f(v) = \frac{\delta_y i}{C} F(v) \qquad \text{e} \qquad g\,dt = -\frac{v\,d\theta}{\cos\theta}$$

si ha

$$\frac{g d (w \cos\tau)}{-\frac{v\,d\theta}{\cos\theta}} = -g \operatorname{sen}\eta - \frac{\delta_y i}{C} F(v) \cos\rho$$

cioè

$$g d\, w \cos\tau = \left(g \operatorname{sen}\eta + \frac{\delta_y i}{C} F(v)\cos\rho\right) \frac{v\,d\theta}{\cos\theta}$$

$$g d\, w = \left(g \frac{\operatorname{sen}\eta}{\cos\tau} + \frac{\delta_y i}{C} F(v) \frac{\cos\rho}{\cos\tau}\right) \frac{v\,d\theta}{\cos\theta} =$$

$$= \left(g + \frac{\delta_y i}{C} F(v) \frac{\cos\rho}{\operatorname{sen}\eta}\right) \frac{\operatorname{sen}\eta}{\cos\tau} \frac{v\,d\theta}{\cos\theta}$$

e siccome

$$\frac{v}{\cos\tau} = \frac{w}{\cos\rho}$$

sostituendo si ottiene

$$g d\, w = \left(g + \frac{\delta_y i}{C} F(v) \frac{\cos\rho}{\operatorname{sen}\eta}\right) \frac{\operatorname{sen}\eta}{\cos\theta} \frac{w\,d\theta}{\cos\rho} \qquad [2]$$

e separando le variabili:

$$\frac{\operatorname{sen}\eta\, d\theta}{\cos\rho\cos\theta} = \frac{g d\, w}{w\left(g + \frac{\delta_y i}{C} F(v) \frac{\cos\rho}{\operatorname{sen}\eta}\right)} \qquad [$$

b) Integrazione.

Per integrare la [3] l'A. fa una posizione analoga a quella di Siacci, pone ci

$$\delta_y F(v) = \delta_o \gamma F(w) \frac{\cos\tau}{\cos\rho}$$

essendo γ una variabile che fa sussistere l'eguaglianza; sostituendo si ha

$$\frac{\operatorname{sen}\eta\, d\theta}{\cos\rho\cos\theta} = \frac{g d\, w}{w\left(g + \frac{\delta_y i\, \gamma}{C} F(w) \frac{\cos\rho}{\operatorname{sen}\eta} \frac{\cos\tau}{\cos\rho}\right)}$$

Integrando il 1° membro si ottiene poichè $\eta = \theta - \rho$

$$\frac{\operatorname{sen}(\theta - \rho)\, d\theta}{\cos\rho\cos\theta} = \frac{\operatorname{sen}\theta\cos\rho - \operatorname{sen}\rho\cos\theta}{\cos\rho} \frac{d\theta}{\cos\theta} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\theta\, d\theta}{\cos\theta} - \frac{\operatorname{sen}\rho}{\cos\rho} d\theta \qquad \text{ma } d\theta = d\rho$$

quindi l'integrale del 1° membro diventa:

$$-lg\cos\theta + lg\cos\rho = lg \frac{\cos\rho}{\cos\theta}$$

e integrando tra l'origine ed un punto generico:

$$lg\left(\frac{\cos\rho}{\cos\theta}\right)_\varphi^\theta = \int_{w_0}^{w} \frac{g\,d\,w}{w\left(g + \frac{\delta_0\, i\, \gamma}{C} \cdot F(w)\, \frac{\cos\tau}{\text{sen}\,\eta}\right)} \qquad [4]$$

Sostituendo a γ un valore γ_m medio entro i limiti d'integrazione e ponendo

$$C'' = \frac{C}{\delta_0\, i\, \gamma_m} \qquad B = \frac{C''\,\text{sen}\,\eta}{\cos\tau} \qquad [5]$$

si ha

$$lg\left(\frac{\cos\rho}{\cos\theta}\right)_\varphi^\theta = \int_{w_0}^{w} \frac{g\,d\,w}{w\left(g + \frac{F(w)}{B}\right)}$$

Sostituendo i limiti nell'integrale del 1° membro e notando che per $\theta = \varphi$ si ha $\rho = \psi$ perchè

$$\theta - \eta = \rho \qquad \varphi - \eta = \psi$$

si avrà

$$lg\,\frac{\frac{\cos\rho}{\cos\theta}}{\frac{\cos\psi}{\cos\varphi}} = lg\,\frac{\cos\rho\cos\varphi}{\cos\psi\cos\theta}$$

sostituendo nell'equazione trovata dopo d'aver invertiti i limiti nel 1° membro avremo

$$lg\,\frac{\cos\psi\cos\theta}{\cos\rho\cos\varphi} = \int_{w_0}^{w} \frac{-2\,g\,d\,w}{2\,w\left(g + \frac{F(w)}{B}\right)} = \frac{B}{2}\int_{w_0}^{w} \frac{-2\,g\,d\,w}{w\,(F(w) + B\,g)} = \qquad [6]$$

$$= \frac{B}{2}\,[I\,(w) - I\,(w_0)]$$

e passando dai logaritmi ai numeri:

$$\frac{\cos\theta}{\cos\rho} = \frac{\cos\varphi}{\cos\psi}\, e^{\frac{B}{2}[I\,(w) - I\,(w_0)]} = \frac{\cos\varphi}{\cos\psi}\,\frac{P\,(w)}{P\,(w_0)} \qquad [7]$$

e avendo posto

$$\left.\begin{aligned} I\,(w) &= \int \frac{-2\,g\,d\,w}{w\,[F\,(w) + B\,g]} \\ P\,(w) &= e^{\frac{B}{2}\,I\,(w)} \end{aligned}\right\} \qquad [8]$$

Dalla [7] essendo $\theta = \eta + \rho$ si ottiene:

$$\frac{\cos\theta}{\cos\rho} = \frac{\cos(\eta + \rho)}{\cos\rho} = \frac{\cos\eta\cos\rho - \text{sen}\,\eta\,\text{sen}\,\rho}{\cos\rho} = \cos\eta - \text{sen}\,\eta\, tg\,\rho =$$

$$= \frac{\cos\varphi}{\cos\psi}\,\frac{P\,(w)}{P\,(w_0)}$$

e quindi

$$tg\,\rho = \text{cotg}\,\eta - \frac{\cos\varphi}{\cos\psi\,\text{sen}\,\eta}\,\frac{P\,(w)}{P\,(w_0)} \qquad [9]$$

c) COORDINATE *k-h*.

Siano k e h le coordinate del punto M riferite agli assi OC ed ON; vediam come queste possono venire determinate.

Intanto si ha che:

$$\frac{dk}{dt} = v \cos \rho = w \cos \tau$$

ma

$$dt = \frac{-v\, d\theta}{g \cos \theta}$$

quindi

$$dk = -v^2 \cos \rho \frac{d\theta}{g \cos \theta}$$

$$v = \frac{w \cos \tau}{\cos \rho} \qquad \text{per cui}$$

$$dk = \frac{-w^2 \cos^2 \tau \cos \rho}{\cos^2 \rho} \frac{d\theta}{g \cos \theta} = -w^2 \cos^2 \tau \frac{d\theta}{g \cos \theta \cos \rho}$$

d'altra parte abbiamo visto che

$$\frac{d\theta}{g \cos \theta \cos \rho} = \frac{1}{\operatorname{sen} \eta} \frac{dw}{w\left(g + \frac{\delta_0 i \gamma}{C} F(w) \frac{\cos \tau}{\operatorname{sen} \eta}\right)};$$

quindi sostituendo avremo:

$$dk = \frac{-w^2 \cos^2 \tau}{\operatorname{sen} \eta} \frac{dw}{w\left(g + \frac{\delta_0 i \gamma}{C} F(w) \frac{\cos \tau}{\operatorname{sen} \eta}\right)} = \frac{\cos^2 \tau}{\operatorname{sen} \eta} \frac{-w\, dw}{g + \frac{\delta_0 i \gamma_m}{C} F(w) \frac{\cos \tau}{\operatorname{sen} \eta}}$$

Integrando e notando che

$$g + \frac{\delta_0 i \gamma_m}{C} F(w) \frac{\cos \tau}{\operatorname{sen} \eta} = g + \frac{F(w)}{B} = \frac{1}{B}\Big(Bg + F(w)\Big)$$

e ponendo

$$D(w) = \int \frac{-w\, dw}{F(w) + Bg} \qquad [10]$$

sarà

$$k = B \frac{\cos^2 \tau}{\operatorname{sen} \eta} [D(w) - D(w_0)] \qquad [11]$$

Per ricavare h notiamo che

$$dh = tg\, \rho\, dk$$

e poichè si è già visto che

$$tg\, \rho = \operatorname{cotg} \eta - \frac{\cos \varphi}{\cos \psi \operatorname{sen} \eta} \frac{P(w)}{P(w_0)}$$

sarà

$$dh = \text{cotg}\,\eta\, d\,k - B\,\frac{\cos\varphi}{\cos\psi\,\text{sen}\,\eta}\;\frac{\cos^2\tau}{\text{sen}\,\eta}\;\frac{P(w)}{P(w_0)}\;\frac{-\,w\,d\,w}{F(w)+g\,B}$$

Integrando e ponendo

$$L(w) = \int \frac{-\,P(w)\,w\,d\,w}{F(w)+g\,B} \qquad [12]$$

si ha

$$k\,\text{cotg}\,\eta - h = \frac{\cos\varphi}{\cos\psi}\;\frac{\cos^2\tau}{\text{sen}^2}\;\frac{B}{P\,w_0}\,[L(w) - L(w_0)] \qquad [13]$$

Tempo - Dalla

$$\frac{dk}{dt} = w\cos\tau$$

si deduce

$$dt = \frac{dk}{w\cos\tau}$$

e sostituendo a dk il valore precedentemente trovato si ricava:

$$dt = \frac{\cos^2\tau}{\text{sen}\,\eta\cdot w\cos\tau}\;\frac{-\,w\,dw}{\dfrac{F(w)+Bg}{B}} = \frac{\cos\tau}{\text{sen}\,\eta}\,B\,\frac{-\,dw}{F(w)+Bg}$$

integrando e ponendo

$$T(w) = \int \frac{-\,dw}{F(w)+Bg} \qquad [14]$$

si ha

$$t = B\,\frac{\cos\tau}{\text{sen}\,\eta}\,[T(w) - T(w_0)] \qquad [15]$$

d) Formule del tiro.

Le coordinate x ed y del punto M riferite agli assi ortogonali sono dati da (fig. 72)

$$x = OP = k\cos\eta - h\,\text{sen}\,\eta = (k\,\text{cotg}\,\eta - h)\,\text{sen}\,\eta$$

$$y = MP = k\,\text{sen}\,\eta + h\cos\eta = k\,\text{sen}\,\eta + (k\cos\eta - x)\,\frac{\cos\eta}{\text{sen}\,\eta} = \frac{k}{\text{sen}\,\eta} - x\,\text{cotg}\,\eta$$

Sostituendo le espressioni di k ed h e ponendo al posto di B la sua espressione in funzione di C'' cioè

$$B = \frac{C''\,\text{sen}\,\eta}{\cos\tau}$$

Si ha

$$tg\,\theta = \text{cotg}\,\eta - \frac{\cos\varphi}{\cos\psi\,\text{sen}\,\eta}\;\frac{P(w)}{P(w_0)} \qquad [16]$$

$$x = (k\,\text{cotg}\,\eta - h)\,\text{sen}\,\eta = \frac{\cos\varphi}{\cos\psi}\;\frac{\cos^2\tau}{\text{sen}^2\,\eta}\;\frac{B}{P(w_0)}\,[L(w) - L(w_0)]\,\text{sen}\,\eta =$$

$$= C''\,\frac{\text{sen}\,\eta}{\cos\tau}\;\frac{\cos\varphi}{\cos\psi}\;\frac{\cos^2\tau}{\text{sen}\,\eta}\;\frac{L(w) - L(w_0)}{P(w_0)} = C''\,\frac{\cos\varphi\cos\tau}{\cos\psi}\;\frac{L(w) - L(w_0)}{P(w_0)} \qquad [17]$$

$$y = \frac{k}{\operatorname{sen}\eta} - x \operatorname{cotg}\eta =$$

$$\frac{B\cos^2\tau}{\operatorname{sen}^2\eta}[D(w) - D(w_o)] - C'\frac{\cos\varphi\cos\tau}{\cos\psi}\frac{\cos\eta}{\operatorname{sen}\eta}\frac{L(w) - L(w_o)}{P(w_o)} =$$

$$C''\frac{\operatorname{sen}\eta}{\cos\tau}\frac{\cos^2\tau}{\operatorname{sen}^2\eta}[D(w) - D(w_o)] - C''\frac{\cos\varphi\cos\tau}{\cos\psi}\frac{\cos\eta}{\operatorname{sen}\eta}\frac{L(w) - L(w_o)}{P(w)} =$$

$$= C''\frac{\cos\tau}{\operatorname{sen}\eta}\left\{D(w) - D(w_o) - \frac{\cos\varphi\cos\eta}{\cos\psi}\frac{L(w) - L(w_o)}{P(w_o)}\right\}; \qquad [18]$$

$$t = B\frac{\cos\tau}{\operatorname{sen}\eta}[T(w) - T(w_o)] = C''\frac{\operatorname{sen}\eta}{\cos\tau}\frac{\cos\tau}{\operatorname{sen}\eta}[T(w) - T(w_o)]$$

$$t = C''[T(w) - T(w_o)] \qquad [19]$$

$$v = \frac{w\cos\tau}{\cos\rho} \qquad C'' = \frac{C}{\delta_o\, i\, \gamma_m}$$

Tutte le funzioni D, L, P, T, dipendono anche dal parametro B quindi devono essere date da tavole a doppia entrata.

Il parametro B dipende oltre che dal proietto anche da γ_m e dagli angoli η e τ; se η è negativo anche B è negativo e l'autore consiglia di designare queste funzioni per $B < 0$ con $\bar{D}(w)$; $\bar{P}(w)$ ecc.

C'' è il coefficente balistico ridotto.

Queste formule si riducono alle formule Siacci quando

$$\eta = 0 \qquad \tau = \varphi$$

cioè quando OC è orizzontale ed OS coincide con la linea di proiezione.

e) Valore di γ.

Il fattore γ può suddividersi nel seguente modo:

$$\gamma = \frac{\delta_y}{\delta_o}\frac{K(v)}{K(w)}\frac{\cos\tau}{\cos\rho} = \frac{\delta_y}{\delta_o}\gamma'$$

Si può avere una idea del modo di variare di γ' lungo la traiettoria nel caso di resistenza ennesima.

In tal caso può scriversi:

$$K(w) = \lambda w^{n-2}$$

e essendo

$$w = \frac{v\cos\rho}{\cos\tau}$$

sarà

$$\gamma' = \left(\frac{\cos\tau}{\cos\rho}\right)^{n-1}$$

nell'origine è $\rho = \psi$ per cui sarà

$$\gamma'_o = \left(\frac{\cos\tau}{\cos\psi}\right)^{n-1}$$

e poichè

$$\tau \leqq \psi \text{ e } \cos\tau \geqq \cos\psi \qquad \gamma_o' \geqq 1$$

A partire dall'origine ρ diminuisce, $\cos\rho$ cresce e quindi γ' diminuisce; nel punto in cui

$$\rho = \tau \quad \text{è} \quad \gamma' = 1$$

Da questo punto ρ continua a diminuire fino a $\rho = 0$ nel pseudo vertice e perciò γ' diminuisce fino a raggiungere il valore

$$\gamma_1' = (\cos\tau)^{n-1}$$

Quindi ρ diventa negativo e cresce in valore assoluto, $\cos\rho$ diminuisce e γ' cresce.

Nel punto in cui

$$\rho = -\tau$$

è nuovamente $\gamma' = 1$; continuando $-\rho$ a crescere, γ' cresce e quando $-\rho = \psi$ è

$$\gamma' = \gamma_0' = \left(\frac{\cos\tau}{\cos\psi}\right)^{n-1}$$

Dopo il punto $M_{-\psi}$, γ' continua a crescere, come cresce $-\rho$.

Se si considera l'arco esteso dall'origine al punto $M_{-\psi}$, la media geometrica dei valori estremi di γ' in ciascuna delle due parti dell'arco è

$$\gamma_t' = \sqrt{\gamma_0\gamma_1} = \left(\frac{\cos^2\tau}{\cos\psi}\right)^{\frac{n-1}{2}}$$

e affinchè questa media risulti uguale all'unità deve essere

$$\cos\tau = \sqrt{\cos\psi}$$

Se si adotta allora questo valore di τ, i valori estremi di γ' lungo ciascuno dei due archi sono:

$$\gamma_0' = \left(\frac{1}{\cos\psi}\right)^{\frac{n-1}{2}}$$

e

$$\gamma_1' = (\cos\psi)^{\frac{n-1}{2}}$$

Se si adotta invece $\tau = \psi$ si avrà

$$\gamma'_0 = 1 \qquad \gamma'_1 = (\cos\psi)^{n-1}$$

Come valore approssimato di γ'_m si potrà prendere la media geometrica oppure la media aritmetica dei valori estremi così:

$$\gamma'_m = (\cos\psi)^{\frac{n-1}{2}} \qquad \text{oppure} \qquad \gamma'_m = \frac{1}{2}\left[1 + (\cos\psi)^{n-1}\right]$$

Concludendo, se non si hanno dati sicuri per fissare il valore medio di γ' si potrà prendere

$$\gamma'_m = 1 \qquad \text{quando} \qquad \cos \tau = \sqrt{\cos \psi}$$

oppure

$$\gamma'_m = (\cos \psi)^{\frac{n-1}{2}} \qquad \text{quando} \qquad \tau = \psi$$

f) Valore medio di γ quando la resistenza è ennesima.

Quando lungo un'arco della traiettoria la resistenza è ennesima, si può determinare un'espressione del valore medio di γ' lungo l'arco stesso, espressione dalla quale si ottengono valori di γ'_m atti a dare risultati molto approssimati, specialmente nella applicazione della formula della inclinazione.

Dalla prima delle equazioni differenziali [1], sostituendo nell'ultimo termine a dt il suo valore e ad $f(v)$ il suo valore in funzione di $F(w)$ si ottiene:

$$dw = -g \frac{\operatorname{sen} \tau_i}{\cos \tau} dt + \frac{\delta_y i}{C g} F(v) \cdot w \frac{d\theta}{\cos \theta} \qquad [20]$$

Se si applica la [20] al caso in cui:

$$F(v) = \lambda v^n = \lambda w^n \left(\frac{\cos \tau}{\cos \rho}\right)^n$$

si ottiene:

$$dw + g \frac{\operatorname{sen} \tau_i}{\cos \tau} dt = \frac{\delta_y i}{C g} \lambda w^{n+1} \frac{\cos^n \tau}{\cos^n \rho} \frac{d\theta}{\cos \theta} \qquad [21]$$

Se si introduce nella [20] l'alterazione tipo Siacci si ottiene:

$$dw + g \frac{\operatorname{sen} \tau_i}{\cos \tau} dt = \frac{\delta_o i \gamma}{C g} w F(w) \frac{\cos \tau}{\cos \rho} \frac{d\theta}{\cos \theta}$$

Se la resistenza è ennesima, quest'ultima formula diviene:

$$dw + g \frac{\operatorname{sen} \tau_i}{\cos \tau} dt = \frac{\delta_o i \gamma}{C g} \lambda w^{n+1} \frac{\cos \tau}{\cos \rho} \frac{d\theta}{\cos \theta} \qquad [22]$$

Separando nelle [21] e [22] i termini che contengono l'inclinazione θ si ha:

$$\frac{\delta_y i \lambda}{C g} \frac{\cos^n \tau}{\operatorname{sen} \tau_i} \frac{\operatorname{sen} \tau_i}{\cos^n \rho} \frac{d\theta}{\cos \theta} = \frac{dw}{w^{n+1}} + g \frac{\operatorname{sen} \tau_i}{\cos \tau} \frac{dt}{w^{n+1}} \qquad [23]$$

$$\gamma \frac{\delta_o i \lambda}{C g} \frac{\cos \tau}{\operatorname{sen} \tau_i} \frac{\operatorname{sen} \tau_i}{\cos \rho} \frac{d\theta}{\cos \theta} = \frac{dw}{w^{n+1}} + g \frac{\operatorname{sen} \tau_i}{\cos \tau} \frac{dt}{w^{n+1}} \qquad [24]$$

Se si integrano le equazioni [23] e [24] fra i limiti φ e θ, gli integrali dei secondi membri risultano eguali. Per integrare i primi membri occorre dare a γ e a δ i valori medi γ_m e δ_m.

Dividendo inoltre membro a membro la seconda per la prima risulta:

$$\gamma_m \delta_o \int_\varphi^\theta \frac{\operatorname{sen} \tau_i}{\cos \rho} \frac{d\theta}{\cos \theta} = \delta_m \cos^{n-1} \tau \int_\varphi^\theta \frac{\operatorname{sen} \tau_i}{\cos^n \rho} \frac{d\theta}{\cos \theta} \qquad [25]$$

L'integrale del 1° membro è

$$\int_{\varphi}^{\theta} \frac{\operatorname{sen} \eta}{\cos \rho} \frac{d\theta}{\cos \theta} = lg_e \frac{\cos \rho}{\cos \theta} - lg_e \frac{\cos \psi}{\cos \varphi}$$

Per ottenere l'integrale al secondo membro, pongasi:

$$N_n(\theta) = \int \frac{\operatorname{sen} \eta}{\cos^n \rho} \frac{d\theta}{\cos \theta} + C \qquad [26]$$

Eseguendo l'integrazione, si ottiene:

$$N_n(\theta) = -\frac{n-1}{\cos^{n-1} \rho} - \frac{\xi_{n-2}(\rho)}{tg\, \eta} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \eta} N_{n-2}(\theta) \qquad [27]$$

Risolvendo la [25] rispetto a

$$\gamma_m \frac{\delta_o}{\delta_m} = \gamma'_m$$

ed invertendo i limiti dell'integrazione si ottiene:

$$\gamma'_m = \frac{\cos^{n-1} \tau}{lg_e \frac{\cos \psi}{\cos \varphi} - lg_e \frac{\cos \rho}{\cos \theta}} [N_n(\varphi) - N_n(\theta)] \qquad [28]$$

I valori della funzione $N_n(\theta)$ da sostituire in questa formula corrispondenti ai valori interi 2, 3, 4, 5 di n sono i seguenti:

$$\left.\begin{aligned}
\text{per } n = 2:\ N_2(\theta) &= -\frac{1}{\cos \rho} - \frac{\xi_0(\rho)}{tg\, \eta} + \frac{\xi_0(\theta)}{\operatorname{sen}^2 \eta} \\
\text{per } n = 3:\ N_3(\theta) &= -\frac{2}{\cos^2 \rho} - \frac{\xi_1(\varphi)}{tg\, \eta} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \eta} \log_e \frac{\cos \rho}{\cos \theta} \\
\text{per } n = 4:\ N_4(\theta) &= -\frac{3}{\cos^3 \rho} - \frac{\xi_2(\rho)}{tg\, \eta} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \eta} N_2(\theta) \\
\text{per } n = 5:\ N_5(\theta) &= -\frac{4}{\cos^4 \rho} - \frac{\xi_3(\rho)}{tg\, \eta} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \eta} N_3(\theta)
\end{aligned}\right\} \qquad [29]$$

I valori di $N_n(\varphi)$ si ottengono ponendo in queste espressioni:

$$\rho = \psi;\ \theta = \rho$$

Sostituendo i valori dati da queste espressioni nella [28] si ottengono le espressioni di γ'_m corrispondenti ai vari valori di n.

Si osservi che l'angolo τ entra solamente nel termine $\cos^{n-1} \tau$ e non al denominatore e neppure nelle funzioni N_n.

g) Espressioni di γ'_m nel caso particolare in cui $\rho = -\psi$.

Si consideri l'arco di traiettoria $OM_{-\psi}$ limitata al punto in cui $\theta = -\rho$. Le espressioni di γ'_m risultano allora alquanto più semplici.

Se $\rho = -\psi$, il denominatore della [28] diviene

$$lg_e \frac{\cos \theta}{\cos \varphi}$$

Inoltre il termine

$$\frac{n-1}{\cos^{n-1}\rho}$$

ha valori eguali per $\rho = \psi$ e per $\rho = -\psi$ e quindi sparisce nella differenza

$$N_n(\varphi) - N_n(\theta)$$

Posto per brevità

$$lg_e \frac{\cos\theta}{\cos\varphi} = A \qquad [30]$$

si ottengono le seguenti espressioni di γ'_m:

$$\left.\begin{array}{lll}
\text{per } n = 2 & \dfrac{\gamma'_m}{\cos\tau} = \dfrac{1}{A} \left[\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2\eta} \left\{ \xi_0(\varphi) - \xi_0(\theta) \right\} - 2 \operatorname{cotg}\eta\, \xi_0(\varphi) \right] & \\
\text{per brevità} & \dfrac{\gamma'_m}{\cos\tau} = \dfrac{B_2}{A} & \\
\text{se } n = 3 & \dfrac{\gamma'_m}{\cos^2\tau} = \dfrac{1}{A} \left[\dfrac{A}{\operatorname{sen}^2\eta} - 2 \operatorname{cotg}\eta\, tg\,\psi \right] = \dfrac{B_3}{A} & \\
\text{se } n = 4 & \dfrac{\gamma'_m}{\cos^3\tau} = \dfrac{1}{A} \left[\dfrac{B_2}{\operatorname{sen}^2\eta} - 2 \operatorname{cotg}\eta\, \xi_2(\psi) \right] & \\
\text{se } n = 5 & \dfrac{\gamma'_m}{\cos^4\tau} = \dfrac{1}{A} \left[\dfrac{B_3}{\operatorname{sen}^2\eta} - 2 \operatorname{cotg}\eta\, \xi_3(\psi) \right] &
\end{array}\right\} \qquad [31]$$

Le espressioni sopra riportate hanno forma comoda per il calcolo numerico. Mediante esse l'A. ha calcolato gli specchi che danno il valore di γ'_m per l'arco di traiettoria esteso fino al punto $-\psi$ e per vari valori di φ e di ψ.

Dati φ e ψ si ha

$$\eta = \varphi - \psi; \qquad \rho = -\psi; \qquad \theta = \varphi - 2\psi; \qquad \varphi - \theta = 2\psi$$

Il metodo Bianchi che abbiamo brevemente esposto è un lodevole tentativo di generalizzazione del procedimento di Siacci per il calcolo della traiettoria per archi successivi.

Per la sua applicazione necessitano le tabelle delle nuove funzioni balistiche che sono riportate nelle Tavole numeriche dell'opera di questo autore (ing. G. Bianchi - Balistica Esterna - Torino - Carlo Pasta 1922). Però tali tabelle sono state calcolate per intervalli degli argomenti troppo ampi.

Dopo la morte dell'autore sono state calcolate le stesse tavole, ma per intervalli molto più raffittiti e quindi rispondenti allo scopo, e pertanto a tali tabelle potrà fare ricorso chi intende approfondire maggiormente il metodo.

4 - Metodo di Gâvre.

a) Generalità.

Il metodo di Gâvre non è altro che il metodo di Eulero generalizzato.

Abbiamo visto che nel caso $n = 2$, delle equazioni trovate nella integrazione di Bernoulli, quella che dava l'arco si riduceva alle quadrature e perciò si calcolava s; applicando quindi le formule di risoluzione di triangoli, sostituendo $\varphi = \frac{\varphi + \theta}{2}$, si possono trovare gli altri elementi.

Il metodo di Gâvre generalizza questo procedimento al caso di n qualsiasi. Infatti l'equazione dell'odografa:

$$g d (v \cos\theta) = \frac{\delta_y i}{C} v F(v) d\theta$$

può scriversi:

$$g d (v \cos\theta) = \frac{\delta_y i}{C} v^3 \frac{F(v)}{v^2} d\theta = \frac{\delta_y i}{C} K(v) v^3 d\theta$$

nella quale $K(v)$ si ricava dalla tavola VI, in corrispondenza di $\frac{V+v}{2}$ e δ_y in corrispondenza di $\frac{1}{2}(y_0 + y_1)$, perciò il valore $\frac{\delta_y i}{C} K(v) = b$ si ottiene con un calcolo di prima approssimazione, nel quale vengono introdotti gli elementi all'inizio dell'arco.

Determinati v ed y si avrà modo di calcolare b quindi potremo scrivere:

$$g d (v \cos\theta) = b v^3 d\theta \qquad \text{con } b \text{ noto}$$

cioè

$$\frac{d (v\cos\theta)}{v^3} = b\, d\theta \qquad \text{e quindi} \qquad \frac{d (v\cos\theta)}{(v\cos\theta)^3} = b \frac{d\theta}{\cos^3\theta}$$

che si può scrivere:

$$d \frac{1}{(v\cos\theta)^2} = -2b \frac{d\theta}{\cos^3\theta}$$

Integrando tra l'origine ed un punto qualunque si ha:

$$\frac{1}{(v\cos\theta)^2} - \frac{1}{(V\cos\varphi)^2} = -2b[\xi_2(\theta) - \xi_2(\varphi)] = 2b[\xi_2(\varphi) - \xi_2(\theta)] \qquad [1]$$

dalla quale è possibile ricavare il valore di $v\cos\theta$ e quindi di v.

Trovato v, si calcola l'arco s con la relazione che si è vista nell'integrazione di Eulero, oppure, secondo il procedimento francese, s si ricava dalla relazione

$$g\, ds = -v^2 \frac{d\theta}{\cos\theta}$$

$$ds = -\frac{(v\cos\theta)^2}{g} \frac{d\theta}{\cos^3\theta} = -\frac{(v\cos\theta)^2}{g} d\xi_2(\theta)$$

Poichè s'è visto che

$$d\xi_2(\theta) = -\frac{1}{2b} d \frac{1}{(v\cos\theta)^2}$$

sarà

$$ds = \frac{(v\cos\theta)^2}{2gb} d\left(\frac{1}{v\cos\theta}\right)^2 = \frac{1}{2gb} \frac{d \frac{1}{(v\cos\theta)^2}}{\frac{1}{(v\cos\theta)^2}}$$

$$s = \frac{1}{2gb} lg_e \left(\frac{\frac{1}{v\cos\theta}}{\frac{1}{V\cos\varphi}}\right)^2 = \frac{1}{2gb} lg_e \left(\frac{V\cos\varphi}{v\cos\theta}\right)^2$$

$$s = \frac{2.302}{gb} lg_{10} \left(\frac{V\cos\varphi}{v\cos\theta}\right) \qquad [2]$$

I valori di x, y, t si deducono con le note formule trovate nel caso di integrazione di Eulero.

Si deve osservare cne l'aver considerato la quantità

$$b = \frac{\delta_y\, i}{g\, C}\, K\,(V)$$

costante per tutto l'arco, impone di limitare molto l'ampiezza degli archi.

Così il Dufrénois, che riporta per intero una applicazione del metodo per una traiettoria di $\varphi = 20^{\circ}$ prende i primi 8 archi dell'ampiezza di 10′ e quindi per una intera traiettoria occorre il calcolo di ben 40 archi. (Dufrénois, Risser, e Rousier – Les methodes actuelles de la Balistique exterieure – Gauthier Villars – 1921).

Si può osservare che con archi di tale ampiezza una volta calcolata la velocità orizzontale al termine dell'arco (il che può essere fatto con la formula trovata precedentemente) le formule del vuoto in funzione della inclinazione, nelle quali si ponga invece di $V \cos\varphi$ il valore

$$\frac{V\cos\varphi + v\cos\theta}{2}$$

danno gli stessi risultati del metodo di Gâvre.

Le formule sono le seguenti:

$$y = \frac{(V\cos\varphi)^2_m\,(tg^2\,\varphi - tg^2\,\theta)}{2\,g}$$

$$x = \frac{(V\cos\varphi)^2_m}{g}\,(tg\,\varphi - tg\,\theta)$$

$$t = \frac{(V\cos\varphi)_m}{g}\,(tg\,\varphi - tg\,\theta)$$

b) Riepilogo.

Riassumendo, il calcolo procederà nel seguente modo.

Dati V, φ, $\frac{C}{i}$, δ e θ si calcolerà con le formule del vuoto un primo valore della ordinata media cioè

$$y_m = \frac{V^2\cos^2\varphi}{4\,g}\,(tg^2\,\varphi - tg^2\,\theta)$$

Indi con la velocità iniziale V si ricava $K\,(v)$ per cui si può avere:

$$b = \frac{\delta_{ym}\, i}{C\, g}\, K\,(V)$$

dalla

$$\frac{1}{(v\cos\theta)^2} = \frac{1}{(V\cos\varphi)^2} + 2\,b\,[\xi_2\,(\varphi) - \xi_2\,(\theta)]$$

si ricava

$$(v\cos\theta)^2 = \frac{(V\cos\varphi)^2}{1 + (V\cos\varphi)^2\,[\xi_2\,(\varphi) - \xi_2\,(\theta)]}$$

avuto $v\cos\theta$ si ricava v e quindi $K\left(\frac{v + V}{2}\right)$.

Indi il nuovo valore di b e con la formula avuta in precedenza si avrà $v \cos\theta$ e perciò v definitivo. Si calcola poi:

$$s = \frac{2.302}{g\,b}\, lg_{10}\left(\frac{V\cos\varphi}{v\cos\theta}\right)$$

$$x = s\cos\frac{\varphi+\theta}{2}\,; \qquad y = s\,\mathrm{sen}\,\frac{\varphi+\theta}{2}\,; \qquad t = \frac{2\,x}{V+v}$$

5 – Metodo Vallier.

a) Generalità.

Il metodo Vallier è un metodo di quadrature che si presta anche al calcolo per archi.

Dalle equazioni differenziali del moto scritte sotto la forma di S. Robert; cioè :

$$g d\,x = -\,v^2\,d\,\theta. \qquad g d\,y = -\,v^2\,tg\,\theta\,d\,\theta$$

$$g d\,t = -\,v\,\frac{d\,\theta}{\cos\theta}\,, \qquad g d\,s = -\,v^2\,\frac{d\,\theta}{\cos\theta}$$

$$g d\,(v\cos\theta) = v f\,(v)\,d\,\theta$$

indicando con φ e φ' le inclinazioni estreme di un'arco si ha :

$$g x = \int_{\varphi'}^{\varphi} v^2\,d\,\theta\,; \qquad g y = \int_{\varphi'}^{\varphi} v^2\,tg\,\theta\,d\,\theta\,; \qquad g t = \int_{\varphi'}^{\varphi} v\sec\theta\,d\,\theta$$

Il problema si riduce alle quadrature, occorre però calcolare il valore della v in corrispondenza dei valori di φ e quindi di θ e questo calcolo viene eseguito con la formula:

$$J\,(u) = J\,(V) + \frac{2\cos^2\varphi}{C'}\,(tg\,\varphi - tg\,\theta), \qquad v = \frac{U\cos\varphi}{\cos\theta}$$

in essa vi è il C' che viene calcolato con la relazione:

$$C' = \frac{C}{\delta_m\,i}\cos\frac{\varphi+\theta}{2}$$

δ_m si deduce in corrispondenza di $y_m = \frac{V^2\cos^2\varphi}{4\,g}\,(tg^2\,\varphi - tg^2\,\theta)$.

In tal modo si possono ricavare i valori di $v_0 = V_1, v_1, v_2, v_3, \ldots\ldots v_n$ corrispondenti ai valori $\theta = \varphi, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots\ldots \theta_n = \varphi'$.

Integrando quindi per mezzo delle formule di Gauss si ha:

$$g x = (\varphi - \varphi')\,[A_0\,v_0^2 + A_1\,v_1^2 + \cdots\cdots\cdots + A_n\,v_n^2]$$

$$g y = (\varphi - \varphi')\,[A_0\,v_0^2\,tg\,\theta_0 + A_1\,v_1^2\,tg\,\theta_1 + \cdots\cdots\cdots + A_n\,v_n^2\,tg\,\theta_n]$$

$$g t = (\varphi - \varphi')\,[A_0\,v_0\sec\theta_0 + A_1\,v_1\sec\theta_1 + \cdots\cdots\cdots + A_n\,v_n\,\theta_n]$$

L'impiego del metodo di Gauss richiede che i valori di $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots\ldots$ siano determinati con apposite formule che sono diverse a seconda del valore di n ed analogamente per i coefficienti numerici $A_0\, A_1\, A_2 \ldots\ldots$

Questi valori dipendono da quello di n e sono:

$n = 3$	$\theta = \varphi$	$\log A_0 = \bar{2},9208$
	$\theta = 0{,}7236\,\varphi + 0{,}2764\,\varphi'$	$\log A_1 = \bar{1},6128$
	$\theta = 0{,}2764\,\varphi + 0{,}7236\,\varphi'$	$A_2 = A_1$
	$\theta = \varphi'$	$A_3 = A_0$
$n = 4$	$\theta = \varphi$	$\log A_0 = \bar{2},69897$
	$\theta = 0{,}8273\,\varphi + 0{,}1727\,\varphi'$	$\log A_1 = \bar{1},43493$
	$\theta = 0{,}5\,(\varphi + \varphi')$	$\log A_2 = \bar{1},55091$
	$\theta = 0{,}1727\,\varphi + 0{,}8273\,\varphi'$	$A_3 = A_1$
	$\theta = \varphi'$	$A_4 = A_0$
$n = 5$	$\theta = \varphi$	$\log A_0 = \bar{2},52288$
	$\theta = 0{,}8825\,\varphi + 0{,}1175\,\varphi'$	$\log A_1 = \bar{1},27701$
	$\theta = 0{,}6426\,\varphi + 0{,}3574\,\varphi'$	$\log A_2 = \bar{1},44315$
	$\theta = 0{,}3574\,\varphi + 0{,}6426\,\varphi'$	$A_3 = A_2$
	$\theta = 0{,}1175\,\varphi + 0{,}8825\,\varphi'$	$A_4 = A_1$
	$\theta = \varphi'$	$A_5 = A_0$
$n = 6$	$\theta = \varphi$	$\log A_0 = \bar{2},37675$
	$\theta = 0{,}9151\,\varphi + 0{,}0849\,\varphi'$	$\log A_1 = \bar{1},14118$
	$\theta = 0{,}7344\,\varphi + 0{,}2656\,\varphi'$	$\log A_2 = \bar{1},33420$
	$\theta = 0{,}5\,(\varphi + \varphi')$	$\log A_3 = \bar{1},38705$
	$\theta = 0{,}2656\,\varphi + 0{,}7344\,\varphi'$	$A_4 = A_2$
	$\theta = 0{,}0849\,\varphi + 0{,}9151\,\varphi'$	$A_5 = A_1$
	$\theta = \varphi'$	$A_6 = A_0$

Con questo metodo di calcolo, scegliendo ad es. per valutare un integrale, gli n punti dati dalla teoria di Gauss, si ottiene la stessa approssimazione che si otterrebbe prendendo $2n - 1$ punti equidistanti del metodo di quadratura dei trapezi.

Questo metodo è abbastanza rapido ed elegante ma ad esso si possono muovere delle obbiezioni.

Così se nella determinazione dei valori $v_1, v_2 \ldots\ldots$ corrispondenti a $\theta_1, \theta_2 \ldots\ldots$ con le formule

$$J(u) = J(V) + \frac{2\cos^2\varphi}{C}(tg\,\varphi - tg\,\theta); \qquad v = \frac{u\cos\varphi}{\cos\theta}$$

si volesse tener conto della variazione di δ esse non risultano sufficienti e perciò occorrerebbe calcolare per ogni archetto caratterizzato dai valori di $\theta_1, \theta_2 \ldots\ldots$ i corrispondenti valori di y con una formula approssimata, come per esempio quella del vuoto in funzione dell'inclinazione, e quindi trovare il valore di y_m dell'arco.

Per questo inconveniente, che può dar luogo a notevoli errori, il metodo Vallier non è applicato in pratica.

Valendosi delle formule che danno x, y, t, la differenza $\varphi - \varphi'$ va espressa in radianti e quindi se i valori φ, φ' sono dati in gradi esso deve esser moltiplicato per $\frac{\pi}{180}$, indicando con Φ, il valore di $\frac{\varphi - \varphi'}{180\, g}$ si può calcolare per convenienti valori di $\varphi - \varphi'$ il corrispondente valore di Φ.

Il calcolo procede quindi nel modo seguente:

Diviso l'arco in un conveniente numero di archetti, si calcolano i valori di θ con le note relazioni in funzione di u e quindi quelli di v in corrispondenza ai θ fissati.

Si determinano pure i valori di A e quindi possono essere applicate le formule di quadratura.

b) Applicazione.

Dati: $V = 300$ m/s; $\varphi = 45°$; $\log \frac{C}{i} = 0{,}35927$; $\delta_0 = 1$ $\varphi' = 40°$

Si divide l'arco $\varphi - \varphi' = 5°$ in tre archetti; in tal caso risulterà:

$$\theta_0 = 45°$$
$$\theta_1 = 0{,}7236\, \varphi + 0{,}2764\, \varphi' = 43°\, 37'$$
$$\theta_2 = 0{,}2764\, \varphi + 0{,}7236\, \varphi' = 41°\, 29'$$
$$\theta_3 = 40°$$

Applicando la nota formula:

$$J(u) = J(V) + \frac{2 \cos^2 \varphi}{C'} (tg\, \varphi - tg\, \theta)$$

essendo:

$$C' = \frac{C}{\delta_m\, i} \; \frac{\cos(\varphi + \theta)}{2}$$

si trova per i varî angoli $\theta_1, \theta_2 \ldots\ldots$

$$v = \frac{u \cos \varphi}{\cos \theta}$$

$v_0 = 300$ m/s; $v_1 = 286{,}7$; $v_2 = 269{,}5$; $v_3 = 260{,}5$

quindi si ha

$$x = \frac{\varphi - \varphi'}{180\, g} \pi (A_0 v_0^2 + A_1 v_1^2 + A_2 v_2^2 + A_3 v_3^2)$$

$\log v_0$	$= 2{,}47712$	$\log v_1$	$= 2{,}45743$	$\log v_2$	$= 2{,}43056$	$\log v_3$	$= 2{,}41581$
$\log v^2_0$	$= 4{,}95424$	$\log v_1^2$	$= 4{,}91486$	$\log v_2^2$	$= 4{,}86112$	$\log v_3^2$	$= 4{,}83162$
$\log A_0$	$= \bar{2}{,}92080$	$\log A_1$	$= \bar{1}{,}61980$	$\log A_2$	$= \bar{1}{,}61980$	$\log A_3$	$= \bar{2}{,}92080$
$\log A_0 v_0^2$	$= 3{,}87504$	$\log A_1 v_1^2$	$= 4{,}53466$	$\log A_2 v_2^2$	$= 4{,}48092$	$\log A_3 v_3^2$	$= 3{,}75242$
$A_0 v_0^2$	$= 7500$	$A_1 v_1^2$	$= 34250$	$A_2 v_2^2$	$= 30264$	$A_3 v_3^2$	$= 5655$

$$A_0 v_0^2 + A_1 v_1^2 + A_2 v_2^2 + A_3 v_3^2 = 77669$$

$$\log (A_0 v_0^2 + \cdots\cdots + A_3 v_3^2) = 4{,}89025$$
$$\log \frac{(\varphi - \varphi')\pi}{180\, g} = \bar{3}{,}94932$$
$$\log x = 2{,}83957$$
$$x = 691{,}1$$

Calcolo di

$$y = \frac{(\varphi - \varphi')}{180\,g}\,\pi\,(A_0\, v_0^2\, tg\,\theta_0 + A_1\, v_1^2\, tg\,\theta_1 + A_2\, v_2^2\, tg\,\theta_2 + A_3\, v_3^2\, tg\,\theta_3)$$

$\log tg\,\theta_0 = 0{,}0000$	$\log tg\,\theta_1 = \bar{1}{,}97902$	$\log tg\,\theta^2 = \bar{1}{,}94655$	$\log tg\,\theta_3 = \bar{1}{,}92381$
$\log A_0\, v_0^2 = 3{,}87504$	$\log A_1\, v_1^2 = 4{,}53466$	$\log A_2\, v_2^2 = 4{,}48092$	$\log A_3\, v_3^2 = 3{,}75242$
$\log A_0 v_0^2\, tg\,\theta_0 = 3{,}87504$	$\log A_1 v_1^2\, tg\,\theta_1 = 4{,}51368$	$\log A_2 v_2^2\, tg\,\theta_2 = 4{,}42747$	$\log A_3 v_3^2\, tg\,\theta_3 = 3{,}67623$
$A_0\, v_0^2\, tg\,\theta_0 = 7500$	$A_1\, v_1^2\, tg\,\theta_1 = 32635$	$A_2\, v_2^2\, tg\,\theta_2 = 26757$	$A_3\, v_3^2\, tg\,\theta_3 = 4745$

$$A_0\, v_0^2\, tg\,\theta_0 + A_1\, v_1^2\, tg\,\theta_1 + A_2\, v_2^2\, tg\,\theta_2 + A_3\, v_3^2\, tg\,\theta_3) = 71637$$

$$\log (A_0\, v_0^2\, tg\,\theta_0 + \cdots\cdots\cdots + A_3\, v_3^2\, tg\,\theta_3) = 4{,}85514$$

$$\log \frac{(\varphi - \varphi')\,\pi}{180\,g} = 3{,}94932$$

$$\log y = 2{,}80446$$

$$y = 637{,}5$$

Calcolo di

$$t = \frac{(\varphi - \varphi')}{180\,g}\,\pi\,(A_0\, v_0 \sec\theta_0 + A_1\, v_1 \sec\theta_1 + A_2\, v_2 \sec\theta_2 + A_3\, v_3 \sec\theta_3)$$

$\log \sec\theta_0 = 0{,}15051$	$\log \sec\theta_1 = 0{,}14149$	$\log \sec\theta^2 = 0{,}12543$	$\log \sec\theta_3 = 0{,}11575$
$\log A_0\, v_0 = 1{,}39792$	$\log A_1\, v_1 = 2{,}07723$	$\log A_2\, v_2 = 2{,}05036$	$\log A_3\, v_3 = 1{,}33661$
$\log A_0 v_0 \sec\theta_0 = 1{,}54843$	$\log A_1 v_1 \sec\theta_1 = 2{,}21872$	$\log A_2 v_2 \sec\theta_2 = 2{,}17579$	$\log A_3 v_3 \sec\theta_3 = 1{,}45236$
$A_0\, v_0 \sec\theta_0 = 35{,}35$	$A_1\, v_1 \sec\theta_1 = 165{,}47$	$A_2\, v_2 \sec\theta_2 = 149{,}90$	$A_3\, v_3 \sec\theta_3 = 28{,}34$

$$A_0\, v_0 \sec\theta_0 + A_1\, v_1 \sec\theta_1 + A_2\, v_2 \sec\theta_2 + A_3\, v_3 \sec\theta_3 = 379{,}06$$

$$\log (A_0\, v_0 \sec\theta_0 + \cdots\cdots\cdots + A_3\, v_3 \sec\theta_3) = 2{,}57874$$

$$\log \frac{(\varphi - \varphi')\,\pi}{180\,g} = 3{,}94932$$

$$\log t = 0{,}52806$$

$$t = 3''\,37$$

Risultati ottenuti col Metodo Vallier:	Risultati ottenuti con l'ordinario Metodo di calcolo:
$v = 260{,}5$	$v = 261{,}3$
$x = 691{,}1$	$x = 696{,}7$
$y = 637{,}5$	$y = 639{,}0$
$t = 3''37$	$t = 3''26$

6 - Metodo Charbonnier.

a) Generalità.

Posti all'inizio dell'arco come dati V, φ, $\frac{C}{i}$, δ, θ, si introduce una variabile ausiliaria ρ tale che:

$$\theta = \varphi - (\varphi - \theta) = \varphi - \rho, \text{ cioè } \rho = \varphi - \theta$$

per cui sarà pure $d\,\theta = -\,d\,\rho$.

Dall'equazione dell'odografa

$$gd\,(v\cos\theta) = \frac{\delta_y\, i}{C}\, vF\,(v) d\,\theta = cF\,(v) v\, d\,\theta$$

con $c = \frac{\delta\, i}{C}$

e posto ancora $\Phi\,(v) = \frac{1}{v \cdot F(v)}$ si avrà:

$$\frac{g}{c}\, d(v\cos\theta) = \frac{1}{\Phi\,(v)}\, d\,\theta$$

moltiplicando e dividendo per $\cos\varphi$

$$\frac{g}{c}\cos\varphi\,\Phi\left(\frac{v\cos\theta}{\cos\theta}\right) d\left(\frac{v\cos\theta}{\cos\varphi}\right) = -\,d\,\rho$$

ponendo $v\cos\theta = n$

$$\frac{g}{c}\cos\varphi\,\Phi\left(\frac{n}{\cos\theta}\right) d\left(\frac{n}{\cos\varphi}\right) = -\,d\,\rho \qquad [1]$$

Sviluppando in serie $\frac{1}{\cos\theta}$ partendo da $\frac{1}{\cos\varphi}$ o meglio sostituendo ad $\frac{1}{\cos\theta}$ il valore che questi assume nell'origine sarà:

$$\frac{g}{c}\cos\varphi\,\Phi\left(\frac{n}{\cos\varphi}\right) d\left(\frac{n}{\cos\varphi}\right) = -\,d\,\rho$$

ed analogamente a quanto ha fatto Siacci, cioè ponendo:

$$\frac{n}{\cos\varphi} = \frac{v\cos\theta}{\cos\varphi} = u$$

si avrà:

$$\frac{g}{c}\cos\varphi\,\Phi\,(u)\, du = -\,d\,\rho \qquad [2]$$

da cui essendo

$$\Phi\,(u) = \frac{1}{u\,F(u)} \qquad [3]$$

si ha:

$$-\,d\,\rho = \frac{g}{c}\cos\varphi\,\frac{du}{u\,F(u)} \qquad [4]$$

Integrando, dopo aver posto $\int \frac{-\,g\,du}{u\,F(u)} = J\,(u)$, avremo:

$$-\,\rho + \rho_0 = \frac{\cos\varphi}{c}\,[J(V) - J(u)] = \frac{C\cos\varphi}{\delta\, i}\,[J(V) - J(u)] \qquad [5]$$

Abbiamo visto che:

$$\rho = \varphi - \theta \text{ da cui } \theta = \varphi - \rho$$

quindi:

$$tg\,\theta = tg\,(\varphi - \rho)$$

che sviluppando in serie dà:

$$tg\,\theta = tg\,\varphi - \rho\,\frac{1}{\cos^2\varphi} + \frac{\rho^2}{2!}\,\frac{2\,\text{sen}\,\varphi\cos\varphi}{\cos^4\varphi}$$

quindi trascurando il 3° termine:

$$tg\,\theta = tg\,\varphi - \rho\,\frac{1}{\cos^2\varphi}; \qquad \rho = (tg\,\varphi - tg\,\theta)\cos^2\varphi;$$

nell'origine $\rho_0 = 0$ per cui:

$$-\rho = -(tg\,\varphi - tg\,\theta)\cos^2\varphi = \frac{C\cos\varphi}{\delta\,i}\,[J(V) - J(u)] \qquad [6]$$

$$tg\,\theta - tg\,\varphi = \frac{C}{\delta\,i\cos\varphi}\,[J(V) - J(u)] \qquad [7]$$

Tempo

Dalla relazione $g\,dt = -\,v\,\dfrac{d\theta}{\cos\theta}$

$$dt = \frac{v\cos\theta}{g}\,\frac{d\theta}{\cos^2\theta}$$

sostituendo a $\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ il valore iniziale $\dfrac{1}{\cos^2\varphi}$

$$dt = -\,\frac{v\cos\theta}{g\cos\varphi}\,\frac{d\theta}{\cos\varphi} = -\,\frac{u}{g}\,\frac{d\theta}{\cos\varphi} = \frac{u\,d\rho}{g\cos\varphi}$$

ma si è trovato che

$$-\,\frac{d\rho}{\cos\varphi} = \frac{g}{c}\,\frac{du}{u\,F(u)}$$

quindi:

$$dt = -\,\frac{u}{g}\,\frac{g}{c}\,\frac{du}{u\,F(u)} = \frac{C}{\delta\,i}\cdot\frac{-\,du}{F(u)}$$

per cui

$$t = \frac{C}{\delta\,i}\,[T(u) - T(V)] \qquad [8]$$

Ascissa

Dalla relazione $g\,dx = -\,v^2 d\,\theta = -\,(v\cos\theta)^2\,\dfrac{d\theta}{\cos^2\theta} = v^2\cos^2\theta\,\dfrac{d\rho}{\cos^2\theta}$ sostituendo $\cos\varphi$ a $\cos\theta$

$$dx = \frac{v^2\cos^2\theta}{g\cos^2\varphi}\,\frac{g}{c}\,\frac{-\,du}{u\,F(u)}\cos\varphi = \frac{u^2}{c}\,\frac{-\,du\cos\varphi}{u\,F(u)} = \frac{C\cos\varphi}{\delta\,i}\,\frac{-\,u\,du}{F(u)}$$

$$x = \frac{C\cos\varphi}{\delta\,i}\,[D(u) - D(V)] \qquad [9]$$

Ordinata

$$dy = dx\ tg\ \theta = dx\ tg\ \varphi$$

quindi

$$y = \frac{C \operatorname{sen} \varphi}{\delta\, i} [D(u) - D(V)] \qquad [10]$$

Queste formule sono le stesse trovate per il metodo Siacci nelle quali però $\beta = \frac{1}{\cos \varphi}$.

7 - Metodo G. H. M. (Garnier - Haag - Marcus).

a) Generalità.

Durante la guerra 1915-18 i francesi abbandonarono il metodo di calcolo per archi di Gâvre e quello modificato G. H. ed adottarono quello G. H. M.

Gli ideatori del metodo partirono dal principio che, nella esecuzione pratica dei calcoli, a volte è più dannoso che utile ricorrere a sistemi di integrazione rigorosi ma complicati.

Possono quindi essere scartati formule e procedimenti analitici eleganti agli occhi di un matematico, per adottare metodi semplici ed apparentemente grossolani ma in realtà più rapidi e più precisi, purchè permettono il calcolo degli errori che si commettono.

Il prof. Marcus della Commissione di Gâvre fece questa osservazione e presentò un metodo meno complesso di quelli esistenti ed anche meno elegante, ma che ha il pregio di permettere, con calcoli relativamente semplici, la correzione dei termini ottenuti mediante integrazione approssimata.

Il metodo ha poi il vantaggio di non richiedere tentativi per la determinazione dell'ampiezza dell'arco poichè questo è fatto per estrapolazione e sulla base dei risultati ottenuti nel calcolo dell'arco precedente.

Il metodo G. H. M. si basa sui due principi fondamentali seguenti:

1) Impiega direttamente i valori della funzione resistente $F(v)$.

2) Mantiene per ciascun arco sempre lo stesso grado di approssimazione.

Il primo principio ha il vantaggio di sfruttare senz'altro qualunque progresso sulla legge della resistenza dell'aria.

Il secondo permette ampiezza d'arco anche di 20° e 30°; mantenendo inalterata l'approssimazione per il fatto che si calcola in precedenza il limite di sicurezza senza ricorrere a faticosi tentativi.

Inoltre il procedimento permette di tener conto della influenza della temperatura sulla funzione resistente $F(v)$, la quale sarà funzione della sola velocità quando questa è inferiore alla velocità del suono mentre, quando è superiore, dipenderà anche dalla temperatura ambiente.

Il metodo G. H. M. è lungo, ma in compenso può essere abbreviato con l'uso di macchine calcolatrici.

L'integrazione dell'odografa, col metodo G. H. M. viene fatto supponendo la ritardazione $f(v)$ costante lungo l'arco che si considera, salvo poi a correggere i risultati ottenuti mediante termini correttivi.

Nella equazione dell'odografa

$$g d(v\cos\theta) = v f(v)\, d\theta$$

posto

$$\frac{f(v)}{g} = \rho$$

si ha:

$$d(v\cos\theta) = v\rho\, d\theta = v\cos\theta\,\rho\,\frac{d\theta}{\cos\theta}$$

da cui

$$\frac{d(v\cos\theta)}{v\cos\theta} = \rho\,\frac{d\theta}{\cos\theta}$$

e poichè come si è visto

$$\int\frac{d\theta}{\cos^{n+1}\theta} = \xi_{(n)}\theta$$

sarà

$$\frac{d(v\cos\theta)}{v\cos\theta} = \rho\, d\,\xi_0(\theta)$$

Integrando si ha

$$lg_e\frac{v\cos\theta}{V\cos\varphi} = \rho_m\left[\xi_0(\theta) - \xi_0(\varphi)\right] =$$

$$= \rho_m\, lg_e\frac{tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}{tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)} = \rho_m D\,\xi \qquad [1]$$

e sostituendo ai logaritmi naturali quelli a base 10

$$2.30258\, lg_{10}(v\cos\theta) - 2.30258\, lg_{10}(V\cos\varphi) = -\rho_m D(\xi)$$

cioè

$$lg_{10}\, v\cos\theta = lg_{10}\, V\cos\varphi - \rho_m\left[\xi_0(\varphi) - \xi_0(\theta)\right]\frac{1}{2.30258}$$

cioè

$$lg_{10}(v\cos\theta) = lg_{10}(V\cos\varphi) - \beta \qquad [2]$$

ove

$$= \rho_m M\left[\xi_0(\varphi) - \xi_0(\theta)\right] \qquad [3]$$

ed

$$M = \frac{1}{2.30258}$$

b) 1ª Approssimazione.

Per il calcolo di $v\cos\theta$ occorre conoscere il valore medio di ρ nell'intervallo considerato e questo si determina con uno sviluppo in serie.

Sviluppando in serie la funzione sotto il segno dell'integrale $\rho\, d\,[\xi_0(\theta)]$ ed eseguendo l'integrazione si ha

$$lg_e\, v\cos\theta - lg_e\, V\cos\varphi = -\rho_0 D\,\xi + \frac{\rho_0'}{2!}D\,\xi^2 - \frac{\rho_0''}{3!}D\,\xi^3 + \frac{\rho_0'''}{4!}D\,\xi^4 \cdots \qquad [4]$$

che, confrontata con la [1], dà:

$$\rho_m = \rho_0 - \frac{\rho_0'}{2!} D\xi + \frac{\rho_0''}{3!} D\xi^2 \dots \qquad [5]$$

Se si costruisce una curva che rappresenta la variazione di ρ col variare di ξ nell'intervallo $D\xi$ la sua tangente nell'origine, cioè nel punto $\rho = \rho_0$, sarà ρ_0' e l'incremento differenziale di ρ nell'intervallo $D\xi$ sostituendo all'arco la tangente nell'origine dell'arco sarà

$$d\rho = -\rho_0' D\xi = CD \quad \text{(fig. 73)}$$

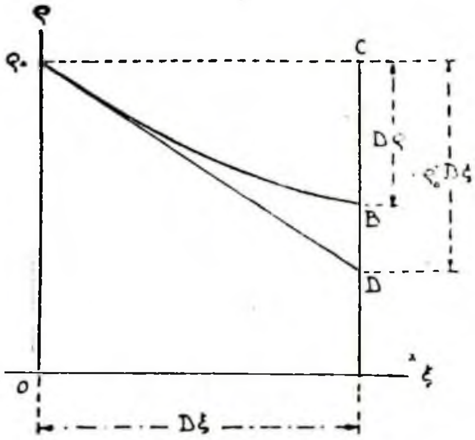


FIG. 73.

mentre l'incremento reale $D\rho = CB$ in funzione delle potenze di ξ sarà

$$D\rho = -\rho_0' D\xi + \frac{\rho_0''}{2!} D\xi^2 - \frac{\rho_0'''}{3!} D\xi^3$$

e quindi fermando lo sviluppo al termine di grado 3°

$$\frac{\rho_0''}{2!} D\xi^2 = D\rho - d\rho + \frac{\rho_0'''}{3!} d\xi^3$$

e sostituendo il valore così trovato nella espressione di ρ_m

$$\rho_m = \rho_0 - \frac{\rho_0'}{2!} D\xi + \frac{\rho_0''}{3!} D\xi^2 - \frac{\rho_0'''}{4!} D\xi^3$$

si avrà

$$\rho_m = \rho_0 + \frac{d\rho}{2} + \frac{D\rho - d\rho}{3} + \frac{\rho_0'''}{3!\,3} D\xi^3 - \frac{\rho_0'''}{24} D\xi^3$$

e trascurando i termini di grado uguale o superiore al 3°

$$\rho_m = \rho_0 + \frac{d\rho}{2} + \frac{D\rho - d\rho}{3}$$

e questa è l'equazione definitiva di ρ_m che permette il calcolo di $v\cos\theta$ e quindi degli altri elementi.

Calcolo di ρ_0.

È stato posto:

$$\rho_0 = \frac{f(v)}{g} = \frac{\delta i}{C g} F(v)$$

nel caso in cui si tenga conto della variazione di $F(v)$ con la temperatura ambiente porremo:

$$\rho_0 = \frac{\delta\, i}{C\, g} F(h_0)$$

ove $h_0 = \frac{V}{v}$ e V è la velocità del proietto, v la velocità del suono.

Tale valore di $F(h_0)$ si ricava da apposite tabelle (Vedi memoria edita da Gautier-Villais - Parigi 1921).

I calcoli però non possono subito essere eseguiti per il valore trovato di ρ_m, occorre quindi calcolare il valore di ρ di 1ª approssimazione e questo praticamente si ritiene uguale a

$$\rho_m = \rho_0 + \frac{d\rho}{2}$$

con questo 1° valore si calcolano gli elementi approssimati alla fine dell'arco, conosciuti i quali è possibile determinare i valori di ρ_{1a} e quindi di

$$D\rho = \rho_{1a} - \rho_0$$

e procedere al calcolo del termine correttivo

$$\frac{D\rho - d\rho}{3}$$

dopo aver calcolato $d\rho$, calcolo questo che viene eseguito come segue:

Dalla relazione

$$\rho = \frac{\delta_y\, i}{C} \frac{F(v)}{g} = \frac{e^{-hy}\, i}{C\, g} F(v)$$

differenziando logaritmicamente si ha:

$$\frac{d\rho}{\rho} = -h\,dy + \frac{F'(v)}{F(v)}\,dv$$

e giacchè

$$g\,dy = -v^2\, tg\,\theta\, d\theta$$

sarà

$$\frac{d\rho}{\rho} = \left(\frac{h}{g} v^2\, tg\,\theta + \frac{F'(v)}{F(v)} \frac{dv}{d\theta} \right) d\theta$$

ma essendo

$$d(v \cos\theta) = v\rho\, d\theta$$

e differenziando il 1° membro

$$\cos\theta\, dv - v\,\mathrm{sen}\,\theta\, d\theta = v\rho\, d\theta$$

da cui

$$\frac{dv}{d\theta} = \frac{v\,\mathrm{sen}\,\theta + \rho v}{\cos\theta}$$

che sostituita nella precedente dà:

$$\frac{d\rho}{\rho} = \left[\frac{h}{g} v^2 \, tg\, \theta + \frac{v F'(v)}{F(v)} \frac{\operatorname{sen} \theta + \rho}{\cos \theta}\right] d\theta =$$

$$= \left(\frac{h}{g} v^2 \operatorname{sen} \theta + \frac{v F'(v)}{F(v)} [\operatorname{sen} \theta + \rho]\right) \frac{d\theta}{\cos \theta} =$$

$$= \left(\frac{h}{g} v^2 \operatorname{sen} \theta + \frac{v F'(v)}{F(v)} [\operatorname{sen} \theta + \rho]\right) d\, \xi_o\, \theta$$

ma

$$\frac{v F'(v)}{F(v)} = n$$

e ponendo

$$m = n + \frac{h v^2}{g}$$

sarà

$$\frac{d\rho}{\rho} = -(m \operatorname{sen} \theta + n \rho)\, D\, \xi_o$$

I valori di m ed n possono essere dati da una tavola a semplice entrata in funzione di v.

Riassumendo i calcoli di 1ª approssimazione vengono effettuati nel seguente modo:

Si pone

$$\rho_m = \rho_o + \frac{d\rho}{2}$$

ove

$$\rho_o = \frac{e^{-h y_i}}{C g} F(v)$$

e $d\rho$ viene calcolato con gli elementi iniziali dell'arco cioè

$$d\rho = -\rho_o (n_o \rho_o + m_o \operatorname{sen} \varphi)\, D\, \xi_o$$

Avuto ρ_{1a} si calcola la velocità orizzontale alla fine dell'arco con la formula

$$lg_{10} (v \cos \theta) = lg_{10} (V \cos \varphi) - \rho_m M [\xi_o (\varphi) - \xi_o (\theta)]$$

e così si ha v_{1a}

Si calcola poi

$$y_{1a} = \frac{u^2}{2g} (tg^2 \varphi - tg^2 \theta)$$

ove

$$u^2 = V \cos \varphi\, v_{1a} \cos \theta$$

e quindi questa non è altro che la formula del vuoto che da la y_{1a} funzione dell'inclinazione nella quale però alla velocità orizzontale all'inizio dell'arco è stata sostituita la media geometrica della velocità orizzontale all'inizio ed alla fine dell'arco.

Noto y_{1a} e v_{1a} è possibile determinare il valore di ρ con la formula:

$$\rho_{1a} = \frac{i\, e^{-h y_{1a}}}{C g} F(v)_{1a}$$

In questa formula invece di $e^{-h y_{1a}}$ si può mettere la densità dell'aria alla quota y_{1a} che è la stessa cosa.

Indi si calcolerà

$$D \rho = \rho_{1a} - \rho_0$$

e quindi

$$\delta \rho_{1a} = \frac{D \rho - d \rho}{3} = \frac{\varepsilon}{3}$$

In pratica non è necessario fare la correzione del valore di ρ nel modo indicato, basta tener conto della influenza del termine correttivo sui valori di $v \cos \theta$ e v.

Se si indica con ε_β la influenza della variazione di ρ_m su β poichè

$$\beta = \rho_m M D \xi$$

si ha:

$$\varepsilon_\beta = \delta \beta = \delta \rho M D \xi = \frac{\varepsilon M D \xi}{3}$$

per cui la correzione da fare subito a $v \cos \theta$ od a v sarà:

$$\delta\, lg_{10} (v \cos \theta) = \delta\, lg_{10} v = - \varepsilon_\beta$$

c) CALCOLO DEGLI ELEMENTI DELL'ARCO.

I valori di $D x$ e $D t$ si hanno in prima approssimazione dalle formule di S. Robert che possono essere scritte:

$$dx = - \frac{v^2 \cos^2 \theta}{g} \frac{d \theta}{\cos^2 \theta} = - (v \cos \theta)^2 \frac{d\, tg\, \theta}{g}$$

$$dt = - \frac{v \cos \theta}{g} \frac{d \theta}{\cos^2 \theta} = - v \cos \theta \frac{d\, tg\, \theta}{g}$$

Se poniamo

$$\eta = \frac{tg\, \theta}{g} \qquad \varphi(\eta) = (v \cos \theta)^2 \quad \text{per la } 1^a$$

e

$$\varphi(\eta) = v \cos \theta \quad \text{per la } 2^a$$

l'incremento finito della quantità che si cerca sarà

$$D c = \int_{\eta_0}^{\eta_1} \varphi(\eta)\, d \eta$$

Sviluppando l'integrale del 2° membro con la formula di Taylor partendo dal valore medio della funzione

$$\eta_m = \frac{\eta_0 + \eta_1}{2}$$

e posto

$$D\eta = \eta_0 - \eta_1$$

sarà

$$\int_{\eta_1}^{\eta_m} \varphi(\eta)\, d\eta = \varphi_m \frac{D\eta}{2} - \varphi'_m \frac{D\eta^2}{2!\,2^2} +$$

$$+ \varphi''_m \frac{D\eta^3}{3!\,2^3} - \varphi'''_m \frac{D\eta^4}{4!\,2^4} + \varphi''''_m \frac{D\eta^5}{3!\,2^5}$$

$$\int_{\eta_m}^{\eta_0} \varphi(\eta)\, d\eta = \varphi_m \frac{D\eta}{2} + \varphi'_m \frac{D\eta^2}{2!\,2^2} +$$

$$+ \varphi''_m \frac{D\eta^3}{3!\,2^3} + \varphi'''_m \frac{D\eta^4}{4!\,2^4} + \varphi''''_m \frac{D\eta^5}{5!\,2^5}$$

e sommando membro a membro

$$D e = \varphi_m D\eta + \varphi''_m \frac{D\eta^3}{3!\,2^2} + \varphi''''_m \frac{D\eta^5}{5!\,2^4}$$

Limitando lo sviluppo al 1° termine e sostituendo alla funzione φ_m la media geometrica della velocità orizzontale alla fine ed all'inizio dell'arco sarà:

$$D_x = V \cos\varphi \cdot v \cos\theta\, \Lambda_1$$

$$D t = \sqrt{V \cos\varphi\, v \cos\theta\, \Lambda_1}$$

$$\Lambda_1 = D\left(\frac{tg\,\theta}{g}\right)$$

A questo risultato si poteva pervenire direttamente impiegando le formule del vuoto in funzione della inclinazione quando si ponga la media geometrica delle due velocità invece di quella iniziale.

d) 2ª Approssimazione.

Calcolo dei termini correttivi.

Nel calcolo di 1ª approssimazione di $D\,x$ e $D\,t$ si sono trascurati i termini d'ordine superiore al primo nello sviluppo in serie poichè si è posto:

$$D e = \sqrt{\varphi_0 \varphi_1}\, D\eta$$

invece di

$$D e = \varphi_m D\eta + \varphi''_m \frac{D\eta^3}{2^2\,3!} + \varphi''''_m \frac{D\eta^5}{2^4\,5!}$$

per cui l'errore commesso risulta espresso da:

$$\delta(D e) = (\varphi_m - \sqrt{\varphi_0 \varphi_1})\, D\eta + \varphi''_m \frac{D\eta^3}{2^2\,3!} + \varphi''''_m \frac{D\eta^5}{2^4\,5!}$$

Se si sviluppano φ_0 e φ_1 in serie partendo dal valore medio φ_m

$$\varphi_0 = \varphi_m + \varphi'_m \frac{D\eta}{2} + \varphi''_m \frac{D\eta^2}{2^2\,2!} + \varphi'''_m \frac{D\eta^3}{2^3\,3!} + \varphi''''_m \frac{D\eta^4}{2^4\,4!} \dots$$

$$\varphi_1 = \varphi_m - \varphi'_m \frac{D\eta}{2} + \varphi''_m \frac{D\eta^2}{2^2\,2!} - \dots$$

moltiplicando membro a membro

$$\varphi_0\,\varphi_1 = \varphi_m^2 + \varphi_m\,\varphi'_m\,\frac{D\eta}{2} - \varphi_m\,\varphi'_m\,\frac{D\eta}{2} - \varphi'^2_m\left(\frac{D\eta}{2}\right)^2 + \varphi_m\,\varphi''_m\,\frac{D\eta^2}{2^2\,2\,!} +$$

$$+ \varphi_m^2\,\varphi''_m\,\frac{D\eta^2}{2^2\,2\,!} + \cdots\cdots =$$

$$= \varphi_m^2 + [\varphi_m\,\varphi''_m - \varphi'^2_m]\,\frac{D\eta^2}{4}$$

estraendo la radice quadrata

$$\sqrt{\varphi_0\,\varphi_1} = \sqrt{\varphi_m^2 + (\varphi_m\,\varphi''_m - \varphi'^2_m)\,\frac{D\eta^2}{4}} = \varphi_m\left[1 + \left(\frac{\varphi''_m}{\varphi_m} - \frac{\varphi'^2}{\varphi^2_m}\right)\frac{D\eta^2}{4}\right]^{\frac{1}{2}}$$

sviluppando il 3° membro con la formula del binomio si ha

$$\sqrt{\varphi_0\,\varphi_1} \cong \varphi_m\left\{1 + \left|\frac{\varphi''}{\varphi_m} - \frac{\varphi'^2}{\varphi^2_m}\right|\frac{D\eta^2}{8}\right\}$$

per cui essendo

$$\delta\,(De) = (\varphi_m - \sqrt{\varphi_0\,\varphi_1}\,)\,D\eta + \varphi''_m\,\frac{D\eta^3}{2^2\,3!} + \cdots\cdots$$

sarà

$$\delta\,(D\,e) = \left\{\varphi_m - \varphi_m - \left|\varphi''_m - \frac{\varphi'^2}{\varphi_m}\right|\frac{D\eta^2}{8}\right\}D\eta + \varphi''_m\,\frac{D\eta^3}{24}$$

$$= \delta\,(De) = \left[-\frac{\varphi''_m}{12} + \frac{\varphi'^2_m}{8\,\varphi_m}\right]D\eta^3 + \cdots\cdots$$

Ottenuta la variazione δDe è possibile ottenere quella di $D\,x$ e $D\,t$ il cu procedimento viene omesso per brevità. Esse sono rappresentate da

$$\varepsilon_x = \frac{\beta}{6\,M}\,\mu_x$$

con

$$\mu_x = D\,(lg_{10}\,\rho) - D\,(lg_{10}\,v)$$

$$\beta = lg_{10}\,(V\cos\varphi) - lg_{10}\,(v\cos\theta)$$

$$\varepsilon_t = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_x - \frac{\beta^2}{12\,M}\right)$$

e) Calcolo di Dy.

Viene calcolato in 1ª approssimazione con la relazione:

$$Dy = V\cos\varphi\cdot v\cos\theta\,\frac{D\,tg\,\theta}{2\,g} = V\cos\varphi\cdot v\cos\theta\,\Lambda_z \qquad \text{con } \Lambda_z = \frac{D\,tg^2\,\theta}{2\,g}$$

ed il relativo termine correttivo è:

$$\varepsilon_y = \frac{\beta}{6\,M}\,\mu_y$$

con

$$\mu_y = \mu_x + \lambda_2$$

ove

$$\lambda_2 = \frac{M D \, tg\, \theta}{(tg\, \theta)_m} = \frac{2 M \Lambda_1}{\Lambda} = 0,8686 \, \frac{\text{sen}\, D\theta}{\text{sen}\,(\varphi + \theta)}$$

e

$$\Lambda = \frac{tg\, \varphi + tg\, \theta}{g}$$

f) Calcoli pratici.

In pratica i termini correttivi $\varepsilon_{x,y,t}$ si calcolano come segue:

$D\, lg\, v$ e $D\, lg\, \rho$ si hanno perchè sono noti $lg\, v$ e $lg\, \rho$ in ogni punto.

Il coefficiente λ_2 è funzione di elementi noti e per semplicità può essere dato da una apposita tavola, $\frac{\beta}{6M}$ e μ sono calcolabili.

Per questi calcoli si porranno per $lg\, v$ e $lg\, \rho$ i valori di 1ª approssimazione.

g) Riepilogo dei calcoli.

Sono dati

$$\varphi, \quad \theta, \quad \rho_0 = \frac{C g}{i} e^{-hy_0} F(v)$$

$$n_0 = n(V) \qquad m_0 = n_0 + h \frac{V^2}{g}$$

$$d\rho = -\rho_0 (n_0 \rho_0 + m_0 \,\text{sen}\, \varphi) [\xi_0(\varphi) - \xi_0(\theta)]$$

1) Calcolo dei valori approssimati

$$\rho_m = \rho_0 + \frac{d\rho}{2}$$

$$lg_{10}(v \cos \theta) = lg_{10}(V \cos \varphi) - \beta_a$$

$$\beta_a = \rho_m M [\xi_0(\varphi) - \xi_0(\theta)]$$

$$Dx_{1a} = V \cos \varphi \,(v \cos \theta)_{1a} \Lambda_1$$

$$Dy_{1a} = V \cos \varphi \,(v \cos \theta)_{1a} \Lambda_2$$

$$v_{1a} = \frac{(v \cos \theta)_{1a}}{\cos \theta}$$

$$y_{1a} = y_0 + Dy_{1a}$$

$$\Lambda_1 = \frac{D\, tg\, \theta}{g}$$

$$\Lambda_2 = \frac{D\, tg^2\, \theta}{g}$$

$$\Lambda = \frac{tg\, \varphi}{g} + \frac{tg\, \theta}{g}$$

$$Dt_{1a} = \sqrt{V \cos \varphi \,(v \cos \theta)_{1a}}\; \Lambda_1$$

Coi calcoli di 1ª approssimazione si calcola

$$\rho_{1a} = \frac{i}{Cg} e^{-hy_{1a}} F(V)_{1a}$$

2) Calcolo dei termini correttivi.

$$D\rho_a = \rho_{1a} - \rho_0 \qquad \varepsilon = D\rho_a - d\rho$$

$$\varepsilon_\beta = \varepsilon \frac{MD\xi}{3} \qquad M = \frac{1}{2,302585}$$

$$\mu_x = D(lg_{10}\rho)_{1a} - D(lg_{10}v)_{1a}$$

$$\varepsilon_x = \frac{\beta_{1a}}{6M}\mu_x \qquad \varepsilon_y = \frac{\beta_{1a}}{6M}\mu_y$$

$$2\varepsilon_t = \varepsilon_x - \frac{\beta^2_{1a}}{12M} \qquad \mu_y = \mu_x + \lambda_2$$

$$\lambda_2 = 0{,}8686 \frac{\operatorname{sen} D\theta}{\operatorname{sen}(\varphi + \theta)} = 2M\frac{\Lambda_1}{\Lambda}$$

h) Calcoli definitivi.

$$lg_{10}v_1 = lg_{10}v_{1a} - \varepsilon_\beta$$

$$lg_{10}Dx = lg_{10}Dx_{1a} + (\varepsilon_x - \varepsilon_\beta); \qquad x_1 = x_0 + Dx$$

$$lg_{10}[Dy] = lg_{10}[Dy_{1a}] + (\varepsilon_y - \varepsilon_\beta); \qquad y_1 = y_0 + Dy$$

$$lg_{10}Dt = lg\,Dt_{1a} + \frac{\pm\varepsilon t - \varepsilon\beta}{2}; \qquad t_1 = t_0 + Dt$$

i) Criterio per fissare l'ampiezza dell'arco.

Per fissare l'ampiezza dell'arco ci si basa sulle ipotesi seguenti:

Quando il primo termine dell'errore calcolato non oltrepassa un certo limite, (limite che verrà definito in seguito), il resto dell'errore trascurato è inferiore al quinto di detto primo termine.

Tale ipotesi è basata sull'esperienza acquisita nel calcolo di numerosissime traiettorie.

l) Limitazione degli errori sulle velocità.

Si è visto che gli errori su $lg\,v$ sono uguali agli errori su $\rho_i\,MD\,\xi$. Partiamo perciò dallo sviluppo in serie di ρ_i per fissare la limitazione.

Si ha:

$$\rho_i = \rho_0 + \frac{d\rho}{2} + \frac{D\rho - d\rho}{3} + \left(\frac{\rho''}{18} - \frac{\rho'''}{24}\right)D\xi^3$$

I due primi termini condizionano i valori approssimati di β e di $lg\,v_1$, il terzo determina il termine correttivo, dovremo quindi limitare ε_β già calcolato, sce-

gliendo come limite quello che corrisponde a $\frac{1}{500}$ di correzione relativa su v_1. Sarà:

$$\frac{\delta v_1}{v_1} = \delta M \, lg \, v_1 \leq \frac{\varepsilon_\beta}{M} \leq \frac{1}{500}$$

Secondo quanto è stato detto precedentemente, l'esperienza dimostra che, in queste condizioni, l'errore residuo relativo è sempre inferiore a $\frac{1}{25000}$.

m) LIMITAZIONE DEGLI ERRORI PER *De*.

Analogamente a quanto è stato fatto per le velocità occorrerà limitare gli errori sugli altri elementi e, tenuto conto che le correzioni relative ai vari elementi possono o non essere dello stesso segno, dovremo limitare

$$|\varepsilon_e| + |\varepsilon_\beta| \text{ se si tratta di } Dx;\ Dy;\ Ds$$

$$|\varepsilon_t| + \left|\frac{\varepsilon_\beta}{2}\right| \text{ se si tratta di } Dt.$$

Sceglieremo perciò come limite quello che corrisponde a $\frac{1}{100}$ di correzione relativa nell'elemento ossia

$$\frac{\delta De}{De} = \delta \, lg \, e = \frac{|\varepsilon_e| + |\varepsilon_\beta|}{M} \leq \frac{1}{100}$$

$$\varepsilon_e + \varepsilon_\beta \leq \frac{M}{100} \qquad \text{per } Dx;\ Dy;\ Ds$$

$$\frac{\delta D_e}{D_e} = \frac{|\varepsilon_e| + \left|\frac{\varepsilon_\beta}{2}\right|}{M} \leq \frac{1}{100}$$

ossia

$$\varepsilon_e + \frac{\varepsilon_\beta}{2} \leq \frac{M}{100} \qquad \text{per } Dt$$

Ora l'esperienza dimostra che, in queste condizioni, l'errore residuo relativo è sempre inferiore ad $\frac{1}{500}$.

n) CASO IN CUI v_1 E *De* SONO PICCOLI.

Quando uno degli elementi v_1; *Dx*; *Dy*; *Ds*; *Dt* è piccolo, è superfluo esigere la stessa precisione relativa nel calcolo dell'elemento stesso.

Ciò equivarrebbe ad imporsi un errore assoluto estremamente piccolo, mentre il rimanente del calcolo non presenterebbe lo stesso grado d'esattezza. Perciò a partire da un determinato valore di v_1 e *De*, basterà limitare la correzione assoluta.

Tali valori pratici potrebbero essere fissati come segue:

$$V = 100 \text{ m/s} \qquad De = 50 \text{ m.} \qquad De = 0''5$$

Dato che l'errore relativo residuo è praticamente sempre inferiore a $^1/_5$ della correzione, gli errori assoluti limiti risulteranno:

$$\frac{1}{5}\,\frac{100}{500} = 0{,}04 \text{ m. su } v_1$$

$$\frac{1}{5}\,\frac{50}{100} = 0{,}1 \text{ m. su } D\,x;\ D\,y;\ D\,s$$

$$\frac{1}{5}\,\frac{0''5}{100} = 0''001 \text{ su } D\,t$$

o) Ampiezza massima degli archi.

Per fissare a priori l'ampiezza dell'arco in modo da non superare i limiti imposti precedentemente, occorrerebbe eseguire un lungo calcolo, quasi quanto quello di un intero arco. È preferibile procedere per estrapolazione basandosi su risultati del calcolo precedente.

Calcolato un arco si verifica se si è nei limiti prefissati oppure, come si fa normalmente, si valuta l'ampiezza massima dell'arco, detta ampiezza di sicurezza che avrebbe potuto essere adottata.

Tale dato servirà di base per il calcolo dell'arco successivo e può essere dedotto o mediante il calcolo oppure mediante l'impiego di un abaco.

Si è visto che l'influenza del termine correttivo $\delta\rho_m$ nel valore della velocità è rappresentato da

$$\varepsilon_\beta = \frac{[illegible]\, M\, D\,\xi}{[illegible]}$$

Tale valore è del 3° ordine rispetto a $D\xi$ che a sua volta è funzione dell'ampiezza dell'arco $\varphi - \theta$.

Se indichiamo con $(\varphi - \theta)_{max}$ la massima ampiezza dell'arco compatibile con l'errore prefissato ed indichiamo con

$$f_\beta = \frac{(\varphi - \theta)_{max}}{\varphi - \theta}$$

perchè non sia superato l'errore imposto nelle velocità che come si è visto è $20\,M\,10^{-4}$ dovrà essere:

$$\varepsilon_\beta\, f_\beta^3 \leq 20\,M\,10^{-4} = 8{,}68$$

da cui si ricaverà

$$f_\beta = \sqrt[3]{\frac{8{,}68}{\sqrt{\varepsilon_\beta}}}$$

e quindi

$$(\varphi - \theta)_{max} = f_\beta\,(\varphi - \theta)$$

p) Applicazione.

Cannone da 105 - Granata mod. 32.

Calcolo della traiettoria relativa ai seguenti dati iniziali:

$V = 810$; $\varphi = 40°$; $log \frac{C}{i} = 0{,}48323$; $\delta_0 = 1{,}000$; $h = 0{,}0^3 107$

φ°	40°
θ°	39°
$\log F(v)$	2,30042
$\mathrm{colg}\,\frac{C_g}{i}$	$\bar{2}$,52532
$\log \delta_o$	—
$\log \rho_o$	0,82574
ρ_o	6,6948
$n_o = n(v)$	1,482
$\log h$	$\bar{4}$,02938
$\log V^2$	5,81698
$\mathrm{colg}\, g$	$\bar{1}$,00855
$\log \frac{h V^2}{g}$	0,85491
$\frac{h V^2}{g}$	7,160
$m_o = n_o + \frac{h V^2}{g}$	8,642
$\log m_o$	0,93661
$\log \mathrm{sen}\, \varphi$	$\bar{1}$,80807
$\log m_o \,\mathrm{sen}\, \varphi$	0,74468
$\log n_o$	0,17085
$\log \rho_o$	0,82574
$\log n_o \rho_o$	0,99659
$n_o \rho_o$	9,922
$m_o \,\mathrm{sen}\, \varphi$	5,555
$n_o \rho_o + m_o \,\mathrm{sen}\, \varphi$	15,477
$\log_{10} tg \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$	0,33 33
$\log_{10} tg \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)$	0,32150
$\log_{10} tg \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) - \log_{10} tg \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{8}\right) = MD\xi$	0,00983
$\log \rho_o$	0,82574
$\log (n_o \rho_o + m_o \,\mathrm{sen}\, \varphi)$	1,18969
$\log MD\xi$	$\bar{3}$,99255
$\mathrm{colg}\, M$	0,36222
$\log d\rho$	0,37020
$d\rho$	−2,3453

Calcolo dei valori approssimati

$\frac{d\rho}{2}$	−1,1727
$\rho_m = \rho_o + \frac{d\rho}{2}$	5,5221
$\log \rho_m$	0,74210
$\log MD\xi$	$\bar{3}$,99255
$\log \beta_a$	$\bar{2}$,73465
β_a	0,05430
$\log V$	2,90849

$\log \cos \varphi$	$\bar{1}$,88425
$\log V \cos \varphi$	2,79274
$\log_{10} (v \cos \theta)_{1a} = \log_{10} V \cos \varphi - \beta_a$	2,73844
$\mathrm{colg} \cos \theta$	0,10950
$\log v_{1a}$	2,84794
v_{1a}	704,6
$\log \mathrm{sen} (\varphi - \theta)$	$\bar{2}$,24186
$\mathrm{colg}\, g$	$\bar{1}$,00855
$\mathrm{colg} \cos \varphi$	0,11575
$\mathrm{colg} \cos \theta$	0,10950
$\log \Lambda_1$	$\bar{3}$,47566
$\log \mathrm{sen} (\varphi + \theta)$	$\bar{1}$,99195
$\mathrm{colg}\, 2$	$\bar{1}$,69897
$\mathrm{colg} (\cos \varphi \cos \theta)$	0,22525
$\log \Lambda_2$	$\bar{3}$,39183
$\log V \cos \varphi$	2,79274
$\log (v \cos \theta)_{1a}$	2,73844
$\log \Lambda_2$	$\bar{3}$,39183
$\log Dy_a$	2,92301
$y_{1a} = 0 + Dy_a$	837,6
$F(v)_{1a}$	161,30
$e^{-hy_{1a}}$	0,9143
$\mathrm{colg}\, \frac{Cg}{i}$	$\bar{2}$,52532
$\log F(v)_{1a}$	2,21245
$\log e^{-hy_{1a}}$	$\bar{1}$,96108
$\log \rho_{1a}$	0,69885
ρ_{1a}	4,9986
ρ_o	6,6948
$D\rho_a$	−1,6962
$d\rho$	−2,3453
ε	0,6491
$\log \varepsilon$	$\bar{1}$,81231
$\mathrm{colg}\, 3$	$\bar{1}$,52288
$\log MD\xi$	$\bar{3}$,99255
$\log \varepsilon_\beta$	$\bar{3}$,32774
$10^4 \varepsilon_\beta$	21,3
$\log 0{,}8686$	$\bar{1}$,93882
$\log \mathrm{sen}\, D\theta$	$\bar{2}$,24186
$\mathrm{colg}\, \mathrm{sen} (\varphi + \theta)$	0,00805
$\log \lambda_2$	$\bar{2}$,18873
$10^4 \lambda_2$	154,4
$\log \rho_{1a}$	0,69885
$\log \rho_o$	0,82574
$10^4 (\log \rho_o - \log \rho_{1a}) = 10^4 D(\log \rho)_a$	1268,9
$\log V_{1a}$	2,84794
$\log V_o$	2,90849
$10^4 (\log V_o - \log V_{1a}) = 10^4 D(\log V)_a$	605,5
$-10^4 \mu_x$	663,4
$-10^4 \mu_y$	509,0
$\log \beta_a$	$\bar{2}$,73465
$\mathrm{colg}\, 6M$	$\bar{1}$,58407

$\log 10^4 \mu_y$	2,70672	D_y	831
$\log 10^4 \varepsilon_y$	1,02544	$\log (V \cos \varphi \, (v \cos \theta)_{1a})$	5,53118
$10^4 \varepsilon_y$	−10,6	$\log \Lambda_1$	3,47566
$\log \varrho_a$	$\bar{2}$,73465	$\log D x_{1a}$	3,00684
colg $6 M$	$\bar{1}$,58407	$\varepsilon_x - \varepsilon_\beta$	0,00351
$\log 10^4 \mu_x$	2,82178	$\log D x$	3,00333
$\log 10^4 \varepsilon_x$	1,14050	$D x$	1008
$10^4 \varepsilon_x$	−13,8	$\log \sqrt{V \cos \varphi \, (V \cos \theta)_{1a}}$	2,76559
$\log \varrho^2_a$	$\bar{3}$,46930	$\log \Lambda_1$	$\bar{3}$,47566
colg $6 M$	$\bar{1}$,58407	$\log D t_{1a}$	0,24125
$\log \varrho^2_a / 6 M$	$\bar{3}$,05337	$\frac{1}{2} (2 \varepsilon_l - \varepsilon_\beta)$	− 0,00232
$10^4 \varrho^2_a / 6 M$	11,3	$\log D t$	0,23893
$10^4 \varepsilon_l = 10^4 \varepsilon_x - 10^4 \frac{\varrho^2_a}{6 M}$	−25,1	$D t$	1,733
Calcoli definitivi.		$\log v_{1a}$	2,84794
$\varepsilon_y - \varepsilon_\beta$	− 0,00319	ε_β	0,00213
$\log D_{ya}$	2,92301	$\log v$	2,84581
$\log D_y$	2,91982	v	701,2

Confrontando questi risultati con quelli ottenuti, per lo stesso arco, impiegando il metodo « Siacci » le differenze sono praticamente trascurabili.

	x	y	t	V
Siacci	1000	832	1,738	701,2
G. H. M. ...	1008	831	1,733	701,2
Differenze ..	1	1	0,005	0

8 – Metodi americani.

1° – Integrazione di una funzione col metodo delle differenze.

a) Sia $f(t)$ una certa funzione di t, continua l'intervallo nel quale varia t, e che ammette derivate uniche e finite in tutti i punti, sino all'ordine che necessita.

Si definisce con differenza ennesima e si indica col simbolo $\Delta_n f(t_i)$, la quantità:

$$\Delta_n f(t_i) = \Delta_{n-1} f(t_i) - \Delta_{n-1} f(t_{i-1})$$

e per poter calcolare detta differenza, è necessario:

a) che siano noti i primi n valori della funzione, e che sia anche noto il valore di $f(t)$ nel punto $t = t_0$;

b) che tutti i valori della funzione siano calcolati per t in progressione aritmetica, la cui ragione sia T.

b) Sia:

$$\left(\frac{d^n f}{dt^n}\right)_{t = t_i}$$

la derivata ennesima della funzione f calcolata per $t = t_i$; si ha:

$$\left(\frac{d^n f}{dt^n}\right)_{t = t_i} = \left(\frac{\Delta_n f}{T^n} + \varepsilon_n\right)_{t = t_i} \qquad [1]$$

dove ε_n è una quantità tale che:

$$\lim_{T \to 0} \varepsilon_n = 0$$

La [1] si può dimostrare col principio dell'induzione incompleta e cioè, se essa è soddisfatta per $n = 1,2 \ldots\ldots$ si ritiene che lo sia per n qualunque.

Per $n = 1$ si ha:

$$\frac{df}{dt} = \lim_{T \to 0} \frac{f(t+T) - f(t)}{T}$$

quindi può scriversi che:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\Delta f}{T} + \varepsilon_1 \qquad [a]$$

e:

$$\lim_{T \to 0} \varepsilon_1 = 0$$

Per $n = 2$ può scriversi:

$$f'(t) = F(t)$$

e quindi può applicarsi la [a] alla $F(t)$, cioè può porsi:

$$F'(t) = \frac{\Delta F(t)}{T} + \varepsilon'_2$$

e sostituendo ad $F(t)$ il suo valore dato dalla [a] si ha:

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = \frac{\Delta\left(\frac{\Delta f}{T} + \varepsilon_1\right)}{T} + \varepsilon'_2 = \frac{\Delta_2 f}{T^2} + \varepsilon_2$$

dove:

$$\lim_{T \to 0} \varepsilon_2 = 0$$

Analogamente può dimostrarsi la [1] per $n = 3,4 \ldots\ldots$

c) Sia

$$\frac{dx}{dt} = f(t) \qquad [2]$$

una equazione differenziale del primo ordine, che deve essere integrata nell'intervallo

$$t_i - t_{i-1} = T$$

si ha quindi:

$$x_i - x_{i-1} = \Delta x_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t)\, dt = \int_0^T f(t)\, dt \qquad [3]$$

L'integrale può anche calcolarsi sviluppando in serie $f(t)$, immaginando noto il valore di $f(t_i)$ e delle sue derivate, e ponendo $h = t - t_i$ e tenendo presente che $t_i > t$, si ha: (Taylor)

$$f(t) = f(t_i) - hf'(t_i) - \frac{h^2}{2'} f'(t_i) - \frac{h^3}{3'} f''(t_i) - \ldots\ldots - \frac{h^n}{n!} f^n(t_i) + R \qquad [3']$$

dove R è il resto.

Sostituendo il valore della [3'] nella [3], ed integrando si ha, perchè $dh = dt$

$$\Delta x_i = \int_0^T \left(f(t_i) - hf'(t_i) - \frac{h^2}{2!} f''(t_i) - \ldots\ldots + R \right) dh \qquad [3'']$$

cioè:

$$\Delta x_i = T \left[f(t_i) - \frac{T}{2} f'(t_i) - \frac{T^2}{2!\,3} f''(t_i) - \frac{T^3}{3!\,4} f'''(t_i) - \right.$$

$$\left. - \ldots\ldots \frac{T^n}{n!\,(n+1)} f^n(t_i) \right] + TR \qquad [3''']$$

e sostituendo alle $f'(t_i)$, $f''(t_i)$ ..... i loro valori, in funzione delle differenze, date dalla [1], si ha:

$$\Delta x_i = T \left[f(t_i) - \frac{\Delta_1 f}{2} - \frac{\Delta_2 f}{6} - \frac{\Delta_3 f}{24} - \ldots\ldots \frac{\Delta_n f}{n!\,(n+1)} \right] +$$

$$+ TR - T\frac{\varepsilon_1}{2} - T\frac{\varepsilon_2}{6} - T\frac{\varepsilon_3}{24} - \ldots\ldots - T\frac{\varepsilon_n}{n!\,(n+1)} \qquad [4]$$

Il termine:

$$TR - T\frac{\varepsilon_1}{2} - T\frac{\varepsilon_2}{6} - \ldots\ldots = Q$$

tende a zero, col tendere a zero dell'intervallo T.

Ne deriva che, perchè Δx_i sia calcolato con buona approssimazione, è necessario che l'intervallo T sia piccolo.

2° – Integrazioni della traiettoria.

I metodi americani d'integrazione della traiettoria sono dovuti, prevalentemente, al Maggiore Moulton e si basano su i seguenti principi:

a) non vengono impiegate nel calcolo funzioni trigonometriche;

b) il personale addetto al calcolo delle traiettorie può non essere specializzato;

c) viene presa come variabile indipendente il tempo;

d) per applicarli è necessario calcolare, con altri metodi, i primi 3 archi, in maniera però che l'intervallo di tempo sia T; detto intervallo verrà poi tenuto costante per tutti gli altri archi in calcolo.

1° *Metodo*.

Le equazioni del moto sono:

$$\left. \begin{array}{lll} \dfrac{d\,(v\cos\theta)}{dt} = - f(v)\cos\theta & & \dfrac{dv}{dt} = - f(v)\cos\theta - g \\[2ex] \dfrac{v\,\mathrm{sen}\,\theta}{v\cos\theta} = tg\,\theta & \dfrac{dx}{dt} = v\cos\theta & \dfrac{dy}{dt} = v\,\mathrm{sen}\,\theta \end{array} \right\} \qquad [5]$$

e ponendo:

$$v \cos \theta = u \qquad v \operatorname{sen} \theta = w \qquad \frac{f(v)}{v} = b$$

si hanno le:

$$\left.\begin{array}{lll} \dfrac{du}{dt} = - bu & \dfrac{dw}{dt} = - (bw + g) & \\ \dfrac{w}{u} = tg\, \theta & \dfrac{dx}{dt} = u & \dfrac{dy}{dt} = w \\ b = \dfrac{\delta_0 i}{C} e^{-ay} \dfrac{F(v)}{v} & & \end{array}\right\} \qquad [5']$$

Le u, w, x, y, si calcolano col metodo delle differenze.

Applicando l'equazione [4] al caso in esame si ha, indicando con u_0, w_0, x_0, y_0, le grandezze relative all'inizio dell'arco e con u_1, w_1, x_1, y_1, quelle alla fine dello stesso:

$$\left.\begin{array}{l} u_1 - u_0 = - T \left| (bu)_1 - \frac{1}{2} \Delta_1 (bu)_1 - \frac{1}{6} \Delta_2 (bu)_1 - \frac{1}{24} \Delta_3 (bu)_1 \right. \\ w_1 - w_0 = - T \left| (bw + g)_1 - \frac{1}{2} \Delta_1 (bw + g)_1 - \frac{1}{6} \Delta_3 (bw + g)_1 - \right. \\ \qquad \left. - \frac{1}{24} \Delta_3 (bw + g)_1 \right| \\ x_1 - x_0 = T \left| u_1 - \frac{1}{2} \Delta_1 u_1 - \frac{1}{6} \Delta_2 u_1 - \frac{1}{24} \Delta_3 u_1 \right| \\ y_1 - y_0 = T \left| w_1 - \frac{1}{2} \Delta_1 w_1 - \frac{1}{6} \Delta_2 w_1 - \frac{1}{24} \Delta_3 w_1 \right| \\ tg\, \theta_1 = \dfrac{w_1}{v_1} \qquad v_1 = \sqrt{w_1^2 + u_1^2} \end{array}\right\} \qquad [6]$$

Per calcolare le [6] è necessario conoscere; il valore $(bu)_1$, $(bw + g)_1$ e si fa quindi l'ipotesi che:

$$\Delta_3 (bu)_0 = \Delta_3 (bu)_1 \quad \text{e} \quad \Delta_3 (bw + g)_0 = \Delta_3 (bw + g)_1;$$

si calcolano poi le differenze seconde, prime, ed i valori di $(bu)_1$ e $(bw + g)_1$ e quindi le u_1, w_1; ed y_1 e si prova, calcolando b_1, se i valori $(bu)_1$ e $(bw + g)_1$, avuti in base all'ipotesi fatta, sono esatti: se il divario è forte, si ripete il calcolo con i nuovi valori di $(bu)_1$ e $(bw + g)_1$.

Ottenuti così i valori di u_1 e w_1 esatti, si calcolano le x_1 y_1 θ_1 v_1.

2° Metodo.

Da

$$g\,dt = - \frac{v\,d\theta}{\cos\theta}$$

si ha, moltiplicando entrambi i termini per $\frac{1}{\cos\theta}$, e ricordando che $\frac{d\theta}{\cos^2\theta} = d\, tg\, \theta$,

$$d\, tg\, \theta = - \frac{g}{v \cos\theta} dt = - \frac{g\,dt}{u}$$

Il sistema di equazioni differenziali è quindi, per la prima delle [5']

$$\left.\begin{aligned} d\,tg\,\theta &= -\frac{g\,dt}{u} \\ \frac{du}{u} &= -b\,dt \end{aligned}\right\} \qquad [7]$$

Anche a queste due equazioni si può applicare la [4] e si hanno le:

$$\left.\begin{aligned} \log_{10} u_1 - \log_{10} u_0 &= -MT\left|b_1 - \frac{1}{2}\Delta_1 b_1 - \frac{1}{6}\Delta_2 b_1 - \frac{1}{24}\Delta_3 b_1\right| \\ tg\,\theta_1 - tg\,\theta_0 &= -T\left[\frac{1}{u_1} - \frac{1}{2}\Delta_1\left(\frac{1}{u}\right)_1 - \frac{1}{6}\Delta_2\left(\frac{1}{u}\right)_1 - \frac{1}{24}\Delta_3\left(\frac{1}{u}\right)_1\right] \end{aligned}\right\} \qquad [7']$$

ma

$$tg\,\theta_1 = \frac{w_1}{u_1} \qquad tg\,\theta_0 = \frac{w_0}{u_0} \qquad \mathrm{M} = 0{,}43429448$$

quindi si hanno le seguenti formule definitive:

$$\left.\begin{aligned} \log_{10} u_1 - \log_{10} u_0 &= -MT\left|b_1 - \frac{1}{2}\Delta_1 b_1 - \frac{1}{6}\Delta_2 b_1 - \frac{1}{24}\Delta_3 b_1\right| \\ w_1 &= u_1\frac{w_0}{u_0} - gu_1 T\left[\frac{1}{u_1} - \frac{1}{2}\Delta_1\left(\frac{1}{u}\right)_1 - \frac{1}{6}\Delta_2\left(\frac{1}{u}\right)_1 - \frac{1}{24}\Delta_3\left(\frac{1}{u}\right)_1\right] \end{aligned}\right\} \qquad [8]$$

Per il calcolo delle altre grandezze si applicano le [6].

Anche per le [8] si fa l'ipotesi che $\Delta_3 b_0 = \Delta_3 b_1$ e quindi si ha senz'altro $\log_{10} u_1$; si calcola poi w_1 e y_1 e si verifica se il b_1 introdotto nel calcolo è quello esatto.

Si calcolano poi gli altri elementi.

3° Metodo.

$$\frac{du}{dt} = -f(v)\cos\theta = -\frac{f(v)}{v^2}\,uv$$

ma:

$$f(v) = \frac{\delta\,i}{C}\,F(v) = \frac{\delta_0\,i}{C}\,e^{-ay}\,F(v)$$

e ponendo

$$c = \frac{\delta_0\,i}{C} \qquad \frac{F(v)}{v^2} = K(v) \qquad \frac{du}{dt} = -c\,K(v)\,e^{-ay}\,vu$$

Dividendo la precedente per u^2 si ha l'equazione

$$\frac{1}{u^2}\frac{du}{dt} = -c\,K(v)\,e^{-ay}\,\frac{v}{u} \qquad [9]$$

Nella [9] $K(v)\,\frac{v}{u} = \Phi(v, \theta)$ può essere data da una tabella a doppia entrata, oppure da un abbaco; ricordando poi che:

$$-\frac{1}{u^2}\frac{du}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{u}\right)$$

si ha l'equazione definitiva:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{u}\right) = ce^{-ay}\Phi(v, \theta) = R \qquad [9']$$

Applicando la [4] alla [9'] si ha:

$$\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_0} = T[R_1 - \Delta_1 R_1 - \Delta_2 R_1 - \Delta_3 R_1] \qquad [10]$$

Analogamente a quello che è stato detto in precedenza, anche per il calcolo della [10] si fa l'ipotesi che $\Delta_3 R_0 = \Delta_3 R_1$. La [9'] può essere calcolata anche direttamente prendendo per R un valore medio, ed operando per successive approssimazioni. Le altre grandezze si calcolano con le [8] e le [6].

3° – Calcolo dei primi tre archi.

I primi tre archi debbono essere calcolati con un altro metodo.

Integrando direttamente le [5'] considerando b costante nell'arco si ha:

$$\left.\begin{aligned} &\log_{10} u_1 - \log_{10} u_0 = -MbT \\ &\log_{10}(bw_1 + g) - \log_{10}(bw + g) = -MbT \\ &tg\,\theta_1 = \frac{w_1}{u_1} \end{aligned}\right\} \qquad [11]$$

Le x e le y si calcolano facendo l'ipotesi che u e w nell'intervallo considerato, varino con legge lineare rispetto al tempo, quindi si ha:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= T\frac{u_0 + u_1}{2} + x_0 \\ y_1 &= T\frac{w_0 + w_1}{2} + y_0 \end{aligned}\right\} \qquad [11']$$

Per calcolare le [11] e le [11'] si fanno successive approssimazioni.

1ª Approssimazione: si considera $b = b_0$ e si calcolano u_1 w_1 e y_1.

2ª Approssimazione: si calcola $b' = \frac{b_0 + b_1'}{2}$ dove b_1' è quello della prima approssimazione e si ripete il calcolo di u_1, w_1 e y_1, alla fine si ricalcola il b', e se questo è uguale al precedente si calcolano gli altri elementi; se è molto diverso si può fare una terza approssimazione, oppure si varia T e si comincia tutto da capo, perchè si può essere sicuri che l'intervallo considerato è molto ampio.

4° – Applicazione.

Dati: $V = 400$; $\varphi = 30°$; $\frac{C}{i} = 1$; $\delta_0 = 1$ all'origine, determinare gli elementi dell'estremo dell'arco corrispondente a $t = 1''$

$$x'' = -\frac{\delta i}{C}\frac{F(v)}{V}x' \qquad x' = V\cos\varphi \text{ in 1ª approssimazione}$$

$$y'' = -\frac{\delta i}{C}\frac{F(v)}{V}y' - g \qquad y' = V\,\text{sen}\,\varphi \text{ in 1ª approssimazione}$$

$$x' = v \cos\theta = V \cos\varphi - x''$$
$$y' = v \operatorname{sen}\theta = V \operatorname{sen}\varphi - y''$$
$$v^2 = x'^2 + y'^2 ; \qquad tg\,\theta = \frac{y'}{x'}$$

$$F(v) = 51{,}53$$

$\log \frac{\delta i}{C}$	$= 0,$	$\log V$	$= 2{,}60206$
$\log F(v)$	$= 1{,}71206$	$\log \cos\varphi$	$= \bar{1}{,}93753$
$\log \cos\varphi$	$= \bar{1}{,}93753$	$\log V \cos\varphi$	$= 2{,}53959$
$\log x''$	$= 1{,}64959$	$V \cos\varphi$	$= 346{,}42$
x''	$= -44{,}63$	x''	$= 44{,}63$
		$v \cos\theta$	$= 301{,}79 = x'$

$\log \frac{\delta i}{C} F(v)$	$= 1{,}71206$	$\log V$	$= 2{,}60206$
$\log \operatorname{sen}\varphi$	$= \bar{1}{,}69897$	$\log \operatorname{sen}\varphi$	$= \bar{1}{,}69897$
$\log \frac{\delta i}{C} \frac{F(v)}{V} y'$	$= 1{,}41103$	$\log V \operatorname{sen}\varphi$	$= 2{,}30103$
$\frac{\delta i}{C} \frac{F(v)}{V} y'$	$= 25{,}76$	$V \operatorname{sen}\varphi$	$= 200{,}00$
g	$= 9{,}81$	y''	$= 35{,}57$
y''	$= -35{,}57$	$v \operatorname{sen}\theta$	$= 164{,}43 = y'$

$$x'^2 = 91077$$
$$x'^2 = 27027$$
$$V^2 = 118104$$
$$V = 344$$

$$tg\,\theta = \frac{y'}{x'} = 0{,}5448; \quad \theta = 28°35'$$

9 – Metodo Picone.

a) Generalità.

Come noto, le equazioni del moto si possono scrivere,

$$\frac{dv}{dt} = -c\,e^{-dy} F(v) - g \operatorname{sen}\theta$$
$$\frac{d\theta}{dt} = -g \frac{\cos\theta}{v}$$
$$\frac{dy}{dt} = v \operatorname{sen}\theta$$
$$\frac{dx}{dt} = v \cos\theta$$
$$x(0) = 0, \quad y(0) = 0, \quad \theta(0) = \varphi, \quad v(0) = V$$

Nel metodo d'integrazione del prof. Picone anzichè l'inclinazione θ si considera il suo seno e porremo

$$\operatorname{sen}\theta = s$$

Con chè le equazioni del moto assumono la forma

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dv}{dt} = -ce^{-dy}F(v) - gs \\ &\frac{ds}{dt} = -\frac{g}{v}(1 - s^2) \\ &\frac{dy}{dt} = vs \\ &\frac{dx}{dt} = v\sqrt{1 - s^2} \\ &x(0) = 0, \ y(0) = 0, \ s(0) = \operatorname{sen}\varphi, \ v(0) = V \end{aligned}\right\} \quad [2]$$

Calcoleremo gli integrali v, s, y, legati dal sistema delle prime 3 equazioni, di minuto secondo in minuto secondo, cominciando dall'istante iniziale $t = 0$, applicando il metodo di integrazione di Cauchy - Lipschitz, esposto dal prof. Picone per esteso nella sua memoria « L'applicazione del metodo Cauchy - Lipschitz all'integrazione del sistema di equazioni differenziali della balistica esterna. Atti dell'Accademia « Leonardo da Vinci » di Napoli.

Diviso perciò il primo secondo del moto in n parti uguali, mediante i punti $0, t_1, t_2, \ldots . t_{n-1}, \ t_n = 1$, si avrà dalle [2]

$$s'(0) = -\frac{g}{v(0)}[1 - s(0)^2]$$

$$y' 0 = v(0)\, s(0)$$

$$v'(0) = -gs(0) - ce^{-dy(0)}F[v(0)]$$

poichè derivando le prime tre delle (2) si ha

$$\left.\begin{aligned} s''(t) &= \frac{g}{v^2}[(1 - s^2)\, v'(t) + 2\, sv\, s'(t)] \\ y''(t) &= v'\, s(t) + v\, s'(t) \\ v''(t) &= -gs'(t) + ce^{-dy}[dF(v)\, y'(t) - F'(v)\, v'(t)] \end{aligned}\right\} \quad [3]$$

esse danno

$$s''(0) = \frac{g}{v^2(0)}[(1 - s^2(0)\, v'(0) + 2\, s(0)\, v(0)\, s'(0)]$$

$$y''(0) = v(0)\, s'(0) + s(0)\, v'(0)$$

$$v''(0) = -gs'(0) + ce^{-dy(0)}[(dF[v(0)]\, y'(0) - F'[v(0)]\, v'(0)]$$

pertanto, applicando il metodo sopra ricordato porremo nel punto t_1

$$v(t_1) = v(0) + t_1 v'(0) + \frac{t_1^2}{2} v''(0)$$

$$s(t_1) = s(0) + t_1 s'(0) + \frac{t_1^2}{2} s''(0)$$

$$y(t_1) = y(0) + t_1 y'(0) + \frac{t_1^2}{2} y''(0)$$

Ottenuti così i valori approssimati di v, s, y, nel punto t_1 le [2] e [3] danno i valori approssimati delle derivate prime e seconde di dette funzioni nello stesso punto t_1, e dopo ciò potremo porre:

$$v(t_2) = v(t_1) + (t_2 - t_1)\, v'(t_1) + \frac{(t_2 - t_1)^2}{2!}\, v''(t_1)$$

$$s(t_2) = s(t_1) + (t_2 - t_1)\, s'(t_1) + \frac{(t_2 - t_1)^2}{2!}\, s''(t_1)$$

$$y(t_2) = y(t_1) + (t_2 - t_1)\, y'(t_1) + \frac{(t^2 - t_1)^2}{2!}\, y''(t_1)$$

ed avuti così i valori approssimati delle v, s, y nel punto t_2 le [2] e [3] danno i valori delle derivate prime e seconde di queste funzioni nello stesso punto t_2, onde di nuovo la formula di Taylor di punto iniziale t_2 e calcolata per $t = t_3$, arrestata al terzo termine darà i valori di v, s, y, nel punto t_3, e così via.

b) APPLICAZIONE.

Dati: $V = 1200$, $\varphi = 45^\circ$, $c = 0{,}2$, $a = 0{,}240$, $p = 150$, $i = 0{,}521$, $t = 0$, $s(0) = \text{sen}\,\varphi = 0{,}70711$, $x = 0$, $y = 0$, $V = 1200$.

$$s'(0) = -\frac{g}{v(0)}\,[1 - s(0)^2] = -\frac{9{,}805}{1200}\,(1 - 0{,}70711^2) = -0{,}00409$$

$$y'(0) = v(0)\, s(0) = 848{,}532$$

$$x'(0) = v(0)\sqrt{1 - s(0)^2} \qquad\qquad F(1200) = 342{,}361$$

$$v'(0) = -sg(0) - ce^{-dy(0)}\, F[v(0)] \qquad e^{-dy(0)} = 1 \qquad c = 0{,}2$$

$$v'(0) = -9{,}8057 \times 0{,}70711 - 0{,}2 \times 342{,}361 = -75{,}40895$$

quindi si ottiene

t	sen θ	cos θ	x	y	V
0	0,70711	0,707106	0	0	1200
	$\frac{ds}{dt}$	$\frac{dx}{dt}$	$\frac{dy}{dt}$	$\frac{dv}{dt}$	
0	— 0,00409	848,532	848,532	— 75,40895	

derivate seconde

$$s'' = \frac{g}{v^2}\,[(1 - s^2)\, v' + 2\, sv\, s'] = -0{,}00030$$

$$y'' = vs' + sv' = -58{,}23042$$

$$x'' = v'(1 - s^2)^{\frac{1}{2}} + v\,\frac{1}{2}\,(1 - s^2)^{-\frac{1}{2}}\, 2\, ss' = v'\sqrt{(1 - s^2)} - \frac{ss'v}{\sqrt{(1 - s^2)}} = -48{,}414$$

$$v'' = -gs' + c\, e^{-dy}\, i\,[d\, F(v)\, y' - F'(v)\, v'] = 11{,}99417$$

Il calcolo degli elementi allora si farà come segue:

$$v(t)_1 = v(0) + t_1 v'(0) + \frac{t_1^2}{2} v''(0) = 1181{,}523$$

$$x(t_1) = x(0) + t_1 x'(0) + \frac{t_1^2}{2} x''(0) = 210{,}619$$

$$y(t_1) = y(0) + t_1 y'(0) + \frac{t_1^2}{2} y''(0) = 210{,}313$$

10 - Metodo delle velocità fittizie.

a) GENERALITÀ.

I metodi di calcolo per archi successivi permettono di calcolare una traiettoria qualunque ma il procedimento è sempre assai lungo e laborioso.

È perciò più interessante, dal punto di vista pratico, avere una tavola in funzione di V_0, C' e φ che ci dia immediatamente gli elementi del punto di caduta.

La compilazione di tali tavole richiede un lavoro notevole a causa del grande numero di traiettorie da calcolarsi, (diz. balistico grafico), poichè gli argomenti devono essere presi con piccoli intervalli, allo scopo di ottenere una buona approssimazione nelle interpolazioni.

Si osserva perciò che per un dato valore di φ, se la X subisce notevoli variazioni con V e C', esiste una quantità che varia pochissimo al variare di V e C', per cui è possibile costruire una tabella con un numero relativamente piccolo di risultati.

Questo metodo appunto di chiama « Metodo delle velocità fittizie ».

Noi chiamiamo « Velocità Fittizia V_φ » d'una traiettoria data, la velocità del vuoto corrispondente allo stesso angolo di proiezione φ ed alla gittata ottenuta nell'aria, velocità che sappiamo essere rappresentata da:

$$V_\varphi^2 = \frac{gX}{\text{sen } 2\varphi}$$

e « traiettoria fittizia » la traiettoria del vuoto corrispondente.

Se osserviamo un grafico di traiettorie ottenute con V e C' costanti e φ variabile, si vede che per valori crescenti di φ i valori delle velocità fittizie vanno costantemente decrescendo.

La diminuzione è sopratutto accentuata per i piccoli angoli; a partire da $\varphi = 35^\circ$ la velocità fittizia non subisce che variazioni assai piccole. Conoscendo, in un modo qualunque, la gittata ottenuta con l'angolo φ la cui velocità fittizia è $V_{\varphi 1}$, la gittata ottenuta con un altro angolo φ_2 si avrà conoscendo la velocità fittizia $V_{\varphi 2}$ e questa sarà nota, qualora si riesca a determinare la differenza

$$V_{\varphi_2} - V_{\varphi_1} = V_{\varphi_1}^{\varphi_2} \quad .$$

Ora se le variazioni di V_φ hanno importanza, non minore importanza avrà la differenza $V_{\varphi 2} - V_{\varphi 1} = V_{\varphi 1}^{\varphi 2}$, poichè permette subito di calcolare $V_{\varphi 2}$ noto $V_{\varphi 1}$ e tale differenza ha variazioni assai piccole.

Questa proprietà ha permesso di calcolare una tabella per l'angolo φ_1 fisso, per φ_2 variabile di 5° in 5°, in funzione della velocità del proietto, utilizzando un ristretto numero di risultati di calcoli effettuati con esattezza (calcolo per archi.)

Sugot ha posto $\frac{V\,25^\circ}{V_0} = r$ (fattore della resistenza) e questo fattore r che potrebbe indicare il rendimento della bocca da fuoco per la balistica esterna è funzione di V e C'.

Nel vuoto $r = 1$; per la resistenza infinita $r = 0$ e il suo quadrato può anche definirsi uguale al rapporto della gittata nell'aria alla gittata nel vuoto perchè:

$$r = \frac{V_{25}}{V} = \frac{\sqrt{\frac{gX}{\text{sen}\,2\,\varphi}}}{V} \qquad r^2 = \frac{\frac{gX}{\text{sen}\,2\,\varphi}}{V^2} = \frac{gX}{V^2\,\text{sen}\,2\,\varphi} = \frac{X}{\frac{V^2\,\text{sen}\,2\,\varphi}{g}}$$

Siccome il valore di r è subito noto eseguendo ad esempio un tiro con $\varphi = 25°$ nel quale si misuri la V e la X (la V_φ si ricava immediatamente in funzione di φ ed X) lo si è assunto invece dalla C' come argomento delle tavole delle funzioni V_{25}^{15}, V_{25}^{20}, V_{30}^{25}, (cioè delle differenze $V_{25} - V_{15}$), valore questo che è da aggiungere o da sottrarre a V_{25} secondochè φ e $< o >$ di 25°.

b) Elementi per il punto di caduta e del vertice.

$$X = \frac{V^2\,\text{sen}\,2\,\varphi}{g} \qquad \text{posto } u_\varphi = V\cos\varphi$$

$$X = \frac{u_\varphi^2}{\cos^2\varphi}\,\frac{\text{sen}\,2\,\varphi}{g} = \frac{2\,u_\varphi^2\,tg\,\varphi}{g}$$

Le equazioni del moto:

$$\begin{cases} dx = -\dfrac{(V\cos\theta)^2}{g}\,\dfrac{d\theta}{\cos^2\theta} \\ dy = -\dfrac{(V\cos\theta)^2}{g}\,\dfrac{tg\,\theta\,d\theta}{\cos^2\theta} \\ dt = -\dfrac{V\cos\theta}{g}\,\dfrac{d\theta}{\cos^2\theta} \end{cases}$$

integrate fra l'origine ed il punto di caduta e fra l'origine e un punto qualunque applicando il teorema dei valori medi, danno

$$X = \frac{(V\cos\theta)^2{}_m}{g}\,(tg\,\varphi - tg\,\theta)$$

$$T = \frac{(V\cos\theta)^2{}_m}{g\,(V\cos\theta)_m}\,(tg\,\varphi - tg\,\theta) = \frac{X}{(V\cos\theta)_m}$$

e per il vertice:

$$x_0 = (V\cos\theta)^2{}_v\,\frac{tg\,\varphi}{g}$$

$$y = (V\cos\theta)^2{}_{v'}\,\frac{tg^2\,\varphi}{2\,g}$$

$$T_s = \frac{x_0}{(V\cos\theta)_{v''}}$$

in cui $(V\cos\theta)_m$; $(V\cos\theta)_v$ .... sono valori medi della funzione $V\cos\theta$ nei limiti dell'integrazione.

Dalle:

$$X = \frac{V^2 \operatorname{sen} 2\varphi}{g}; \qquad X = \frac{(V\cos\theta)^2_m}{g}(tg\,\varphi - tg\,\theta); \qquad T = \frac{X}{(V\cos\theta)'_m}$$

si ricava:

$$T = \frac{\frac{V^2 \operatorname{sen} 2\varphi}{g}}{(V\cos\theta)'_m} = \frac{2V^2\cos^2\varphi\,\frac{tg\,\varphi}{g}}{(V\cos\theta)'_m}\,\frac{(V\cos\theta)_m}{(V\cos\theta)_m}$$

ma:

$$(V\cos\theta)_m = \sqrt{\frac{g\,X}{tg\,\varphi - tg\,\omega}} = \sqrt{\frac{g\,2\,V^2\,\frac{\cos^2\varphi}{g}\,tg\,\varphi}{tg\,\varphi - tg\,\omega}} = V\cos\varphi\sqrt{\frac{2\,tg\,\varphi}{tg\,\varphi - tg\,\omega}}$$

per cui:

$$T = \frac{V^2\cos^2\varphi\,\frac{2\,tg\,\varphi}{g}\,(V\cos\theta)_m}{V\cos\varphi\sqrt{\frac{2\,tg\,\varphi}{tg\,\varphi - tg\,\omega}}\,(V\cos\theta)'_m} = \frac{2\,V\operatorname{sen}\varphi}{g}(1 + \varepsilon_T)$$

con

$$1 + \varepsilon_T = \frac{(V\cos\theta)_m}{(V\cos\theta)'_m}\sqrt{\frac{tg\,\varphi - tg\,\omega}{2\,tg\,\varphi}}$$

Dall'ultima espressione si ricava:

$$\frac{tg\,\varphi - tg\,\omega}{2\,tg\,\varphi} = (1 + \varepsilon_T)^2\,\frac{(V\cos\theta)'^2_m}{(V\cos\theta)^2_m} = (1 + \varepsilon_\omega)^2$$

da cui:

$$2\,(1 + \varepsilon_\omega)^2 = 1 - \frac{tg\,\omega}{tg\,\varphi}$$

ε_ω è dato da una tavola in funzione di r e V

Dalle:

$$X = \frac{(V\cos\theta)^2_m}{g}(tg\,\varphi - tg\,\omega) \quad \text{e} \quad x_0 = \frac{(V\cos\theta)''^2_m\,tg\,\varphi}{g}$$

si ricava:

$$x_0 = \frac{(V\cos\theta)^2_m}{(V\cos\theta)^2_m}\,\frac{(V\cos\theta)''^2_m}{g}\,tg\,\varphi$$

ma:

$$(V\cos\theta)^2_m = \frac{g\,X}{tg\,\varphi - tg\,\omega}$$

quindi:

$$x_0 = \frac{(V\cos\theta)''^2_m}{(V\cos\theta)^2_m}\,\frac{tg\,\varphi}{g}\,\frac{g\,X}{tg\,\varphi - tg\,\omega} = \frac{X}{2}\,\frac{2\,tg\,\varphi}{tg\,\varphi - tg\,\omega}\left(\frac{(V\cos\theta)''_m}{(V\cos\theta)_m}\right)^2 = \frac{X}{2}(1 + \varepsilon_{x0})^2$$

Dalle:

$$X = \frac{(V\cos\theta)^2_m}{g}(tg\,\varphi - tg\,\omega); \qquad T = \frac{X}{(V\cos\theta)'_m}; \qquad y = \frac{(V\cos\theta)'''^2_m}{2g}\,tg^2\,\varphi$$

viene

$$y = \frac{(V\cos\theta)'^2_m}{(V\cos\theta)'^2_m}\,\frac{(V\cos\theta)'''^2_m}{2g}\,tg^2\,\varphi = \frac{gX}{tg\,\varphi - tg\,\omega}\,\frac{1}{(V\cos\theta)^2_m}\,\frac{(V\cos\theta)'''^2_m}{2g}\,tg^2\,\varphi =$$

$$= \frac{(V\cos\theta)'_m\,T}{(V\cos\theta)^2_m}\,\frac{(V\cos\theta)'''^2_m}{2}\,\frac{tg^2\,\varphi}{tg\,\varphi - tg\,\omega} =$$

$$= \frac{(V\cos\theta)'^2_m}{(V\cos\theta)'_m}\,\frac{T}{(V\cos\theta)^2_m}\,\frac{(V\cos\theta)'''^2_m}{2}\,\frac{tg^2\,\varphi}{tg\,\varphi - tg\,\omega} =$$

$$= \frac{T^2\,(V\cos\theta)'^2_m}{X}\,\frac{(V\cos\theta)'''^2_m}{2}\,\frac{tg^2\,\varphi}{tg\,\varphi - tg\,\omega} =$$

$$= \frac{g\,T^2\,(V\cos\theta)'^2_m}{(V\cos\theta)^2_m}\,\frac{(V\cos\theta)'''^2_m}{2}\left(\frac{tg^2\,\varphi}{tg\,\varphi - tg\,\omega}\right)^2.$$

Quindi:

$$y = \frac{g\,T^2}{8}\left[\frac{(V\cos\theta)'_m\,(V\cos\theta)'''_m}{(V\cos\theta)_m}\,\frac{2\,tg\,\varphi}{tg\,\varphi - tg\,\omega}\right]^2 = \frac{g\,T^2}{8}\,(1 + \varepsilon_y)$$

Integrando ora: $dx = -\dfrac{(V\cos\theta)^2}{g}\,\dfrac{d\theta}{\cos^2\theta}$ dal vertice al punto di caduta;

$$X - x_0 = \frac{(V\cos\theta)^2_{vm}}{g}\,(-\,tg\,\omega)$$

da cui:

$$(V\cos\theta)^2_{vm} = \frac{g\,(X - x_0)}{-\,tg\,\omega} = \frac{g\left(X - \frac{X}{2}(1 + \varepsilon_{x_0})\right)}{-\,tg\,\omega} =$$

$$= g\,\frac{2X - X - X\varepsilon_x}{-\,2\,tg\,\omega} = g\,\frac{X\,(1 - \varepsilon_x)}{-\,2\,tg\,\omega} = \frac{V^2\,\mathrm{sen}\,2\,\varphi}{-\,2\,tg\,\omega}\,(1 - \varepsilon_x)$$

La velocità di caduta è: $U = \dfrac{U\cos\omega}{\cos\omega}$ quindi:

$$U = (V\cos\theta)_{vm}\,\frac{1}{\cos\omega}\,\frac{U\cos\omega}{(V\cos\theta)_{vm}} = V\sqrt{\frac{\mathrm{sen}\,2\,\varphi}{-\,2\,tg\,\omega}}\,\sqrt{1 - \varepsilon_x}\,\frac{1}{\cos\omega}\,\frac{U\cos\omega}{(V\cos\theta)_{vm}} =$$

$$= V\sqrt{\frac{\mathrm{sen}\,2\,\varphi}{-\,\mathrm{sen}\,2\,\omega}}\,\sqrt{1 - \varepsilon_x}\,\frac{U\cos\omega}{(V\cos\theta)_{vm}} = V\sqrt{\frac{\mathrm{sen}\,2\,\varphi}{-\,\mathrm{sen}\,2\,\omega}}\,(1 - \varepsilon_{v\omega})$$

Riassumendo le formule che danno gli elementi del punto di caduta e del vertice sono:

$$X = V_\varphi^2\,\frac{\mathrm{sen}\,2\,\varphi}{g} \qquad\qquad x_0 = \frac{X}{2}\,(1 + \varepsilon_x)$$

$$T = \frac{2\,V_\varphi\,\mathrm{sen}\,\varphi}{g}\,(1 + \varepsilon_T) \qquad\qquad y = \frac{g\,T^2}{8}\,(1 + \varepsilon_y)$$

$$1 - \frac{tg\,\omega}{tg\,\varphi} = 2\,(1 + \varepsilon_\omega)^2 \qquad\qquad T_s = \frac{T}{2}\,(1 - \varepsilon_T)$$

$$U = V_\varphi\sqrt{\frac{\mathrm{sen}\,2\,\varphi}{-\,\mathrm{sen}\,2\,\omega}}\,(1 - \varepsilon_{v\omega}) \qquad\qquad V_v = V_\varphi\sqrt{\frac{\mathrm{sen}\,2\,\varphi}{-\,2\,tg\,\omega}}\,(1 + \varepsilon_v)$$

a) APPLICAZIONE.

Cannone da 75/27 - Granata - $V = 500$.

Si è misurato sperimentalmente:

$$\varphi = 25^\circ = 437 \text{ m/m} \quad X = 7300$$

La velocità fittizia è per tale X:

$$V_{25} = \sqrt{\frac{g\,X}{\text{sen } 2\,\varphi}} = 306 \text{ m/sec}$$

Allora $r = \frac{V_{25}}{V_0} = \frac{306}{500} = 0{,}612$

Ricerchiamo gli elementi per $\varphi = 20^\circ$ ($\alpha = 349$ m/m)

Dalla Tavola apposita si ricava: $V_{25}^{20} \begin{cases} r = 0{,}610 \\ V_0 = 500 \end{cases}$ $9{,}8 = V_{25} - V_{20}$

per cui; $V_{20} = V_{25} + 9{,}8 = 306 + 9{,}8 = 315{,}8$.

$$X = \frac{V^2 \text{ sen } 2\,\varphi}{g} \qquad \begin{aligned} \log V^2 &= 4{,}99882 \\ \log \text{sen } 2\,\varphi &= \bar{1}{,}80806 \\ \text{colg } g &= \bar{1}{,}00855 \end{aligned}$$

$$X = 6538 \qquad \log X = 3{,}81543$$

Ancora si ricava: $\omega = 30^\circ\, 16' = 583$ m/m

$$U = 226 \text{ m/sec}$$

$$1000\,\varepsilon_t = 114$$

$$T = \frac{2\,V_\varphi \text{ sen } \varphi}{g}\,(1 + \varepsilon_T) \qquad \begin{aligned} \log 2 &= 0{,}30103 \\ \log V_\varphi &= 2{,}49941 \\ \log \text{sen } \varphi &= \bar{1}{,}53405 \\ \text{colg } g &= \bar{1}{,}00855 \\ \log 1 + \varepsilon_T &= 0{,}04689 \end{aligned}$$

$$T = 24{,}14. \qquad 1{,}38993$$

$$x_0 = \frac{X}{2}\,(1 + \varepsilon_x) = 3269 \times 1{,}104 = 3609$$

$$y = \frac{g\,T^2}{8}\,(1 + \varepsilon_y)$$

$$(\varepsilon_y = 0{,}052)$$

$$\begin{aligned} \log g &= 0{,}99145 \\ \log T^2 &= 2{,}77986 \\ \text{colog } 8 &= \bar{1}{,}09691 \\ \log (1 + \varepsilon_y) &= 0{,}02202 \\ \log y &= 2{,}89024 \\ y &= 777 \end{aligned}$$

11 – Metodo tedesco.

a) Generalità.

Il Cranz espone alcuni metodi grafici ed analitici per il calcolo delle traiettorie per archi successivi: tra i primi, quelli di Poncelet (1827) e Didion (1848); di Cranz e R. Rothe con modificazioni di C. Veithen e di L. Gümbel; di Vahlen (1918) ed E. A. Brauer (1918); tra i secondi, quelli di C. Veithen (1919) (che integra l'equazione dell'odografa col metodo d'integrazione numerica di C. Runge e W. Kutta), di O. Viener (1919) ed A. von Brunn (1918), di Frh. von Sedlitz, E. Stübler ed J. de Joug.

Noi accenneremo ad un recente metodo tedesco nel quale, come nel metodo di C. Veithen si applica il metodo di integrazione numerica di Runge - Kutta.

A chiarimento di quanto esporremo in appresso riteniamo opportuno far precedere alcune nozioni su tale metodo.

Data l'equazione differenziale

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

sia, per il valore iniziale x_0 di una delle variabili, y_0 il valore dell'altra. Si vuole, partendo dal punto iniziale $(x_0 y_0)$, e percorrendo la curva integrale, conoscere quale incremento K subisce il valore y, quando si dia ad x un incremento infinitesimo h.

Per tale incremento K, Runge dà un'espressione della forma:

$$K = R_1 K_1 + R_2 K_2 + R_3 K_3 - R_4 K_4$$

I valori $K_1 K_2 K_3 K_4$ vengono ricavati dalle equazioni seguenti:

$$K_1 = h \cdot f(x_0 y_0)$$
$$K_2 = h \cdot f(x_0 + \alpha h, y_0 + \beta K_1)$$
$$K_3 = h \cdot f(x_0 + \alpha' h, y_0 + \beta' K_1 + \gamma' K_2)$$
$$K_4 = h \cdot f(x_0 + \alpha'' h, y_0 + \beta'' K_1 + \gamma'' K_2 + \delta'' K_3)$$

I coefficienti indeterminati R_1 R_2 .... ed i nove valori

$$\alpha\ \alpha'\ \alpha''\ \beta\ \beta'\ \beta''\ \gamma'\ \gamma''\ \delta''$$

debbono essere scelti in modo, che l'errore sul valore K sia del quinto ordine in h.

W. Kutta giunge alla seguente regola: se, ad esempio, si prende $R_1 = R_4 = 1/6$ ed $R_2 = R_3 = 1/3$, si deve prendere $\alpha = \alpha' = 1/2$; $\alpha'' = 1$; $\beta = \gamma' = 1/2$; $\delta'' = 1$; $\beta' = \beta'' = \gamma'' = 0$.

Si ha quindi:

$$K = \frac{1}{6} (K_1 + 2 K_2 + 2 K_3 + K_4)$$

in cui i valori $K_1 K_2 K_3 K_4$ si deducono uno dall'altro come segue:

$$K_1 = h \cdot f(x_0 y_0)$$

$$K_2 = h \cdot f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_1}{2}\right)$$

$$K_3 = h \cdot f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_2}{2}\right)$$

$$K_4 = h \cdot f(x_0 + h, y_0 + K_3)$$

Con questo procedimento, a partire dal punto iniziale $(x_0 y_0)$ della curva integrale, si ottiene per approssimazione un punto $(x_0 + h, y_0 + K)$; da questo punto si riparte come punto di partenza per raggiungere un terzo punto e così di seguito.

Per stabilire il grado di esattezza raggiunto nel calcolo di y, si ripete il calcolo una seconda volta e precisamente: la prima volta si calcolano due archi successivi con l'incremento arbitrario costante ad es. $h = 0{,}1$ e si ottiene così un valore di y corrispondente alla fine del 2° arco; una seconda volta si calcola un solo arco con l'intervallo $2h$, ottenendo un secondo valore di y che si mette a confronto col primo. La frazione $\frac{1}{16}$ della differenza di questi due valori dà l'ordine di grandezza dell'errore temibile.

È chiaro che la precisione è tanto più grande quanto più è piccolo il valore di h; però aumenta così lo sviluppo del calcolo. Il metodo ha il vantaggio che si può valutare in ogni momento l'errore che si commette con la scelta di h.

Ciò premesso, scriviamo le equazioni generali del moto:

$$g\,dx = -v^2\,d\theta$$

$$g\,dy = -v^2\,tg\,\theta\,d\theta$$

$$g\,dt = -v\,\frac{d\theta}{\cos\theta}$$

$$g\,d(v\cos\theta) = v f(v)\,d\theta$$

Poichè si ha: $f(v) = \frac{\delta \cdot i}{C} F(v)$ ponendo $\frac{\delta \cdot i}{C} = \lambda$ si può scrivere $f(v) = \lambda F(v)$ e quindi

$$g\,d(v\cos\theta) = v \cdot \lambda \cdot F(v)\,d\theta \qquad [1]$$

Posto:

$$z = \frac{1}{g}\,tg\,\theta \qquad u = \log(v\cos\theta) \quad \text{cioè } 10^u = v\cos\theta \qquad V = \log tg\,\theta$$

$$\mu = \log\sec\theta \qquad \gamma = \log(\lambda \cdot M) \text{ essendo } M = \frac{1}{\lg_e 10} = 0{,}4343$$

si ha:

$$\frac{dz}{d\theta} = \frac{1}{g} \cdot \frac{1}{\cos^2\theta} \quad \text{da cui } d\theta = dz \cdot g\cos^2\theta$$

$$d(v\cos\theta) = d\,10^u = 10^u \lg_e 10\,du$$

e sostituendo nella [1] si ha:

$$g \cdot 10^u \lg_e 10\, du = v \cdot \lambda F(v)\, dz \cdot g \cos^2\theta \qquad [2]$$

Ma $\cos^2\theta = \frac{10^{2u}}{v^2}$ quindi:

$$g \cdot 10^u \lg_e 10\, du = v \cdot \lambda F(v) \cdot dz \cdot g \cdot \frac{10^{2u}}{v^2}$$

da cui:

$$du = \frac{\lambda \cdot F(v)\, v\, dz \cdot 10^{2u}}{10^u \lg_e 10\, v^2}$$

$$\frac{du}{dz} = \frac{\lambda \cdot F(v)\, v\, dz \cdot 10^u M}{v^2}$$

che si può scrivere:

$$\frac{du}{dz} = \frac{F(v)}{v^2} \cdot v \cdot (\lambda \cdot M)\, 10^u \qquad [3]$$

e passando ai logaritmi

$$\log\left(\frac{du}{dz}\right) = \log\left(\frac{F(v)}{v^2}\right) + \log v + \log(\lambda \cdot M) + u$$

Ma $v = \frac{10^u}{\cos\theta}$ quindi $\log v = u + \log\sec\theta = u + \mu$ [4]

e sostituendo nella [4] si ha:

$$\log\left(\frac{du}{dz}\right) = \log\left(\frac{F(v)}{v^2}\right) + 2u + \mu + \gamma$$

Abbiamo così esplicitato la funzione resistente nella espressione classica di Siacci $K(v) = \frac{F(v)}{v^2}$ e pertanto la formula definitiva può scriversi:

$$\log\left(\frac{du}{dz}\right) = \log K(v) + 2u + \mu + \gamma \qquad [5]$$

Il metodo è generale nel senso che in luogo della funzione $K(v)$ può adottarsi un'altra qualsiasi legge di resistenza.

In particolare i tedeschi introducono, per un dato proietto, la funzione resistente che gli compete, determinata riprendendo le traiettorie fotogrammetricamente, munendo il proietto di un tracciatore. Indicando con $R(u)$ il logaritmo della detta funzione, la traiettoria effettiva può essere allora per controllo riprodotta integrando la [5] posta sotto la forma

$$\log \frac{du}{dz} = R(u) + 2u + \mu + \gamma$$

Prendendo in esame le residue tre equazioni del moto e derivando analogamente rispetto alla variabile z d'integrazione si ha:

$$-\frac{dx}{dz} = v^2 \cos^2\theta; \qquad 10^{2u} = v^2 \cos^2\theta$$

quindi:

$$\log\left[-\frac{dx}{dz}\right] = 2u$$

$$-\frac{dy}{dz} = + v^2 \cdot tg\,\theta \cos^2\theta$$

$$\log\left[-\frac{dy}{dz}\right] = + 2\log(v\cos\theta) + \log tg\,\theta$$

$$\log\left[-\frac{dy}{dz}\right] = 2u + V$$

$$g\,d\,t = -v\frac{d\theta}{\cos\theta} = -v\frac{dz \cdot g\cos^2\theta}{\cos\theta}$$

$$-\frac{dt}{dz} = + v\cos\theta$$

$$\log\left[-\frac{dt}{dz}\right] = u$$

In definitiva, gli elementi variabili $x\ y\ t\ v$ sono esprimibili tutti in funzione di u; il problema è dunque ridotto all'integrazione dell'equazione differenziale

$$u = \log(v\cos\theta)$$

Applicheremo il metodo di Runge Kutta di cui già si è accennato, con valori numerici dei dati iniziali relativi al Cannone da 105 – Granata mod. 32 – quelli stessi con i quali si sono svolti gli esempi di calcolo del metodo Siacci e del metodo G.H.M. cioè:

$$V = 810\text{ m/s}; \qquad \varphi = 40°; \qquad \cos\varphi = 0{,}766$$

Si vuol determinare, in prima approssimazione, il valore di v che corrisponde ad un incremento positivo del cos φ di $h = 0{,}0038$ cioè per il valore $\cos\theta_1 = 0{,}7698$ il che significa $\theta_1 = 39°40'$. Nel punto corrispondente della traiettoria la velocità v_1 sarà minore di V e quindi il segno delle quantità $K_1\,K_2\,K_3\,K_4$ e K sarà negativo.

Si ha:

$$K_1 = h \log (V \cos \varphi) = h (\log V + \log \cos \varphi)$$

$$\log 810 = 2{,}9085$$
$$\log \cos 40^\circ = \bar{1}{,}8842$$
$$\log (V \cos \varphi) = 2{,}7927$$

$$2{,}7927 \times 0{,}0038 = 0{,}010612 = K_1$$

$$K_2 = h \left| \left(\log V - \frac{K_1}{2}\right) + \log \left(\cos \varphi + \frac{1}{2} h\right) \right|$$

$$\log V - \frac{K_1}{2} = 2{,}9085 - 0{,}0053 = 2{,}9035$$
$$\log \left(\cos \varphi + \frac{1}{2} h\right) = \log (0{,}766 + 0{,}019) = \bar{1}{,}8853$$
$$\Sigma \log = \cdots\cdots = 2{,}7888$$

$$2{,}7888 \times 0{,}0038 = 0{,}010597 = K_2$$

$$K_3 = h \left| \left(\log V - \frac{K_2}{2}\right) + \log \left(\cos \varphi + \frac{1}{2} h\right) \right|$$

$$\log V - \frac{K_2}{2} = 2{,}9085 - 0{,}0050 = 2{,}9035$$
$$\log \left(\cos \varphi + \frac{1}{2} h\right) = \bar{1}{,}8853$$
$$\Sigma \log = 2{,}7888$$

$$2{,}7888 \times 0{,}0038 = 0{,}010597 = K_3$$

$$K_4 = [(\log V - K_3) + \log (\cos \varphi + h)] \cdot h$$

$$\log V - K_3 = 2{,}9085 - 0{,}0106 = 2{,}8979$$
$$\log (\cos \varphi + h) = \bar{1}{,}8863$$
$$\Sigma \log = 2{,}7842$$

$$2{,}7842 \times 0{,}0038 = 0{,}010580 = K_4$$

$$K = \frac{1}{6} (K_1 + 2 K_2 + 2 K_3 + K_4) =$$
$$= \frac{1}{6} (0{,}01061 + 0{,}02119 + 0{,}02119 + 0{,}01058) = 0{,}0106$$

Pertanto il nuovo valore della funzione u, che indicheremo con u_1 è

$$u_1 = (\log V - K) + \log(\cos\varphi + h)$$

$$\log V - K = 2{,}9085 - 0{,}0106 = 2{,}8979$$

$$\log(\cos\varphi + h) \qquad = \bar{1}{,}8863$$

$$u_1 \qquad = 2{,}7842$$

mentre il valore iniziale era

$$u = \log(V\cos\varphi) = 2{,}7927$$

b) Applicazione.

Calcolo della traiettoria – Cannone da 105 – Granata mod. 32 – $V = 810$ m/s $\varphi = 40^\circ$ – $\delta_0 = 1{,}000$.

Si parte con gli stessi valori che hanno servito per il calcolo del primo arco di traiettoria dall'origine ($\varphi = 40^\circ$) a $\theta_1 = 39^\circ$ nei metodi «Siacci» e «G. H. M.» cioè coefficiente di forma $i = 0{,}485 \sim C = 1{,}474 \sim \lambda = \frac{i}{C} = 0{,}329$

$$\gamma = \log(\lambda \cdot M) = \log(0{,}329 \times 0{,}4343) = \bar{1}{,}1550$$

Si calcolano tre archetti ciascuno dell' ampiezza di 20'; occorre perciò predisporre lo specchio Alleg. 1 in cui si danno ordinatamente i valori di θ, $\cos\theta$, $\Delta\cos\theta$, $z = \frac{tg\,\theta}{g}$, Δz, $\log\Delta z$, $\mu = \log\sec\theta$, $V = \log tg\,\theta$.

Poichè l'equazione da integrare è $u = \log(v\cos\theta)$, consideriamo variabile il $\cos\theta$, applicando a questa funzione incrementi differenziali costanti.

I tedeschi preferiscono invece considerare variazioni costanti per Δz: ciò riesce più comodo per il calcolo nel quale, come vedremo, occorre introdurre il $\log\Delta z$: ma si osserva che ad incrementi costanti delle z non corrispondono incrementi costanti della variabile $\cos\theta$, che è quella che effettivamente ci interessa.

Dalla tabella si rileva però che all'inizio della traiettoria per piccoli intervalli di θ, cioè per piccole variazioni costanti del $\cos\theta$, anche il Δz si mantiene costante.

Fatte queste premesse, il calcolo si dispone come allo specchio alleg. 2.

Si parte dai dati relativi all'origine e si determinano per l'origine le quantità seguenti:

Colonna 1 $z = \frac{tg\,\theta}{g} = 0{,}0855$ (vedi tab. 1)

» 2 $u = \log(v\cos\theta) = \log(V\cos\varphi) = 2{,}7927$

» 3 $\sigma = \log\bar{v} - \log v$, dove $\bar{v} = \frac{v\cos\theta}{\cos\varphi}$

Per l'origine, poichè $\cos\theta = \cos\varphi$, si ha: $\bar{v} = v$ e $\sigma = 0{,}000$

Colonna 4 - si riportano i valori di $\bar{v}$ come definiti
» 5 - si riportano i valori di μ ricavati dalle Tab. 1
» 6 - contiene i logaritmi dei valori di $K(v)$ corrispondenti alle velocità del punto considerato.

Per l'origine, essendo $V = 810$ m/s dalla tabella di Siacci si ha: $10^6\, k(v) = 304$ quindi: $\log K(v) = \bar{4},4829$

Colonna 7 - contiene il doppio dei valori di u cioè per l'origine $2\,u = 5,5854$
» 8 - contiene la somma di tre logaritmi e precisamente:

$$\log \Delta z \text{ (tabella 1)} = \bar{3},0000$$

$$\gamma \text{ (fondament.)} = \bar{1},1550$$

Il valore $l(y) = \log \frac{\delta}{\delta_0}$ corregge la densità per la quota.

Poichè l'origine è a quota 300 m. ($\delta_0 = 1$), si ha: $l(y) = \log \delta$.

Noi leggiamo i valori di $\log \delta$ in relazione alla quota del punto di mezzo del piccolo arco di traiettoria di cui si calcolano gli estremi, ricavandoli dalla pubblicazione di Bruno-Galanzino « La densità balistica dell'aria » Roma 1926 pag. 27 (Tab. VIII). Per l'origine $\delta = \delta_0 = 1$; $l(y) = 0$ quindi: $\log \Delta z + \gamma = \bar{4},1550$.

Colonna 9 - contiene il valore $\log \omega_l$ somma dei valori contenuti nelle colonne 5, 6, 7, 8 cioè in definitiva il valore $\log (du)$ tenendo presente che:

$$\log\left(\frac{du}{dz}\right) = R + 2\,u + \mu + [\gamma + l(y)]$$

$$\log \omega_l = \log (du) = R + 2\,u + \log \Delta z + \mu + [\gamma + l(y)]$$

Colonne 10 - 11 - 12 - 13 - 14 - contengono le operazioni necessarie per passare, estrapolando, dal valore iniziale di u in corrispondenza dell'origine, ai valori di u in prima approssimazione, relativi agli estremi dei due piccoli archi (di 20') al disotto e al disopra dell'origine. Le operazioni sono così semplici che non richiedono particolari delucidazioni. I risultati del calcolo dei valori iniziali di u per i valori $\theta = 40°20'$; $\theta = 39°40'$; $\theta = 39°20'$; $\theta = 39°$ applicando il metodo di Runge-Kutta già illustrato, sono riportati negli allegati specchi 3 e 4.

Dai valori iniziali di u si passa ai valori finali di prima approssimazione attraverso un calcolo analogo a quello fatto per l'origine.

Con i valori di u ricavati dalla prima approssimazione si ripete il calcolo, in seconda approssimazione, determinando nel contempo il valore di y approssimato, che serve per calcolare più esattamente il valore di $l(y)$.

Il calcolo si ripete fino a che tra i valori iniziali e finali di u non vi sia differenza o la differenza sia di una unità della quarta cifra decimale.

Nell'esempio svolto nello specchio 2, i valori finali di u si ottengono alla 3ª approssimazione; le differenze sono appunto di una unità della quarta cifra decimale.

Per i punti $\theta = 39°20'$; $\theta = 39°$ - il calcolo di u si ferma, nello specchio 2, alla seconda approssimazione perchè passando alla terza, il nuovo valore non differisce che per una unità della quarta cifra decimale. Perciò il valore di u determinato come seconda approssimazione può ritenersi esatto.

Tenendo presente le relative espressioni in funzione di u, di y, x, t (il valore y viene calcolato contemporaneamente alla velocità v) si sono determinati i corrispondenti valori negli specchi allegati 2-*bis* 5 e 6.

Riassumendo, nella seguente tabella si riportano i risultati ottenuti partendo dagli stessi dati iniziali ($V = 810$m/s - $\varphi = 40°$) per gli elementi del punto della traiettoria per cui $\theta = 39°$, con l'osservazione che per i primi due metodi si passa direttamente, con arco di ampiezza 1° (da $\varphi = 40°$ a $\theta = 39°$) agli elementi stessi mentre, per il terzo, attraverso il calcolo di tre successivi archetti dell'ampiezza ciascuno di 20'.

	Metodo Siacci	Metodo G. H. M.	Metodo Tedesco
V	701,2	701,2	701,3
X	1009	1008	1008
y	1132	1131	1132
t	1,738	1,733	1,738

Seguendo l'andamento delle differenze della colonna 10 (specchio alleg. 2) l'ampiezza degli archetti successivi, che viene fissata dai successivi valori del $\cos\theta$, può essere in modo conveniente e gradualmente aumentata.

Il metodo risulta di assai rapida applicazione, e come si è detto può essere impiegato per qualsiasi legge di resistenza.

Specchio Allegato 1

θ	$\cos\theta$	$\Delta\cos\theta = h$	$z = \frac{tg\,\theta}{g}$	Δz	$\log\Delta z$	$\log\sec\theta = \mu$	$\log tg\,\theta = V$
1	2	3	4	5	6	7	8
40°20'	0,7623		0,0865		$\bar{3}$,0000	0,1178	$\bar{1}$,9300
		0,0037		0,0010			
40° —	0,7660		0,0855		$\bar{3}$, —	0,1157	$\bar{1}$,9238
		0,0038		0,0010			
39°40'	0,7698		0,0845		$\bar{3}$, —	0,1136	$\bar{1}$,9187
		0,0037		0,0010			
39°20'	0,7735		0,0835		$\bar{3}$, —	0,1116	$\bar{1}$,9135
		0,0037		0,0010			
39° —	0,7772		0,0825		$\bar{3}$, —	0,1095	$\bar{1}$,9084

z	u	σ	[illegible]	μ	R	$2u$	$l_g \Delta z + \gamma + l(y)$	$\log \omega_f$	$w \cdot f'$	$w \cdot f$	$w^2 \cdot f$	$-\frac{w \cdot f}{12}$	u	Differenze
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	
I valori di u *per* 0,0866 *e* 0,0845 *sono estrapolati*														
0,0866	2,8009	$\bar{1}$,9978	2,9064	0,1178	$\bar{4}$,4778	5,6018	4,1623	$\bar{2}$,3597		— 0,0228	— 0,0115	— 1	2,8151	
									11		— 2,8037			
0,0855	2,7927	—	2,9085	0,1157	$\bar{4}$,4829	5,5854	$\bar{4}$,1550	2,3390		— 0,0218	— 0,0109	— 1	2,7927	
									10		— 2,7818			
0,0845	2,7842	0,0021	2,9106	0,1136	$\bar{4}$,4886	5,5684	$\bar{4}$,1480	2,3186		— 0,0208	— 0,0104	— 1	2,7713	
0,0835														
0,0825														
Calcolo con i valori di u *ricavati dalla 1ª approssimazione*														
0,0866	2,8151	1,9978	2,9064	0,1178	$\bar{4}$,4713	5,6302	$\bar{4}$,1623	$\bar{2}$,3816		— 0,0241	— 0,0121	— 2	2,8157	
									23		— 2,8038			
0,0855	2,7927	—	2,9085	0,1157	4,4829	5,5854	$\bar{4}$,1550	$\bar{2}$,3390		— 0,0218	— 0,0109	— 2	2,7927	
									19		— 2,7818			
0,0845	2,7713	0,0021	2,9106	0,1136	$\bar{4}$,4949	5,5426	$\bar{4}$,1480	$\bar{2}$,2991		— 0,0199	— 0,0099	— 1	2,7718	
0,0835														
0,0825														
Calcolo con i valori di u *e di* y *ricavati dalla 2ª approssimazione*														
0,0866	2,8157	1,9978	2,9064	0,1178	$\bar{4}$,4713	5,6314	$\bar{4}$,1632	$\bar{2}$,3837		— 0,0242	— 0,0121	— 2	2,8156	
									24		— 2,8037			229
0,0855	2,7927	—	2,9085	0,1157	$\bar{4}$,4829	5,5854	$\bar{4}$,1550	$\bar{2}$,3390		— 0,0218	— 0,0109	— 1	2,7927	21
									19		— 2,7819			208
0,0845	2,7718	0,0021	2,9106	0,1136	$\bar{4}$,4949	5,5426	$\bar{4}$,1475	$\bar{2}$,2986		— 0,0199	— 0,0099	— 1	2,7719	21
									10		— 2,7621			187
0,0835	2,7666	0,0043	2,8787	0,1116	$\bar{4}$,4997	5,5332	$\bar{4}$,1323	$\bar{2}$,2768		— 0,0189	— 0,0094	— 1	2,7526	
	2,7526	0,0043	2,8684	0,1116	4,5045	5,5052	4,1323	2,2536	10	— 0,0179	— 0,0089	— 1	2,7532	19
0,0825	2,7450	0,0067	2,8612	0,1095	$\bar{4}$,5132	5,4910	4,1223	$\bar{2}$,2360	7	— 0,0172	— 0,0086	0	2,7356	168
	2,7356	0,0067	2,8510	0,[illegible]	4,[illegible]	5,[illegible]	[illegible]23	[illegible]	[illegible]	— 0,[illegible]	— 0[illegible]		2,7[illegible]	

Ordinata y SPECCHIO ALLEGATO **2** *bis*

z	$\log \omega f$	$w \cdot f^1$	$w \cdot f$	$w^1 \cdot f$	$-\frac{w f'}{12}$	y	Differenza	Quota
1	2	3	4	5	6	7	8	9
0, 0855	2, 5092		323	162		− 340 0 + 300		+ 300
Valori ricavati dalla 1ª approssimazione								
0, 0866	2, 5614		364	182	+ 3	− 344		
		41		165				
0, 0855	2, 5092		323	162	+ 3	0		
		33		159				
0, 0845	2, 4623		290	145	3	+ 301		
0, 0835								
0, 0825								
Valori ricavati dalla 2ª approssimazione								
0, 0866	2, 5612		364	182	3	− 344		
		41		165				
0, 0855	2, 5092		323	162	3	0		
		33		159			302	
0, 0845	2, 4625		290	145	2	+ 302		
		27		445			277	
0, 0835	2, 4199		263	132	2	+ 579		
		22		709			253	
0, 0825	2, 3812		241	121	2	+ 832		+ 1132

SPECCHIO ALLEGATO **3**

1ª) $(\cos \theta_o - \cos \theta_{(-1)}) = h = 0{,}0037; \quad 1/2\, h = 0{,}00185$

θ°	cos θ	1/2 h	v	K_1	K_2	K_3	K_4	K	u	
40° —	0, 76600	0, 00185	810 m/s log = 2, 9805	0, 01033					2, 7927	
	0, 76415	0, 00185			0, 01035					
	0, 76415	0, 00185				0, 01035				
40°20′	0, 76230		829,5 m/s log = 2, 9188 858,0 m/s log = 2, 9335				0, 01036	0, 01034	2, 8009	2, 8156

2ª) $(\cos \theta_o - \cos \theta_{(1)}) = h = 0{,}0038; \quad 1/2\, h = 0{,}0019$

θ°	cos θ	1/2 h	v	K_1	K_2	K_3	K_4	K	u	
40° —	0, 7660	0, 0019	810 m/s log = 2, 9805	0, 01061					2, 7927	
	0, 7669	0, 0019			0, 01060					
	0, 7669	0, 0019				0, 01060				
39°40′	0, 7698		790,5 m/s log = 2, 7980 868,5 m/s log = 2, 8856				0, 01058	0, 01059	2, 7842	2, 7719

SPECCHIO ALLEGATO 4

3ª) $\cos\theta_{(1)} - \cos\theta_{(2)} = 0{,}0037 = h;\ 1/2\,h = 0{,}00185$

θ°	cos θ	1/2 h	v	K_1	K_2	K_3	K_4	K	u	
39°40′	0, 76900	0, 00185	768,5 m/s log = 2, 8856	0, 01025					2, 7719	
	0, 77165	0, 00185			0, 01024					
	0, 77165	0, 00185				0, 01024				
39°20	0, 77350		750,0 m/s log = 2, 8751 732,4 m/s log = 2, 8647				0, 01023	0, 01024	2, 7666	2, 7352

4ª) $\cos\theta_{(2)} - \cos\theta_{(3)} = 0{,}0037 = h;\ 1/2 = 0{,}00185$

θ°	cos θ	1/2 h	v	K_1	K_2	K_3	K_4	K	u	
39°20	0, 7735	0, 00185	732,4 m/s log = 2, 8647	0, 01018					2, 7532	
	0, 7754	0, 00185			0, 01017					
	0, 7754	0, 00185				0, 01017				
39° —	0, 777[illegible]		716,0 m/s log = 2, 8545 701 3 m/s log = 2, 8459				0, 01016	0, 01017	2, 7450	2, 7364

Ascissa X

SPECCHIO ALLEGATO 5

z	$\log \omega \cdot f$	$w \cdot f^1$	$w \cdot f$	$w^1 f$	$-\dfrac{w \cdot f^1}{12}$	X	Differenza
1	2	3	4	5	6	7	8
0, 0866	2, 6314		427, 6				
		42					
0, 0855	2, 5854		385, 0	193	3	0	
		35		190			
0, 0845	2, 5438		350, 0	175	3	368	
		30		540			335
0, 07735	2, 5064		321, 0	161	2	703	
		23		862			
0, 07772	2, 4728		297, 0	144	2	1008	305

Tempo t SPECCHIO ALLEGATO 6

z	$\log \omega \cdot f$	$w \cdot f^2$	$w \cdot f$	$w^2 f$	$-\frac{w \cdot f^2}{12}$	t	Differenza
1	2	3	4	5	6	7	8
0,0866	$\bar{1},8156$		0,654				
		34					
0,0855	$\bar{1},7927$		0,620	0,310	3		
		29		0,307			
0,0845	$\bar{1},7719$		0,591	0,295	2	0,604	
		25		0,897			0,578
0,0773	$\bar{1},7532$		0,566	0,283	2	1,182	
		21		1,463			0,556
0,0777	$\bar{1},7364$		0,546	0,273	2	1,738	

12 – Metodo Jachino.

1) È noto come alle equazioni differenziali:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= \frac{d (v \cos \theta)}{dt} = - r \cos \psi \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= \frac{d (v \operatorname{sen} \theta)}{dt} = - r \operatorname{sen} \psi \end{aligned}\right\} \quad [1]$$

che in forma cartesiana esprimono la legge del moto di un proietto lanciato nell'atmosfera, siano applicabili i noti casi di integrabilità (vedi cap. V) attribuendo all'accelerazione risultante:

$$\bar{r} = f(\bar{v}) + g \quad \text{(vettoriale)}$$

una legge semplice estesa a brevi o brevissimi intervalli di tempo.

A integrazione effettuata si ottiene il sistema di equazioni parametriche:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v \cos \theta = - \int r \cos \psi \, dt + C_1 \\ \frac{dy}{dt} &= v \operatorname{sen} \theta = - \int r \operatorname{sen} \psi \, dt + C_2 \end{aligned}\right\} \quad [2]$$

rappresenta l'arco di odografa descritto dall'estremo del vettore-velocità entro il tempo t mentre il mobile descrive l'arco generico di traiettoria, le cui coordinate correnti:

$$\left.\begin{aligned} x &= \int v \cos \theta \, dt + C_3 \\ y &= \int v \operatorname{sen} \theta \, dt + C_4 \end{aligned}\right\} \quad [3]$$

risultano espresse dal secondo integrale effettuato sulle equazioni generali del moto.

Applicando le equazioni [3] al calcolo di brevi e successivi archi di traiettoria entro cui si mantengono valide le ipotesi avanzate sulla legge del moto, si può descrivere l'intera traiettoria. Applicando invece le equazioni [2] e [1] si descrivono per punti successivi la prima e la seconda odografa del moto, rispet-

tivamente riferite ai poli O_1 e O_2 quali curve polari della velocità ($v\theta$) e della accelerazione ($r\,\psi$).

Le tre curve (fig. 1), dette curve fondamentali del moto, debbono essere quotate in tempi t per conservare il carattere meccanico alla rappresentazione

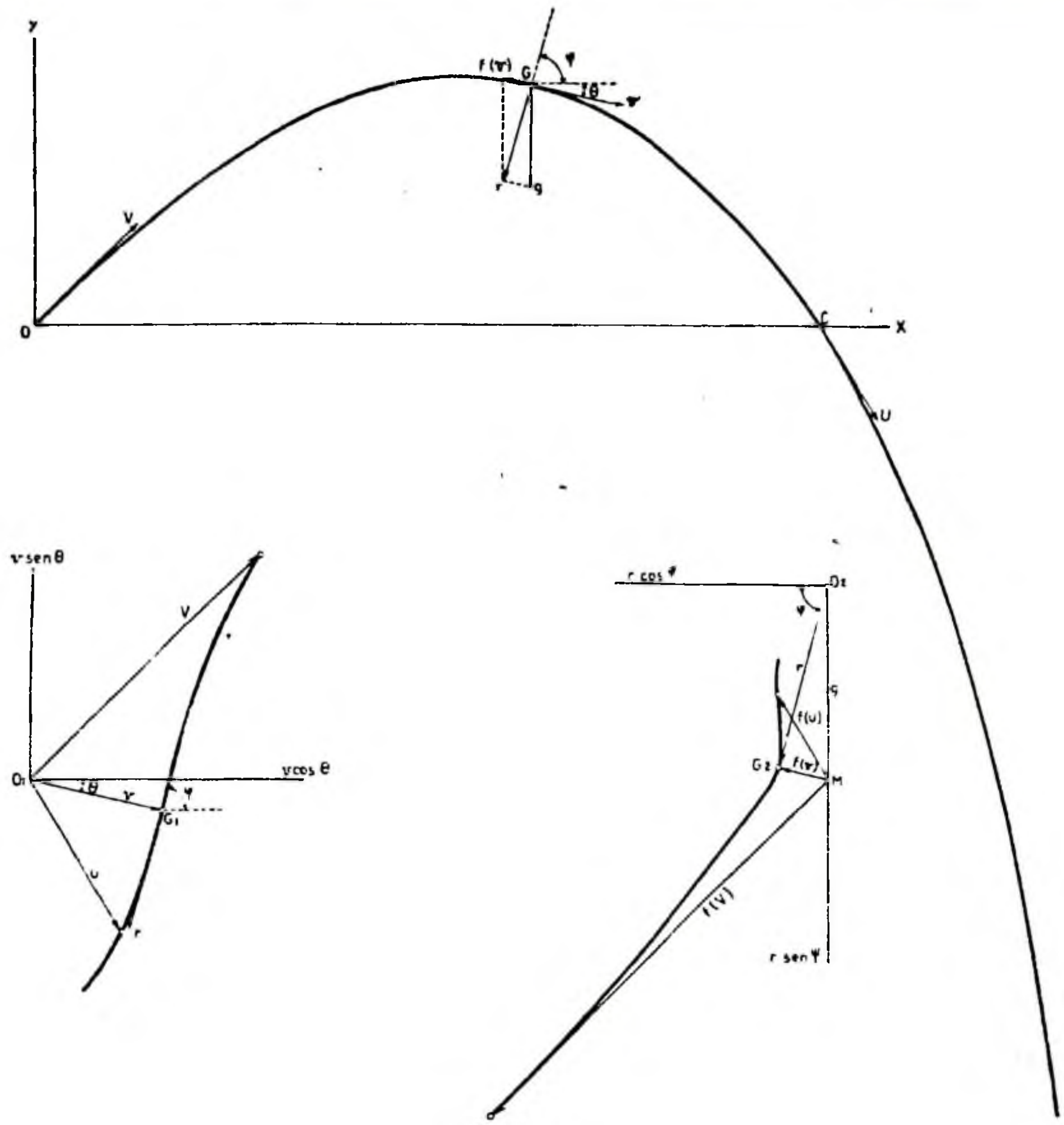


FIG. 1.

geometrica in cui si traduce la soluzione analitica del problema del moto. È utile quì ricordare che alla prima e alla seconda odografa corrispondono rispettivamente la prima e la seconda derivata della traiettoria, giustificando come al punto generico G, scelto sulla traiettoria, competa la velocità:

$$v = O_1\, G_1$$

inclinata dell'angolo θ e parallela alla tangente condotta in G alla traiettoria, nonchè l'accelerazione:

$$r = O_2\, G_2$$

inclinata dall'angolo ψ sull'orizzonte parallela alla tangente condotta in G_1 alla prima odografa.

Si osservi che, attribuendo all'accelerazione di gravità il valore:

$$g = O_1 M = 9.805 \text{ m/sec}^2$$

costante in grandezza e direzione, le variazioni dell'accelerazione risultante r vengono a dipendere soltanto dalle variazioni della ritardazione $f(v)$, per modo che la seconda odografa può ritenersi descritta dagli estremi del vettore $f(v)$ (polo M' e anomalia θ) anzichè dagli estremi del vettore r (polo O e anomalia ψ). In genere, le tre curve fondamentali del moto vengono disegnate in modo da far coincidere con l'origine O della traiettoria tanto il polo O_1 della prima odografa, quanto il polo M (o il polo O_2) della seconda odografa.

2) Ciò premesso per rendere evidente il concetto fondamentale che ispira il metodo, consideriamo l'integrabilità delle equazioni differenziali [1] nell'ipotesi che la ritardazione segua, entro l'estensione di un breve arco di traiettoria, la legge lineare:

$$f(v) = \gamma (v - a) \qquad [4]$$

ove figurano le costanti:

$$\gamma = \frac{\delta_0 \, i}{C} F'(v_0)$$

$$a = v_0 - \frac{F(v_0)}{F'(v_0)}$$

calcolate in base alla densità δ_0 ed alla velocità v_0 verificate nell'origine dell'arco considerato.

Per ottenere formule risolutive semplici ed adattabili al calcolo approssimato di traiettorie suddivise in brevi archi successivi, il metodo non segue il procedimento normale d'integrazione (si ricordi la retta di Chapel), ma trasforma prima le equazioni differenziali [1] nelle seguenti:

$$\left.\begin{aligned} d\,\frac{(v-a)\cos\theta}{dt} &= -\gamma (v-a)\cos\theta \\ d\,\frac{(v-a)\operatorname{sen}\theta}{dt} &= -\gamma (v-a)\operatorname{sen}\theta - g \end{aligned}\right\} \qquad [5]$$

a quelle equivalenti nell'ipotesi che il prodotto $a \cos \theta$ si mantenga costante per l'intero arco, per ricavare poi l'integrale definito:

$$\left.\begin{aligned} (v-a)\operatorname{sen}\theta &= (v_0 - a)\cos\theta_0\, e^{-\gamma t} \\ (v-a)\operatorname{sen}\theta &= (v_0 - a)\operatorname{sen}\theta_0\, e^{-\gamma t} - g\,\frac{1-e^{-\gamma t}}{\gamma} \end{aligned}\right\}$$

dal quale risultano le equazioni parametriche della prima odografa e della traiettoria, riducibili (per $t = 1$ sec) alle espressioni seguenti:

$$\text{odografa} \left\{\begin{aligned} v\cos\theta &= v_0\cos\theta_0\, e^{-\gamma} + \gamma\, a\cos\theta_0\,\frac{1-e^{-\gamma}}{\gamma} \\ v\operatorname{sen}\theta &= v_0\operatorname{sen}\theta_0\, e^{-\gamma} - (g - \gamma\, a\operatorname{sen}\theta_0)\,\frac{1-e^{-\gamma}}{\gamma} \end{aligned}\right. \qquad [6]$$

$$\text{traiettoria} \left\{\begin{aligned} x &= x_0 + v_0\cos\theta_0\,\frac{1-e^{-\gamma}}{\gamma} + \frac{\gamma\, a\cos\theta_0}{\gamma}\left(1 - \frac{1-e^{-\gamma}}{\gamma}\right) \\ y &= y_0 + v_0\operatorname{sen}\theta_0\,\frac{1-e^{-\gamma}}{\gamma} + \frac{\gamma\, a\operatorname{sen}\theta_0 - g}{\gamma}\left(1 - \frac{1-e^{-\gamma}}{\gamma}\right). \end{aligned}\right. \qquad [7]$$

Si noti che, attribuire la legge lineare [4] alla ritardazione, significa far variare la funzione resistente lungo la tangente alla curva che la rappresenta, nel breve intervallo di tempo entro il quale la velocità passa dal valore iniziale v_0 al valore finale v_1, fissando come costante la densità δ_0.

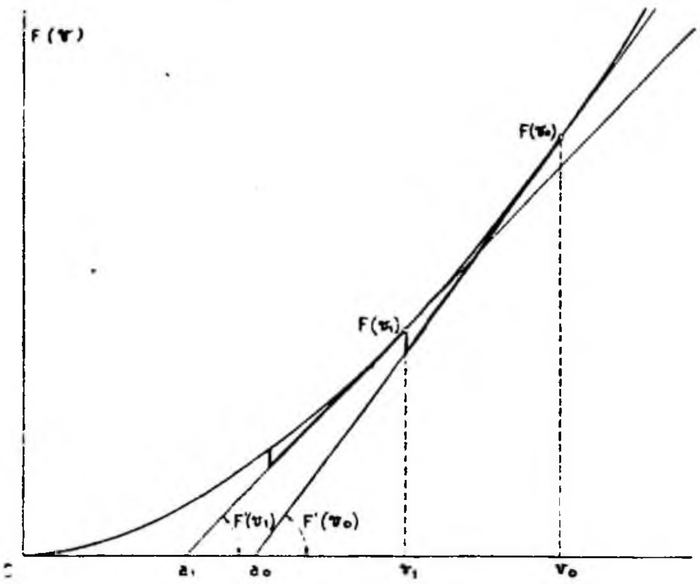


FIG. 2.

Nella fig. 2 è appunto rappresentato un tratto di curva $F(v)$ con le sue tangenti nei punti $F(v_0)$ e $F(v_1)$, lungo le quali si suppone variabile la funzione resistente durante il primo ed il secondo arco compresi rispettivamente fra le velocità v_0 v_1 e v_1 v_2. A successivi archi di traiettoria corrispondono successive tangenti che, inviluppando la curva della funzione resistente, suggeriscono la denominazione di integrazione per tangenti successive dell'equazione differenziale del moto.

Una seconda formula risolutiva si ottiene eguagliando a zero la costante a; il chè equivale ad avanzare l'ipotesi che la ritardazione vari in diretta proporzione con la velocità, e cioè secondo la legge:

$$f(v) = \gamma v \qquad [8]$$

ove la costante:

$$\gamma = \frac{\delta_0 i}{c} \frac{F(v_0)}{v_0}$$

va calcolata in funzione della densità balistica δ_0 e della velocità v_0 verificata all'origine dell'arco considerato. In tale ipotesi si ottengono (ancora per $t = 1$ sec) le equazioni seguenti:

$$\left.\begin{aligned} v \cos \theta &= v_0 \cos \theta_0 \, e^{-\gamma} \\ v \operatorname{sen} \theta &= v_0 \operatorname{sen} \theta_0 \, e^{-\gamma} - g \frac{1 - e^{-\gamma}}{\gamma} \end{aligned}\right\} \qquad [9]$$

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + v_0 \cos \theta_0 \frac{1 - e^{-\gamma}}{\gamma} \\ y &= y_0 + v_0 \operatorname{sen} \theta_0 \frac{1 - e^{-\gamma}}{\gamma} - \frac{g}{\gamma}\left(1 - \frac{1 - e^{-\gamma}}{\gamma}\right) \end{aligned}\right\} \qquad [10]$$

che rappresentano la prima odografa e la traiettoria.

Tali equazioni ricordano e giustificano teoricamente il così detto metodo americano di integrazione numerica, il quale appunto applica alla ritardazione

la legge di diretta proporzionalità. La fig. 3 rappresenta i raggi vettor che intersecano la curva della funzione resistente nei punti $F(v_0)$ e $F(v_1)$, lungo

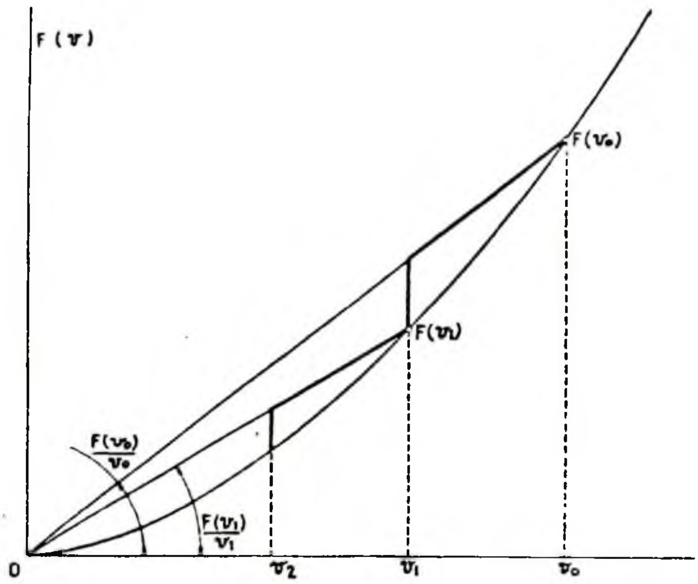


FIG. 3.

i quali si suppone vari la funzione resistente stessa entro il primo e il secondo arco di una traiettoria caratterizzata dalla velocità iniziale v_0.

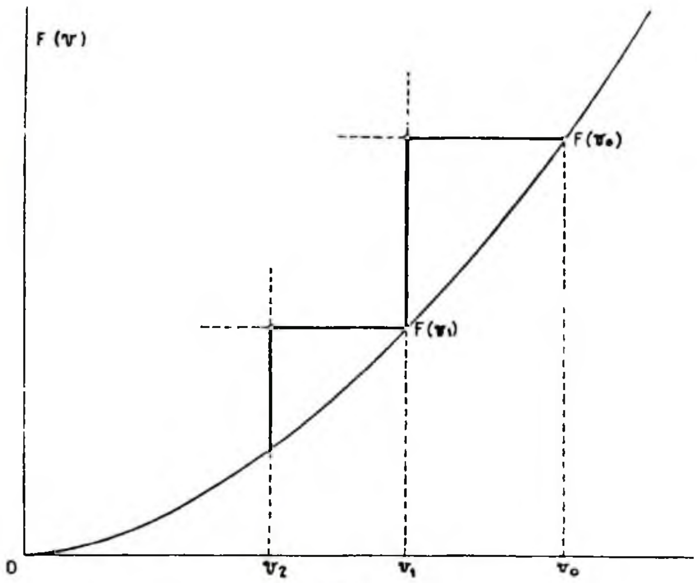


FIG. 4.

Consideriamo infine il caso più semplice di integrabilità per archi parabolici, in cui, ammessa la ritardazione costante in grandezza e direzione;

$$f(v) = \gamma = \frac{\delta_0 i}{c} F(v_0) \qquad [11]$$

gli integrali delle equazioni del moto si dimostrano simili alle corrispondenti equazioni del moto nel vuoto. Riportiamo quì le equazioni differenziali e i rispettivi integrali estesi ad un arco di durata t:

$$\text{accelerazioni}\begin{cases} d\,\dfrac{(v\cos\theta)}{dt} = -\gamma\cos\theta \\ d\,\dfrac{(v\,\text{sen}\,\theta)}{dt} = -\gamma\,\text{sen}\,\theta - g \end{cases} \qquad [12]$$

$$\text{velocità}\begin{cases} v\cos\theta = (v_0 - \gamma t)\cos\theta_0 \\ v\,\text{sen}\,\theta = (v_0 - \gamma t)\,\text{sen}\,\theta_0 - gt \end{cases} \qquad [13]$$

$$\text{spazi}\begin{cases} x = x_0 + \left(v_0 - \dfrac{\gamma t}{2}\right)\cos\theta_0 \cdot t \\ y = y_0 + \left(v_0 - \dfrac{\gamma t}{2}\right)\text{sen}\,\theta_0 \cdot t - \dfrac{gt^2}{2} \end{cases} \qquad [14]$$

ed osserviamo come dal sistema [14] possa dedursi in forma esplicita l'equazione della traiettoria eliminando la variabile tempo.

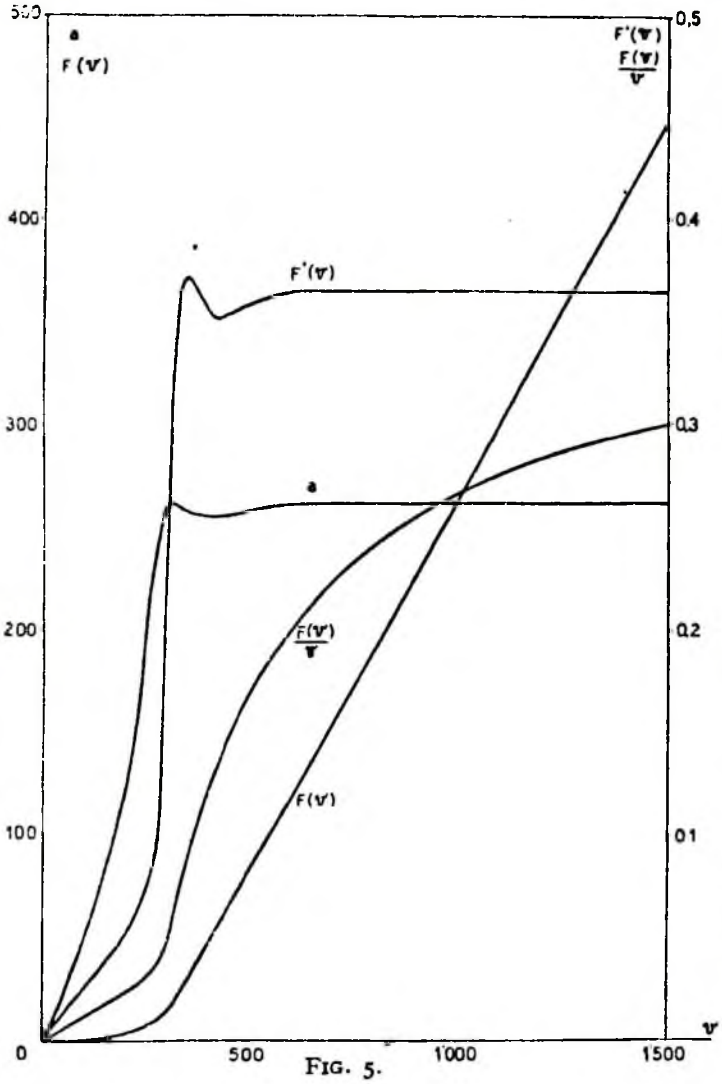


Fig. 5.

Nell'ipotesi di ritardazione costante, la funzione resistente (fig. 4) si riduce ad una retta parallela alle ascisse, estesa al tempo entro il quale la velocità passa al valore iniziale v_0 al valore finale v_1 dell'arco considerato. Evidentemente, per mantenere il grado di approssimazione previsto dal metodo, gli archi successivi debbono essere di durata brevissima.

3) Per sveltire il calcolo si dimostrano di utile impiego le tabelle seguenti;

tabella I comprendente i valori:

$$F(v) \quad F'(v) \quad a \quad \frac{F(v)}{v}$$

espressi in funzione della v, ai quali corrispondono le curve rappresentate nella fig. 5;

tabella II – comprendente le funzioni:

$$e^{-\gamma} \qquad \frac{1 - e^{-\gamma}}{\gamma}$$

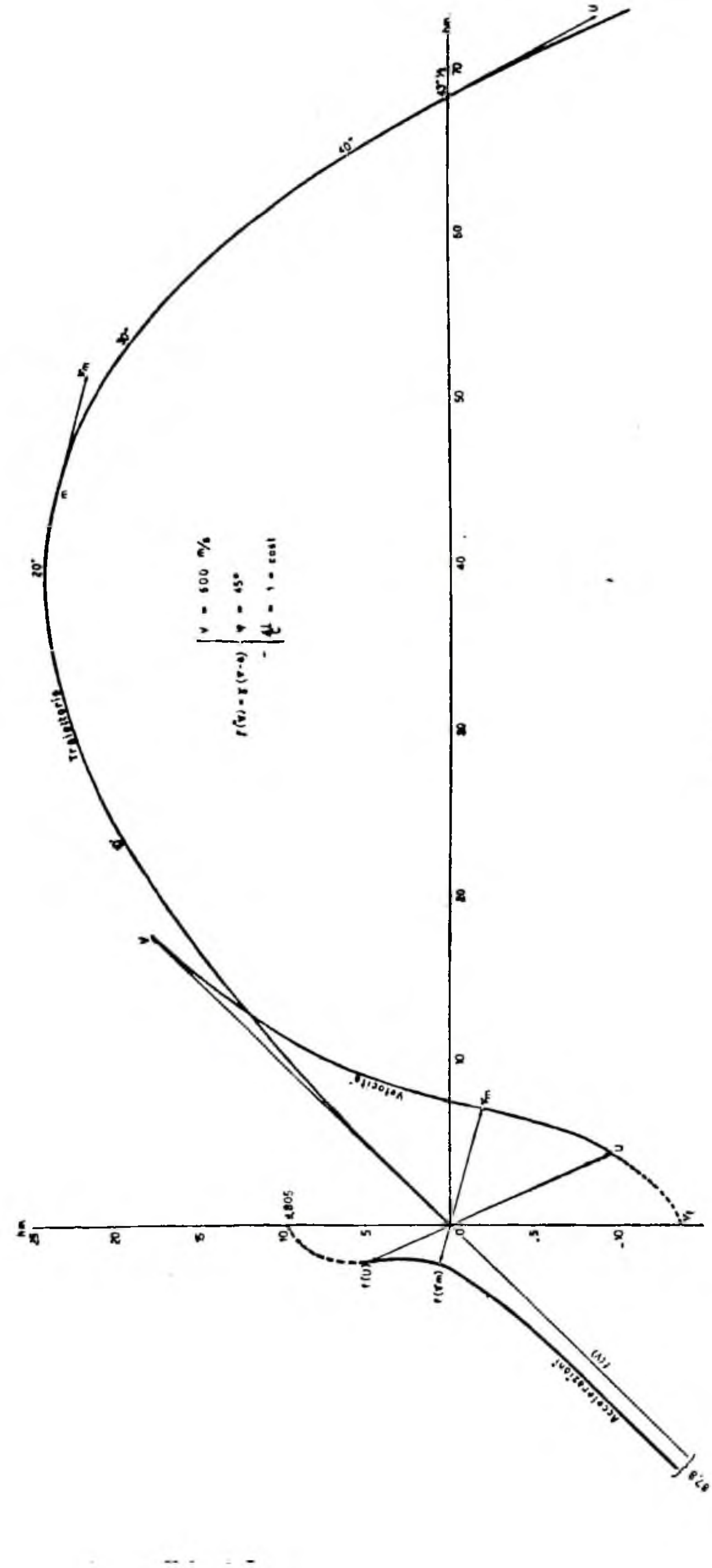


FIG. 6.

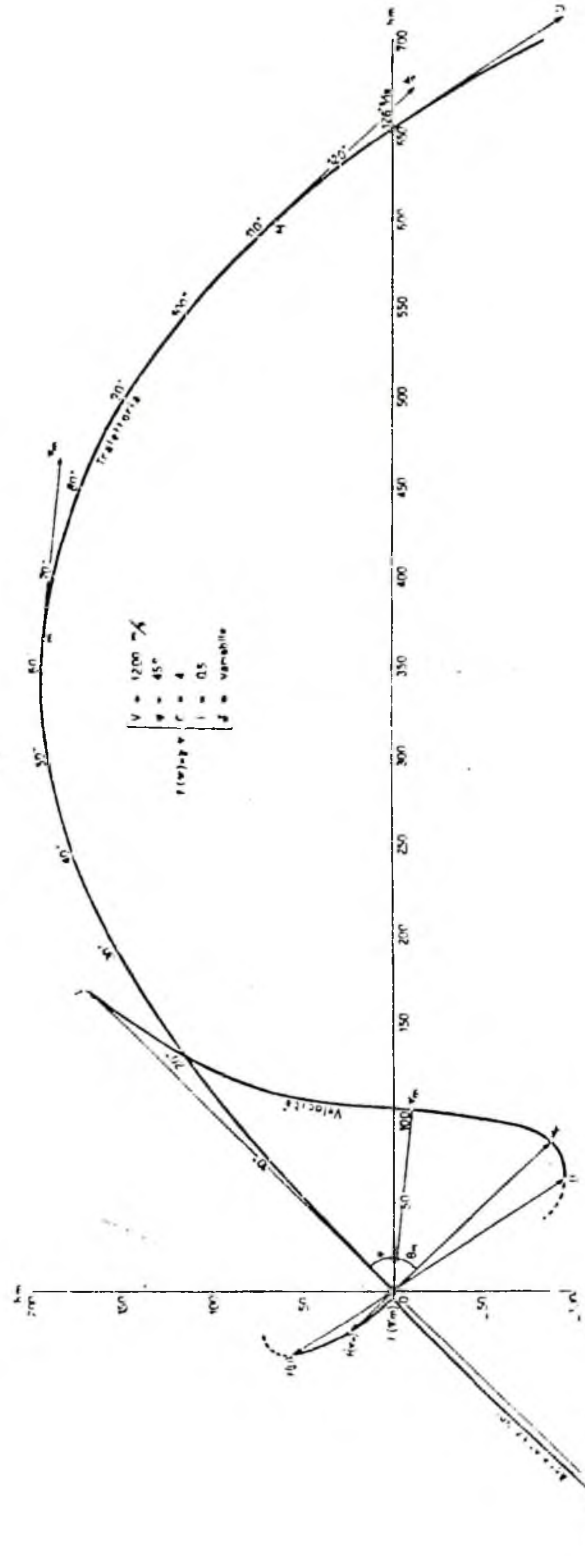


FIG. 7.

estese ai valori che può assumere il coefficiente γ entro qualsiasi arco di traiettoria della durata di un secondo.

A illustrazione del metodo le fig. 6, 7 e 8 rappresentano traiettorie e relative odografe calcolate rispettivamente applicando i tre casi di integrabilità fin qui considerati, dalle quali apparisce che, mentre per moto sviluppantesi in atmosfera di supposta densità costante la velocità tende a un limite v_f (fig. 6) per moto sviluppantesi in atmosfera di densità variabile con l'altezza (fig. 7 e 8) l'odografa segna un valore massimo — v_M, oltre al normale valore minimo v_m, dimostrando così, come nel ramo discendente della traiettoria al crescere della densità balistica si verifichi un secondo punto in cui si annulla l'accelerazione tangenziale.

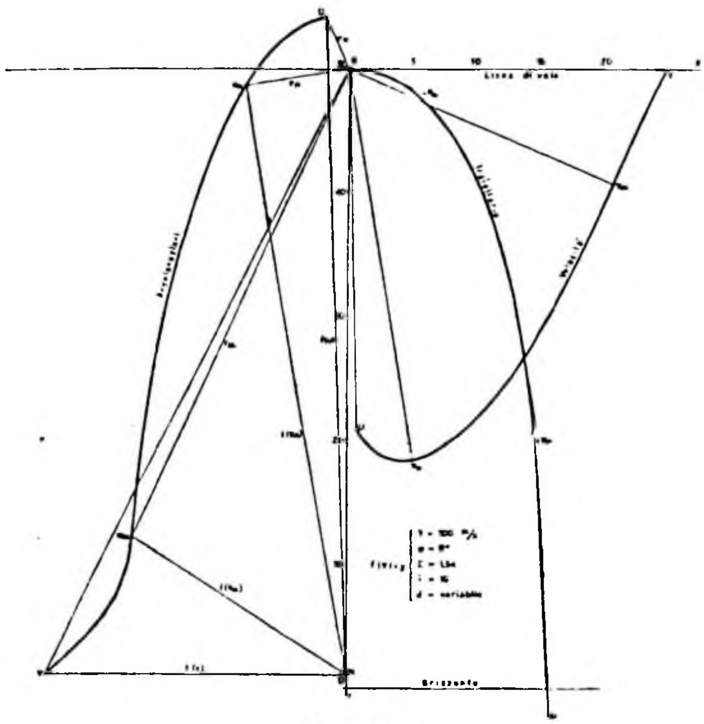


FIG. 8.

La fig. 6 rappresenta una traiettoria comune descritta in atmosfera di supposta densità costante; la fig. 7 rappresenta invece una traiettoria a grande gittata, parte della quale si sviluppa nella stratosfera; infine la fig. 8 rappresenta le curve fondamentali del moto percorso da una bomba lanciata da un aereo in linea di volo orizzontale.

Per la pratica del calcolo ricorrente basta tabulare i valori della velocità iniziale v_o di giascun arco cui corrisponde la ritardazione $f(v_o)$ per dedurre poi dalle componenti cartesiane $v \cos \theta$; $v \operatorname{sen} \theta$ la velocità v all'estremo del primo arco valevole come velocità iniziale all'arco successivo. Calcolate per le coordinate progressive $(x\, y)$ della traiettoria si ottiene via via il punto origine di ciascun arco, al quale va assegnata la competente densità balistica dell'aria δ_o.

Il metodo si presta a rapidi calcoli di traiettorie e relative odografe, in genere tradotte in grafico per conferire una particolare evidenza al quadro generale delle caratteristiche del moto di un proietto d'artiglieria.

BIBLIOGRAFIA:

Traiettoria e odografa balistica — Rivista d'Artiglieria e Genio — Aprile-Maggio 1937.
Tiro a grande gittata — Rivista d'Artiglieria e Genio — Febbraio 1938.
Tiro d'aviazione — Rivista « L'Ingegnere » — Aprile-Maggio 1941.
Shardin-Phisic und Ballistic — Leipzig 1939.

TABELLA II

Υ	$e^{-\gamma}$	$\frac{1-e^{-\gamma}}{\Upsilon}$	Υ	$e^{-\gamma}$	$\frac{1-e^{-\gamma}}{\Upsilon}$	Υ	$e^{-\gamma}$	$\frac{1-e^{-\gamma}}{\Upsilon}$
0,00	1,000	1,000	0,17	0,843	0,920	0,34	0,711	0,847
0,01	0,990	1,000	0,18	0,835	0,915	0,35	0,704	0,843
0,02	0,980	0,990	0,19	0,826	0,911	0,36	0,697	0,839
0,03	0,970	0,985	0,20	0,818	0,907	0,37	0,690	0,836
0,04	0,960	0,980	0,21	0,810	0,902	0,38	0,684	0,832
0,05	0,951	0,075	0,22	0,802	0,898	0,39	0,677	0,828
0,06	0,942	0,971	0,23	0,794	0,893	0,40	0,670	0,824
0,07	0,932	0,966	0,24	0,786	0,889	0,41	0,664	0,820
0,08	0,923	0,961	0,25	0,778	0,885	0,42	0,657	0,816
0,09	0,914	0,957	0,26	0,770	0,880	0,43	0,650	0,812
0,10	0,905	0,952	0,27	0,763	0,876	0,44	0,644	0,809
0,11	0,895	0,947	0,28	0,755	0,872	0,45	0,637	0,805
0,12	0,886	0,943	0,29	0,748	0,868	0,46	0,631	0,801
0,13	0,877	0,938	0,30	0,740	0,864	0,47	0,624	0,797
0,14	0,869	0,934	0,31	0,733	0,859	0,48	0,618	0,794
0,15	0,860	0,929	0,32	0,726	0,856	0,49	0,612	0,790
0,16	0,852	0,924	0,33	0,719	0,851	0,50	0,606	0,788

TABELLA I

v	$F(v)$	$F'(v)$	$\frac{F(v)}{v}$	a	v	$F(v)$	$F'(v)$	$\frac{F(v)}{v}$	a
0	0	0	0		310	18,73	0,343	0,0603	256
10	0,0120	0,0024	0,0012	6,3	320	22,32	0,364	0,0702	260
20	0,0482	0,0048	0,0024	9,7	330	26	0,370	0,0789	260
30	0,1085	0,0072	0,0036	14,2	340	29,72	0,372	0,0872	260
40	0,1929	0,0096	0,0048	19,5	350	33,44	0,370	0,0960	260
50	0,301	0,0115	0,0060	24,7	360	37,12	0,366	0,1031	258
60	0,434	0,0145	0,0072	29,6	370	40,77	0,364	0,1100	257
70	0,591	0,0160	0,0084	34,7	380	44,39	0,360	0,1170	256
80	0,773	0,0194	0,0096	39,9	390	47,97	0,357	0,1220	255
90	0,979	0,0218	0,0108	45,4	400	51,53	0,356	0,1286	256
100	1,210	0,0243	0,0121	50,1	410	55,08	0,355	0,1340	257
110	1,465	0,0268	0,0133	55,4	420	58,62	0,354	0,1400	258
120	1,745	0,0293	0,0145	60	430	62,15	0,354	0,1443	259
130	2,050	0,0317	0,0157	65,4	440	65,69	0,355	0,1481	260
140	2,379	0,0343	0,0169	70	450	69,24	0,355	0,1530	260
150	2,735	0,0368	0,0181	75,5	460	72,79	0,356	0,1579	260
160	3,116	0,0395	0,0193	80	570	76,35	0,357	0,1631	260
170	3,524	0,0421	0,0205	85,4	480	79,92	0,358	0,1668	260
180	3,959	0,0451	0,0219	90,8	490	83,50	0,358	0,1700	261
190	4,426	0,0479	0,0232	96,5	500	87,08	0,359	0,1742	261,5
200	4,920	0,0510	0,0246	103	600	123,24	0,364	0,2054	262
210	5,447	0,0545	0,0260	110	700	159,62	0,365	0,2183	263
220	6,009	0,0582	0,0275	117	800	196,07	0,365	0,2451	263
230	6,612	0,0624	0,0288	125	900	232,55	0,365	0,2584	263
240	7,262	0,0681	0,0303	133,5	1000	269,04	0,365	0,2690	263
250	7,97	0,0752	0,0318	144	1100	305,54	0,365	0,2765	263
260	8,78	0,0880	0,0338	159	1200	342,03	0,365	0,2861	263
270	9,73	0,110	0,0360	177	1300	378,53	0,365	0,2920	263
280	10,97	0,154	0,0392	202	1400	415,03	0,365	0,2975	263
290	12,80	0,224	0,0440	234	1500	451,53	0,365	0,3010	263
300	15,45	0,292	0,0516	248					

13 - Tiro verticale.

a) Generalità.

Il problema del tiro verticale nel vero senso della parola presenta non lievi difficoltà analitiche e difficilmente era impiegato in pratica.

Appunto per questo motivo pochi furono gli autori che si interessarono di tale specie di tiro.

Oggi nel tiro c.a. non è escluso il tiro verticale quindi il problema è divenuto d'attualità, anche perchè la determinazione dell'altezza massima alla quale può giungere un proietto lanciato verticalmente in alto è utile per la costruzione dell'inviluppo di un fascio di traiettorie grafiche.

Il problema venne risolto nella sua generalità dal Cavalli, il quale pubblicò in proposito una nota sulla Rivista di Art. e Genio.

Noi tratteremo la questione introducendo varie ipotesi semplificative che però non alterano sensibilmente il problema.

Nel movimento ascendente, che è il solo che abbia interesse per noi, le due forze: peso e resistenza agiscono nella stessa direzione contraria al moto, basterà quindi considerare il solo asse delle y.

In questo caso, considerando la sola componente della velocità nella direzione dell'asse delle y, possiamo scrivere l'equazione del moto che avrà la forma.

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = -g - f(v) = -g - \frac{\delta i}{C} F(v) \\ \frac{dy}{dt} = v \end{cases}$$

Per risolvere il problema occorrerebbe integrare le due equazioni, il che è possibile solo in casi particolari perchè y è variabile ed $F(v)$ nella forma data da Siacci porta a calcoli molto complicati.

Introdurremo perciò due ipotesi semplificative, supporremo cioè:

1) che lungo tutto l'arco che si considera la densità sia costante ed uguale ad un valore medio δ_m;

2) che a seconda del valore della velocità la $F(v)$ possa esser rappresentata dalle forme seguenti:

per $v > 300$ m/s

$$F(v) = av - b$$

cioè si riterrà che la $F(v)$ sia una funzione lineare della velocità (retta di Chapel) nel qual caso:

$$a = 0{,}365 \qquad b = 96$$

per $v < 300$ m/s

$$F(v) = K(v)\, v^2$$

Da ciò deriva che il calcolo della y massima non può essere fatto che spezzando l'intera ordinata in tratti.

Ciò posto integrando le equazioni del moto per i due casi, calcoliamo gli elementi che ci interessano cioè y e t.

1° Caso: $v > 300$ m/s

$$F(v) = av - b$$

In questo caso l'equazione del moto lungo la verticale

$$\frac{dv}{dt} = -g - \frac{\delta i}{C} F(v)$$

si riduce a:

$$\frac{dv}{dt} = -g - \frac{\delta_m i}{C} av + \frac{\delta_m i}{C} b$$

Poniamo

$$\frac{\delta_m i}{C} b - g = K_1 \quad \text{(Costante)}$$

$$\frac{\delta_m i}{C} a = K_2 \quad (\;\text{»}\;)$$

allora sarà

$$\frac{dv}{dt} = K_1 - K_2 v$$

D'altra parte, dalla

$$\frac{dy}{dt} = v \quad \text{si ha} \quad dt = \frac{dy}{v}$$

quindi

$$dv = (K_1 - K_2 v)\, dt = \frac{K_1 dy - K_2 v\, dy}{v}$$

e separando le variabili

$$\frac{v d v}{K_1 - K_2 v} = dy$$

$$y = \int_V^v \frac{v d v}{K_1 - K_2 v}$$

Si tratta di risolvere l'integrale del 2° membro.

Poniamo allora:

$$K_1 - K_2 v = z \qquad v = \frac{K_1 - z}{K_2}$$

in tal caso

$$-dv = \frac{dz}{K_2}$$

$$y = \int_V^v \frac{-\frac{dz}{K_2}\,\frac{K_1 - z}{K_2}}{z} = \frac{1}{K_2^2}\int_v^V \left(\frac{K_1 dz}{z} - \frac{z\, dz}{z}\right)$$

$$y = \frac{1}{K_2^2}\,(K_1 \lg_e z - z)\Big/_v^V$$

e sostituendo i limiti si ha

$$y = \frac{1}{K_2^2}\left(K_1\, lg_e \frac{K_1 - K_2 V}{K_1 - K_2 v} - (K_1 - K_2 V) + (K_1 - K_2 v)\right)$$

$$y = \frac{1}{K_2^2}\left(K_1\, lg_e \frac{K_1 - K_2 V}{K_1 - K_2 v} + K_2 V - K_2 v\right)$$

Calcolo del tempo.

Dalla

$$dt = \frac{dv}{K_1 - K_2 v}$$

si ha

$$\int_0^t dt = \int_V^v \frac{dv}{K_1 - K_2 v} = -\frac{1}{K_2}\int_V^v \frac{-K_2\, dv}{K_1 - K_2 v}$$

quindi

$$t = \frac{1}{K_2}\, lg_e \frac{K_1 - K_2 V}{K_1 - K_2 v} = \frac{2.30258}{K_2}\, lg_{10} \frac{K_1 - K_2 V}{K_1 - K_2 v}$$

2° Caso: $v < 300$ m/s

$$F(v) = K(v)\, v^2$$

L'equazione del moto è

$$\frac{dv}{dt} = -g - \frac{\delta_m i}{C}\,\frac{F(v)}{v^2}\, v^2 = -g - \frac{\delta_m i}{C}\, K_m(v)\, v^2$$

Posto

$$\frac{\delta_m i}{C}\, K_m(v) = \gamma \quad \text{costante}$$

sarà

$$\frac{dv}{dt} = -g - \gamma v^2$$

e poichè

$$\frac{dy}{dt} = v$$

si avrá

$$\frac{v\,d v}{dy} = -g - \gamma v^2$$

Separando le variabili:

$$\frac{v\,d v}{g + \gamma v^2} = -dg$$

$$y = \int_0^V \frac{v\,d v}{g + \gamma v^2} = \frac{1}{2\gamma}\int_0^V \frac{2\gamma\, v\,d v}{g + \gamma v^2}$$

$$y = \frac{1}{2\gamma}\, lg_e \frac{g + \gamma V^2}{g + \gamma v^2} = \frac{2{,}30258}{2\gamma}\, lg_{10} \frac{g + \gamma V^2}{g + \gamma v^2}$$

Calcolo del tempo

$$\frac{dt}{dv} = - \frac{1}{g + \gamma v^2}; \qquad dt = - \frac{dv}{g + \gamma v^2}$$

ed integrando

$$t = \int_v^V \frac{dv}{g + \gamma v^2} = \frac{1}{\sqrt{g\gamma}} \left(\text{arc } tg \sqrt{\frac{\gamma}{g}}\, V - \text{arc } tg \sqrt{\frac{\gamma}{g}}\, v \right)$$

Per la esecuzione pratica dei calcoli, sia nel 1° che nel 2° caso, occorre co-
scere il valore medio della densità dell'aria nel tratto considerato.

Esso viene calcolato come segue:

Si pone in 1ª approssimazione $\delta_m = \delta_0$ e si calcola un primo valore di y (...
il valore δ_m sarà ricavato in corrispondenza di

$$y = y_0 + \frac{y_m}{2}$$

Il valore di $K(v)$ nel secondo caso viene preso in corrispondenza dello val
medio della velocità, cioè per $\frac{V + v}{2}$.

Evidentemente l'attendibilità dei risultati ottenuti sarà tanto maggi
quanto più grande è il numero di tratti in cui viene spezzato l'intero perco
del proietto; ciò perchè saranno più attendibili i valori medi assunti per δ
e per K.

b) Applicazione.

Dati $V = 400$ $\log \frac{C}{i} = 1$ $\delta = 1$ $y_0 = 300$ trovare l'altezza massima del tiro:

Calcolo del 1° arco.

$V = 400 \quad v = 300$

$$y = \frac{1}{K_2^2} \left[2{,}30258\, K_1\, lg_{10} \frac{K_1 - K_2 V}{K_1 - K_2 v} + K_1 V - K_1 v \right]$$

$$K_1 = \frac{\delta_m i}{C} b - g \qquad b = 96$$

$$K_2 = \frac{\delta_m i}{C} a \qquad a = 0{,}365$$

$$\frac{\delta_0 i}{C} b = 96.000 \qquad \frac{\delta i}{C} \alpha = K_2 = 0{,}365$$

$$g = 9{,}803$$

$K_2 V$	$= 146.000$
K_1	$= 86.197$
$K_1 - K_2 V$	$= -59.803$
$K_2 v$	$= 109.500$
$K_1 - K_2 v$	$= -23.303$
$lg\,(K_1 - K_2 V)$	$= 1{,}77672$
$\mathrm{colg}\,(K_1 - K_2 v)$	$= 2{,}63771$
$lg\,\dfrac{K_1 - K_2 V}{K_1 - K_2 v}$	$= 0{,}41443$

$lg\left[lg\,\dfrac{K_1 - K_2 V}{K_1 - K_2 v}\right]$	$= \bar{1}{,}61745$
$lg\,K_1$	$= 1{,}93549$
$lg\,2{,}30258$	$= 0{,}36222$
$lg\,2{,}30258\,K_1\,lg\,[\cdots\cdots]$	$= 1.91516$
N^o	$= 82.255$
$K_2 V$	$= 146.000$
$N^o + K_2 V$	$= 228.255$
$K_2 v$	$= 109.300$
$[\cdots\cdots\cdots]$	$= 118.755$
$lg\,[\cdots\cdots\cdots]$	$= 2{,}07465$
$\mathrm{colg}\,K_2^2$	$= 0{,}87542$
$lg\,y_{1a}$	$= 2{,}95007$
y_{1a}	$= 891{,}5$

In seconda approssimazione si ha:

$y_o + \dfrac{y_{1a}}{2}$	$= 746$
δ_m	$= 0{,}952$
$lg\,\delta_m$	$= \bar{1}{,}97864$
$lg\,\dfrac{ib}{C}$	$= 1{,}98227$
$lg\,\dfrac{\delta_m\,ib}{C}$	$= 1{,}96091$
$\dfrac{\delta_m\,ib}{C}$	$= 91.392$
g	$= 9.805$
K_1	$= 81.587$
K_2	$= 0{,}347$
$K_2 V$	$= 138.8$
$K_2 v$	$= 104.1$
$K_1 - K_2 V$	$= 57.213$
$K_1 - K_2 v$	$= 22.513$
$lg\,(K_1 - K_2 V)$	$= 1{,}75749$
$\mathrm{colg}\,(K_1 - K_2 v)$	$= \bar{2}{,}64757$
$lg\,\dfrac{K_1 - K_2 V}{K_1 - K_2 v}$	$= 0{,}40506$

$lg\left[lg\,\dfrac{K_1 - K_2 V}{K_1 - K_2 v}\right]$	$= \bar{1}{,}60756$
$lg\,K_1$	$= 1{,}91162$
$lg\,2{,}30258$	$= 0{,}36222$
$lg\,N$	$= 1{,}88136$
N	$= 76.096$
$K_2 V$	$= 138.8$
$K_2 V + N$	$= 214.896$
$K_2 v$	$= 104.100$
$[\cdots\cdots\cdots]$	$= 110.796$
$lg\,[\cdots\cdots\cdots]$	$= 2{,}04453$
$\mathrm{colg}\,K_2^2$	$= 0{,}91934$
$lg\,y$	$= 2{,}96387$
y definitivo	$= 920.2$

Calcolo del tempo

$lg\left[lg\,\dfrac{K_1 - K_2 V}{K_1 - K_2 v}\right]$	$= \bar{1}.60152$
$lg\,2.30258$	$= 0.36222$
$\mathrm{colg}\,K_2$	$= 0{,}45967$
$lg\,t$	$= 0.42941$
t definitivo	$= 2{,}688$

CAPITOLO X

RIDUZIONE DELLE FORMULE IN FUNZIONE DELL'ASCISSA

1 - Eliminazione di u.

Le formule del tiro

$$\begin{cases} x = C' [D(u) - D(V)] \\ y = x \, tg \, \varphi - \dfrac{C' x}{2 \cos^2 \varphi} \left[\dfrac{A(u) - A(V)}{D(u) - D(V)} - J(V) \right] \\ tg \, \theta = tg \, \varphi - \dfrac{C'}{2 \cos^2 \varphi} [J(u) - J(V)] \\ t = \dfrac{C'}{\cos \varphi} [T(u) - T(V)] \\ v \cos \theta = u \cos \varphi \end{cases}$$

possono essere modificate quando in esse sia eliminata la pseudo velocità.

Per fare ciò poniamo:

$$\frac{x}{C'} = x' \qquad D(V) = D_o$$

Sarà allora:

$$D(u) = D_o + x' \qquad [1]$$

Poniamo

$$u = D^{-1}(D_o + x')$$

La pseudo velocità è quindi funzione di $D_o + x'$ e quindi lo saranno pure

$$A(u), \quad J(u), \quad T(u)$$

Indichiamo queste funzioni con

$$A(u) = \bar{A}(D^{\circ} + x') \qquad J(u) = \bar{J}(D_o + x') \qquad T(u) = \overline{T}(D_o + x') \qquad [2]$$

Sarà perciò

$$A(V) = \bar{A}(D_o) \qquad J(V) = \bar{J}(D_o) \qquad T(V) = \overline{T}(D_o)$$

Avremo perciò sostituendo:

$$\frac{x}{C'} = x'$$

$$\frac{y}{x} = tg \, \varphi - \frac{C'}{2 \cos^2 \varphi} \left| \frac{\bar{A}(D_o + x') - \bar{A}(D_o)}{x'} - \bar{J}(D_o) \right|$$

$$= tg \, \varphi - \frac{C'}{2 \cos^2 \varphi} \left| \frac{\bar{A}(D_o + x') - \bar{A}(D_o) - x' \bar{J}(D_o)}{x'} \right|$$

$$tg\,\theta = tg\,\varphi - \frac{C'}{2\cos^2\varphi}\left[\,\bar{J}\,(D_o + x') - \bar{J}\,(D_o)\,\right]$$

$$t = \frac{C'}{\cos\varphi}\left[\,\bar{T}\,(D_o + x') - \bar{T}\,(D_o)\,\right]$$

$$v\cos\theta = D^{-1}\,(D_o + x')\cos\varphi$$

A queste formule si può dare una espressione simile a quella del vuoto con l'aggiunta di particolari coefficenti.

Notiamo infatti che

$$\left.\begin{aligned} \bar{A}'\,(D_o + x') &= \frac{d\,A\,(u)}{d\,D\,(u)} = J\,(u) = \bar{J}\,(D_o + x') \\ \bar{A}''\,(D_o + x') &= \frac{d\,J\,(u)}{d\,D\,(u)} = \bar{J}'\,(D_o + x') = \frac{2\,g}{u^2} \\ \bar{T}'\,(D_o + x') &= \frac{d\,T\,(u)}{d\,D\,(u)} = \frac{1}{u} \end{aligned}\right\}\quad \begin{aligned} d\,D\,(u) &= dx' \text{ perchè} \\ D\,(V) &= \text{cost.} \end{aligned} \qquad [3]$$

ed analogamente per $x' = 0$

$$\left.\begin{aligned} \bar{A}'\,(D_o) &= \bar{J}\,(D_o) = J\,(V) \\ \bar{A}''\,(D_o) &= \frac{2\,g}{V^2} \\ \bar{T}'\,(D_o) &= \frac{1}{V} \end{aligned}\right\} \qquad [3']$$

Infine

$$C' = \frac{x}{x'}$$

Avremo allora

$$\begin{aligned} y &= x\,tg\,\varphi - \frac{C'x}{2\cos^2\varphi}\;\frac{\bar{A}\,(D_o + x') - \bar{A}\,(D_o) - x'\,\bar{J}\,(D_o)}{x'} \\ &= x\,tg\,\varphi - \frac{x^2}{2\cos^2\varphi}\;\frac{\bar{A}\,(D_o + x') - \bar{A}\,(D_o) - x'\,\bar{A}'\,(D_o)}{x'^2} \\ &= x\,tg\,\varphi - \frac{gx^2}{2\,V^2\cos^2\varphi}\;\frac{\bar{A}\,(D_o + x') - \bar{A}\,(D_o) - x'\,\bar{A}'\,(D_o)}{\frac{1}{2}\,x'^2\,\frac{2\,g}{V^2}} \\ &= x\,tg\,\varphi - \frac{gx^2}{2\,V^2\cos^2\varphi}\;\frac{\bar{A}\,(D_o + x') - \bar{A}\,(D_o) - x'\,\bar{A}'\,(D_o)}{\frac{1}{2}\,x'^2\,\bar{A}''\,(D_o)} \end{aligned}$$

cioè

$$y = x\,tg\,\varphi - \frac{gx^2}{2\,V^2\cos^2\varphi}\,G_1$$

Avendo posto:

$$G_1 = \frac{\bar{A}\,(D_o + x') - \bar{A}\,(D_o) - x'\,\bar{A}'\,(D_o)}{\frac{1}{2}\,x'^2\,\bar{A}''\,(D_o)}$$

Dalla

$$tg\,\theta = tg\,\varphi - \frac{C'}{2\cos^2\varphi}\left[\bar{J}(D_o + x') - \bar{J}(D_o)\right]$$

si ha

$$tg\,\theta = tg\,\varphi - \frac{g\,x}{x'\,2\,V^2\cos^2\varphi\,\frac{g}{V^2}}\left[\bar{J}(D_o + x') - \bar{J}(D_o)\right] =$$

$$= tg\,\varphi - \frac{g\,x}{V^2\cos^2\varphi}\,\frac{\bar{J}(D_o + x') - \bar{J}(D_o)}{x'\,\bar{J}'(D_o)}$$

cioè

$$tg\,\theta = tg\,\varphi - \frac{g\,x}{V^2\cos^2\varphi}\,G_2$$

Dalla

$$t = \frac{C'}{\cos\varphi}\left[T(u) - T(V)\right] =$$

$$= \frac{C'}{\cos\varphi}\left[\bar{T}(D_o + x') - \bar{T}(D_o)\right]$$

si ha

$$t = \frac{x}{V\,x'\cos\varphi\,\frac{1}{V}}\left[\bar{T}(D_o + x') - \bar{T}(D_o)\right]$$

$$= \frac{x}{V\cos\varphi}\,\frac{\bar{T}(D_o + x') - \bar{T}(D_o)}{x'\,\bar{T}'(D_o)} = \frac{x}{V\cos\varphi}\,G_3$$

e finalmente

$$v\cos\theta = u\cos\varphi = \cos\varphi\,D^{-1}(D_o + x') = V\cos\varphi\,\frac{D^{-1}(D_o + x')}{V}$$

$$v\cos\theta = V\cos\varphi\,\frac{D^{-1}(D_o + x')}{D^{-1}(D_o)} = V\cos\varphi\,G_4$$

per cui i fattori G hanno le espressioni seguenti:

$$\left.\begin{aligned} G_1 &= \frac{\bar{A}(D_o + x') - \bar{A}(D_o) - x'\,\bar{A}'(D_o)}{\frac{1}{2}\,x'^2\,\bar{A}''(D_o)} \\ G_2 &= \frac{\bar{J}(D_o + x') - \bar{J}(D_o)}{x'\,\bar{J}'(D_o)} \\ G_3 &= \frac{\bar{T}(D_o + x') - \bar{T}(D_o)}{x'\,\bar{T}'(D_o)} \\ G_4 &= \frac{D^{-1}(D_o + x')}{D^{-1}(D_o)} \end{aligned}\right\} \qquad [4]$$

2 - Relazione tra i fattori di tiro ed i fattori $G_1\ G_2\ G_3\ G_4$ (1).

Si è visto che

$$y = x\,tg\,\varphi - \frac{g\,x^2}{2\,V^2 \cos^2\varphi}\,G_1$$

da cui

$$G_1 = \frac{2\,V^2 \cos^2\varphi}{g\,x}\,(tg\,\varphi - tg\,\varepsilon)$$

quindi

$$g\,G_1 = \frac{2\,V^2 \cos^2\varphi}{x}\,(tg\,\varphi - tg\,\varepsilon) = f_1$$

$$tg\,\theta = tg\,\varphi - \frac{g\,x}{V^2 \cos^2\varphi}\,G_2$$

da cui

$$g\,G_2 = \frac{V^2 \cos^2\varphi}{g}\,(tg\,\varphi - tg\,\theta)$$

moltiplico sopra e sotto per 2 $(tg\,\varphi - tg\,\varepsilon)$ quindi

$$g\,G_2 = \frac{2\,V^2 \cos^2\varphi}{g}\,(tg\,\varphi - tg\,\varepsilon)\,\frac{tg\,\varphi - tg\,\theta}{2\,(tg\,\varphi - tg\,\varepsilon)} = f_1\,\frac{tg\,\varphi - tg\,\theta}{2\,(tg\,\varphi - tg\,\varepsilon)}$$

aggiungendo e togliendo al numeratore $tg\,\varepsilon$ si ha:

$$g\,G_2 = f_1\,\frac{tg\,\varphi - tg\,\varepsilon + tg\,\varepsilon - tg\,\theta}{2\,(tg\,\varphi - tg\,\varepsilon)} = f_1\,\frac{1 + f_2}{2}$$

$$t = \frac{x}{V \cos\varphi}\,G_3$$

da cui

$$G_3 = \frac{V\,t \cos\varphi}{x} = \frac{\dfrac{V \cos\varphi}{x}}{\dfrac{1}{t}}$$

moltiplico sopra e sotto per $2\,V \cos\varphi\,(tg\,\varphi - tg\,\varepsilon)$

$$G_3 = \frac{2\,\dfrac{V^2 \cos^2\varphi}{x}\,(tg\,\varphi - tg\,\varepsilon)}{2\,\dfrac{V \cos\varphi}{t}\,(tg\,\varphi - tg\,\varepsilon)} = \frac{f_1}{2\,f_3}$$

$$v \cos\theta = V \cos\varphi\,G_4 \qquad G_4 = \frac{v \cos\theta}{V \cos\varphi} = \frac{u}{V} = \frac{1}{f_4}$$

Riassumendo:

$$g\,G_1 = f_1$$

$$g\,G_2 = f_1\,\frac{1 + f_2}{2}$$

$$G_3 = \frac{f_1}{2\,f_3}$$

$$G_4 = \frac{1}{f_4}$$

(1) Nella trattazione che segue per maggiore comodità di calcolo considereremo i fattori di tiro secondo le espressioni del Parodi.

3 - Traiettoria nell'aria dedotta da quella nel vuoto.

Se nella equazione:

$$y = x\, tg\, \varphi - \frac{g x^2}{2\, V^2 \cos^2 \varphi}\, G_1$$

si moltiplicano ambo i membri per G_1 si ottiene:

$$y\, G_1 = x\, G_1\, tg\, \varphi - \frac{g\, (x\, G_1)^2}{2\, V^2 \cos^2 \varphi}$$

posto

$$\begin{cases} G_1\, x = \xi \\ G_1\, y = \eta \end{cases}$$

si ha:

$$\eta = \xi\, tg\, \varphi - \frac{g\, \xi^2}{2\, V^2 \cos^2 \varphi}$$

la quale, se si interpretano η e ξ come l'ordinata e l'ascissa, rappresenta l'equazione di una traiettoria nel vuoto corrispondente alla stessa velocità ed allo stesso φ.

Se quindi si ha una traiettoria nel vuoto, si può dedurre da essa la traiettoria nell'aria corrispondente alla stessa V e φ, purchè si abbia una tabella di corrispondenza fra i valori di x e quelli di $G_1 = \frac{f_1}{g}$ che si può trasformare in una tabella frà x e ξ e quindi ricavare da $\eta = G_1\, y$, il valore di y.

La compilazione della tabella viene fatta nel seguente modo:

Si vuole la traiettoria corrispondente ad un dato V e ad un dato φ.

Si ricavano dalle tavole di tiro numeriche dei valori convenientemente intervallati di x ed i corrispondenti φ, quindi si calcola $f_1 = \frac{V^2 \operatorname{sen} 2\varphi}{X}$; ricavato f_1 si divide per g e si ha $G_1 = \frac{f_1}{g}$ indi $\xi = G_1\, x$ e

$$\eta = \xi\, tg\, \varphi - \frac{g\, \xi^2}{2\, V^2 \cos^2 \varphi}$$

e da η si ha

$$y = \frac{\eta}{G_1} = \frac{\eta}{\xi}\, x$$

Dati φ e V

$X = x$	φ_x	$f_1 = \frac{V^2 \operatorname{sen}^2 \varphi_x}{x}$	$G_1 = \frac{f_1}{g}$	$\xi = G_1\, x$	$\eta = \xi\, tg\, \varphi - \frac{g\, \xi^2}{2\, V^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}$	$y = x \frac{\eta}{\xi}$

4 - Formule esplicite nel caso di resistenza ennesima.

Quando si ponga

$$F\,(v) = \lambda\, v^n \text{ oppure } F\,(u) = \lambda\, u^n$$

le formule dei fattori G assumono un'altra forma.

Infatti dalla

$$D(u) = \int \frac{-u\,du}{F(u)}$$

si ha

$$D_0 + x' = \int \frac{-u\,du}{F(u)} = \int \frac{-u\,du}{\lambda u^n} = -\frac{1}{\lambda} \int u^{-(n-1)} du$$

integrando:

$$D_0 + x' = -\frac{1}{\lambda} \frac{u^{-(n-1)+1}}{-(n-1)+1} = \frac{1}{\lambda} \frac{1}{(n-2)\,u^{n-2}}$$

Se $x' = 0$ cioè $D(u) = D(V)$

$$D_0 = \frac{1}{\lambda} \frac{1}{(n-2)\,V^{n-2}}$$

Dividendo la 1ª per la 2ª:

$$\frac{D_0 + x'}{D_0} = 1 + \frac{x'}{D_0} = \frac{V^{n-2}}{u^{n-2}}$$

e quindi

$$\frac{1}{u^{n-2}} = \left(1 + \frac{x'}{D_0}\right) \frac{1}{V^{n-2}}$$

per cui

$$\frac{1}{u} = \left(1 + \frac{x'}{D_0}\right)^{\frac{1}{n-2}} \frac{1}{V}$$

Ora sappiamo che

$$\bar{J}'(D_0 + x') = \bar{A}''(D_0 + x') = \frac{2g}{u^2} = \frac{2g}{V^2}\left(1 + \frac{x'}{D_0}\right)^{\frac{2}{n-2}}$$

od anche

$$\frac{d\bar{J}(D_0 + x')}{d(D_0 + x')} = \frac{2g}{V^2}\left(1 + \frac{x'}{D_0}\right)^{\frac{2}{n-2}}$$

da cui separando le variabili:

$$d\bar{J}(D_0 + x') = \frac{2g}{V^2} D_0 \left(1 + \frac{x'}{D_0}\right)^{\frac{2}{n-2}} d\left(1 + \frac{x'}{D_0}\right)$$

Integrando dall'origine ($x' = 0$) ad un punto qualunque

$$\bar{J}(D_0 + x') - \bar{J}(D_0) = \frac{2g\,D_0}{V^2} \left| \frac{\left(1 + \frac{x'}{D_0}\right)^{\frac{2}{n-2}+1}}{\frac{2}{n-2}+1} - \frac{1}{\frac{2}{n-2}+1} \right| =$$

$$= \frac{2g\,D_0}{V^2} \left[\frac{\left(1 + \frac{x'}{D_0}\right)^{\frac{n}{n-2}}}{\frac{n}{n-2}} - \frac{1}{\frac{n}{n-2}} \right] = \frac{2g\,D_0}{V^2} \frac{n-2}{n} \left| \left(1 + \frac{x'}{D_0}\right)^{\frac{n}{n-2}} - 1 \right|$$

Integriamo una 2ª volta notando che

$$\int_0^{x'} \bar{J}(D_o + x')\, dx' = \bar{A}(D_o + x') - \bar{A}(D_o)$$

$$\int \bar{J}(D_o)\, dx' = \int \bar{A}'(D_o)\, dx' = x' A'(D_o)$$

quindi

$$\int_0^{x'} \left| (\bar{J} D_o + x') - \bar{J}(D_o) \right| dx' = \bar{A}(D_o + x') - \bar{A}(D_o) - x' \bar{A}'(D_o) =$$

$$= \frac{2g D_o}{V^2} \frac{n-2}{n} \int \left[\left(1 + \frac{x'}{D_o} \right)^{\frac{n}{n-2}} - 1 \right] D_o\, d\left(1 + \frac{x'}{D_o} \right) =$$

$$= \frac{2g D_o^2}{V^2} \frac{n-2}{n} \left[\frac{\left(1 + \frac{x'}{D_o} \right)^{\frac{n}{n-2}+1}}{\frac{n}{n-2}+1} - \frac{1}{\frac{n}{n-2}+1} - \frac{x'}{D_o} \right] =$$

$$= \frac{2g D_o^2}{V^2} \frac{n-2}{n} \left[\frac{\left(1 + \frac{x'}{D_o} \right)^{\frac{2n-2}{n-2}} - 1}{\frac{2n-2}{n-2}} - \frac{x'}{D_o} \right] =$$

$$= \frac{2g D_o^2}{V^2} \frac{(n-2)^2}{n(2n-2)} \left[\left(1 + \frac{x'}{D_o} \right)^{\frac{2n-2}{n-2}} - 1 - \frac{2n-2}{n-2} \frac{x'}{D_o} \right]$$

Ora abbiamo trovato che

$$G_1 = \frac{\bar{A}(D_o + x') - \bar{A}(D_o) - x' \bar{A}'(D_o)}{\frac{1}{2} x'^2 \bar{A}''(D_o)}$$

quindi

$$G_1 = \frac{\frac{(n-2)^2}{n(2n-2)} \frac{2g D_o^2}{V^2} \left[\left(1 + \frac{x'}{D_o} \right)^{\frac{2n-2}{n-2}} - \frac{2n-2}{n-2} \frac{x'}{D_o} - 1 \right]}{\frac{1}{2} x'^2 \frac{2g}{V^2}}$$

e dividendo numeratore e denominatore per

$$\frac{(n-2)^2}{n(2n-2)} \frac{2g D_o^2}{V^2}$$

si ha

$$G_1 = \frac{\left(1 + \frac{x'}{D_o} \right)^{\frac{2n-2}{n-2}} - \frac{2n-2}{n-2} \frac{x'}{D_o} - 1}{\frac{1}{2} x'^2 \frac{2g}{V^2} \frac{n(2n-2)}{(n-2)^2} \frac{V^2}{2g D_o^2}} = \frac{\left(1 + \frac{x'}{D_o} \right)^{\frac{2n-2}{n-2}} - \frac{2n-2}{n-2} \frac{x'}{D_o} - 1}{\frac{1}{2} \frac{n(2n-2)}{(n-2)^2} \left(\frac{x'}{D_o} \right)^2}$$

In modo analogo si ricavano gli altri fattori G.

Se ora riprendiamo l'espressione

$$D_o = \frac{1}{\lambda (n-2) V^{n-2}}$$

e ricaviamo $\frac{x'}{D_0}$ si ha

$$\frac{x'}{D_0} = \lambda (n-2)\, V^{n-2}\, x'$$

posto

$$z = \lambda\, V^{n-2}\, x'$$

quindi

$$\frac{x'}{D_0} = (n-2)\, z$$

e sostituendo nelle formule trovate di G questo valore

$$G_1 = \frac{\left[1+(n-2)z\right]^{\frac{2n-2}{n-2}} - \frac{(2n-2)(n-2)z}{n-2} - 1}{\frac{1}{2}\,\frac{n(2n-2)}{(n-2)^2}\,(n-2)^2 z^2} = \frac{\left[1+(n-2)z\right]^{\frac{2n-2}{n-2}} - 1 - (2n-2)z}{\frac{1}{2}\, n\,(2n-2)\, z^2}$$

In modo analogo si possono ricavare i valori di

$$G_2 = \frac{\left[1+(n-2)z\right]^{\frac{n}{n-2}} - 1}{n\,z}\ ; \qquad G_3 = \frac{\left[1+(n-2)z\right]^{\frac{n-1}{n-2}} - 1}{(n-1)\,z}$$

$$G_4 = \left[1+(n-2)z\right]^{-\frac{1}{n-2}}$$

5 – Resistenza cubica e quadratica.

Consideriamo due casi particolarmente importanti: quelli in cui la resistenza è cubica e quadratica.

Nel 1° caso ($n = 3$) le formule dei fattori G diventano

$$G_1 = \frac{(1+z)^4 - 1 - 4z}{6z^2}\ ; \qquad G_2 = \frac{(1+z)^3 - 1}{3z}$$

$$G_3 = \frac{(1+z)^2 - 1}{2z} \qquad G_4 = (1+z)^{-1}$$

Sviluppando si ottiene:

$$G_1 = \frac{1 + 4z + 6z^2 + 4z^3 + z^4 - 1 - 4z}{6z^2} = \frac{z^2}{6} + \frac{4z}{6} - 1$$

$$G_2 = \frac{1 + 3z + 3z^2 + z^3 - 1}{3z} = \frac{z^2}{3} + z + 1$$

$$G_3 = \frac{1 + z^2 + 2z - 1}{2z} = \frac{z}{2} + 1$$

$$G_4 = \frac{1}{1+z}$$

Abbiamo visto che per $n = 3$

$$z = \lambda V^{n-2} x' = \lambda V x'$$

quindi

$$G_1 = 1 + \frac{2}{3} \lambda V x' + \frac{1}{6} (\lambda V x')^2$$

$$G_2 = 1 + \lambda V x' + \frac{(\lambda V x')^2}{3}$$

$$G_3 = 1 + \frac{\lambda V x'}{2}$$

$$G_4 = \frac{1}{1 + \lambda V x'}$$

Di queste formule le ultime due hanno particolare importanza perchè permettono di dimostrare un importante teorema che viene applicato nella balistica pratica.

Infatti le formule del tiro che danno la t e la $v \cos \theta$ diventano

$$t = \frac{x}{V \cos \varphi} G_3 = \frac{x}{V \cos \varphi} \left(1 + \frac{\lambda V x'}{2}\right); \qquad v \cos \theta = V \cos \varphi \, (1 + \lambda V x')^{-1}$$

da cui si ricava:

$$\frac{x}{t} = \frac{V \cos \varphi}{1 + \lambda V \frac{x'}{2}}; \qquad v \cos \theta = \frac{V \cos \varphi}{1 + \lambda V x'}$$

dunque $\frac{x}{t}$ è ciò che diventa $v \cos \theta$ quando per x' si ponga $\frac{x'}{2}$ e poichè si può ritenere costante C' data la piccola ampiezza dell'arco si ha:

Teorema di Bashfort. Per la resistenza cubica, dividendo lo spazio orizzontale per il tempo impiegato a percorrerlo, si ha esattamente il valore della velocità orizzontale corrispondente al punto di mezzo di quello spazio orizzontale.

Il caso $n = 2$ cioè della resistenza quadratica risulta particolarmente importante perchè quando $V < 250 \div 240$ m/s le formule che risolvono i problemi del tiro assumono forme molto semplici.

Se nelle formule che danno i fattori G_1..... poniamo $n = 2$ si ha $n - 2 = 0$ ed $\frac{1}{n-2} = \infty$ quindi le espressioni dei fattori G_i assumono forma indeterminata.

Ricordiamo allora la definizione del numero e che è dato da

$$e = \lim_{m=0} (1 + m)^{\frac{1}{m}}$$

Allora nell'espressione

$$G_1 = \frac{\left[1+(n-2)z\right]^{\frac{2n-2}{n-2}} - 1 - (2n-2)z}{\frac{1}{2}(2n-2)\,n\,z^2}$$

si osservi che

$$\left[1+(n-2)z\right]^{\frac{2n-2}{n-2}} = \left\{\left[1+(n-2)z\right]^{\frac{1}{(n-2)z}}\right\}^{(2n-2)z}$$

e al limite per $n \longrightarrow 2$

$$= e^{(2n-2)z}$$

quindi per $n = 2$

$$G_1 = \frac{e^{2z} - 1 - 2z}{2z^2}$$

$$G_2 = \frac{\left[1+(n-2)z\right]^{\frac{n}{n-2}} - 1}{nz}$$

si ha

$$\left[1+(n-2)z\right]^{\frac{n}{n-2}} = \left\{\left[1+(n-2z)\right]^{\frac{1}{(n-2)z}}\right\}^{nz} = e^{2z}$$

$$G_2 = \frac{e^{2z}-1}{2z}$$

$$G_3 = \frac{\left[1+(n-2)z\right]^{\frac{n-1}{n-2}} - 1}{(n-1)z} = \frac{\left\{\left[1+(n-2)z\right]^{\frac{1}{(n-2)z}}\right\}^{(n-1)z}}{(n-1)z} = e^{(n-1)z} = e^z$$

$$G_3 = \frac{e^z - 1}{z}$$

$$G_4 = \left[1+(n-2)z\right]^{-\frac{1}{n-2}} = \left\{\left[1+(n-2)z\right]^{\frac{1}{(n-2)z}}\right\}^{-z} = e^{-z}$$

cioè

$$G_1 = \frac{e^{2z} - 1 - 2z}{2z^2}$$

$$G_2 = \frac{e^{2z}-1}{2z}$$

$$G_3 = \frac{e^z-1}{z}$$

$$G_4 = e^{-z}$$

inoltre

$$z = \lambda\, V^{n-2}\, x' = \lambda\, x' = \lambda\, f_0 = \lambda \frac{x}{C'}$$

Quindi nel caso di resistenza quadratica i fattori G sono indipendenti dalla V.

CAPITOLO XI

RESISTENZA QUADRATICA

1 – Fattori di tiro per V minore di 240 m/s.

Nei vecchi trattati di balistica si trovano delle tavole che danno i valori dei fattori G_1 G_2 G_3 G_4 per il caso della resistenza quadratica, e poichè fra questi fattori e quelli di tiro vi sono le note relazioni del capitolo precedente, si può arguire che per $v \leq 240$, si possono avere i valori dei fattori di tiro f_1, f_2, f_3, f_4 con una sola tavola a semplice entrata, valevole per qualunque velocità iniziale, purchè ripetiamo, inferiore a 240 m/s.

È facile in generale dedurre i fattori di tiro dai fattori G.

Infatti si ha

$$g\,G_1 = f_1 \qquad g\,G_2 = f_1\,\frac{1+f_2}{2} \qquad G_3 = \frac{f_1}{2\,f_3} \qquad G_4 = \frac{1}{f_4}$$

$$\frac{1+f_2}{2} = \frac{g\,G_2}{f_1} = \frac{g\,G_2}{g\,G_1} = \frac{G_2}{G_1}$$

quindi

$$f_2 = \frac{2\,G_2}{G_1} - 1 \qquad f_3 = \frac{f_1}{2\,G_3} = \frac{g\,G_1}{2\,G_3} \qquad f_4 = \frac{1}{G_4}$$

È quindi possibile costruire una tavola a semplice entrata la quale fornisca i valori dei vari fattori di tiro in funzione di

$$f_0 = x'$$

giacchè i fattori dipendono solo da

$$z = \lambda\,x' = \lambda\,f_0 \quad (\lambda \text{ costante})$$

Nella stessa tavola possono essere anche contenuti i valori di f_5 ed f_6 che si può dimostrare dipendono solo da f_0 e quindi sono anch'essi fattori di tiro.

Però tale tavola contiene pure altri coefficienti che facilitano la risoluzione dei problemi di tiro.

Moltiplicando f_1 per f_0 si ha

$$f_0\,f_1 = f_7 = \frac{2\,V^2\cos^2\varphi}{x}\,(tg\,\varphi - tg\,\varepsilon)\,\frac{x}{C'} =$$

$$= \frac{2\,V^2\cos^2\varphi}{C'}\,(tg\,\varphi - tg\,\varepsilon)$$

e per il punto di caduta:

$$f_7 = f_1\,f_0 = \frac{V^2\,\text{sen}\,2\,\varphi}{X}\,\frac{X}{C'} = \frac{V^2\,\text{sen}\,2\,\varphi}{C'}$$

che è un fattore analogo ad f

Dai fattori f_2 f_7 ed f_4 si ha

$$f_8 = \frac{f_2 f_7}{f_4^2} = \frac{tg\,\varepsilon - tg\,\theta}{tg\,\varphi - tg\,\varepsilon} \frac{2\,V^2 \cos^2\varphi}{C'} \frac{tg\,\varphi - tg\,\varepsilon}{(V\cos\varphi)^2} (V\cos\theta)^2 =$$

$$= \frac{2\,V^2 \cos^2\theta\,(tg\,\varepsilon - tg\,\theta)}{C'} = \frac{2\,V^2 \operatorname{sen}(\varepsilon - \theta)\cos\theta}{C'\cos\varepsilon}$$

e per il punto di caduta

$$f_8 = \frac{U^2 \operatorname{sen} 2\,\omega}{C'}$$

Dai fattori f_1 f_3 si ha infine:

$$f_9 = \frac{2\,f_3}{\sqrt{f_1}} = \frac{\frac{2\,V\cos\varphi}{t}(tg\,\varphi - tg\,\varepsilon)}{\sqrt{\frac{2\,V^2\cos^2\varphi}{x}(tg\,\varphi - tg\,\varepsilon)}}$$

$$= \sqrt{\frac{\frac{4\,V^2\cos^2\varphi}{t^2}(tg\,\varphi - tg\,\varepsilon)^2}{\frac{2\,V^2\cos^2\varphi}{x}(tg\,\varphi - tg\,\varepsilon)}}$$

$$= \frac{\sqrt{2\,x\,(tg\,\varphi - tg\,\varepsilon)}}{t}$$

e per il punto di caduta

$$f_9 = \frac{\sqrt{2\,X\,tg\,\varphi}}{T}$$

La tav. XIX contiene appunto i logaritmi di f_1 f_2 f_3 f_4 f_5 f_6 f_7 f_8 f_9 per f_0 variabili di 100 in 100 metri da 0 a 5000.

Quindi se la velocità è inferiore a 240 m/s i problemi del tiro possono essere risolti molto rapidamente impiegando tale tavola che è di più facile e rapido impiego di quella ordinaria.

I risultati che si ottengono mercè l'impiego delle tavole hanno la stessa approssimazione di quelli ottenuti impiegando la tav. balistica generale perchè in questo caso l'interpolazione è semplice e gli intervalli degli f_0 sono più piccoli.

Non è quindi necessario risolvere i problemi del tiro per $V < 240$ impiegando la tavola balistica generale.

Nel caso di resistenza quadratica poi il β, che abbiamo visto nel caso generale, diventa indipendente della V e la sua espressione risulta di molto semplificata poichè è

$$\beta = \frac{3}{4\,tg\,\varepsilon} \left\{ \xi_2(\varphi) + \cot g^2\varphi\,[\xi_4(\varphi) - \xi_2(\varphi)] \right\}$$

I suoi valori sono contenuti nella tav. VIII-*bis* che è a semplice entrata e funzione di φ, quindi di assai comodo impiego.

Anche in questo caso quando è incognita la φ occorre fare un calcolo di 1ª approssimazione assumendo un valore presunto di β ed in mancanza d'altro ponendo $\beta = 1$ e quindi ripetere il calcolo col valore di β corrispondente al φ trovato.

2 - Problema I.

Dati $V < 240$; X; $\frac{C}{\delta i}$ trovare φ, ω, T, U, x_0, Y.

Non essendo noto φ si farà un primo tentativo con $\beta = 1$ e si avrà

$$f_0 = \frac{X}{C'}$$

Dalla tav. XIX si ha

$$f_1 = \frac{V^2 \operatorname{sen} 2\varphi}{X};$$

e quindi φ col quale si dedurrà un nuovo β e quindi

$$f_0 = \frac{X}{C'} \qquad f_1 = \frac{V^2 \operatorname{sen} 2\varphi}{X}$$

$$f_2 = \frac{tg\,\omega}{tg\,\varphi} \qquad f_3 = \frac{V \operatorname{sen} \varphi}{T}$$

$$f_4 = \frac{V \cos \varphi}{U \cos \omega} \qquad f_5 = \frac{x_0}{X}$$

$$f_6 = \frac{Y}{X\,tg\,\varphi}$$

Applicazione - Obice da 75/13.

Dati $X = 2500$; $\qquad V = 221 \qquad lg\,\frac{C}{\delta i} = 0{,}08573$

Assumiamo in 1ª approssimazione $\beta = 1$

$$\begin{aligned} lg\,X &= 3{,}39794 \\ \text{colg}\,C' &= \bar{1}{,}91427 \\ lg\,f_0 &= 3{,}31221 \\ f_0 &= 2052 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} lg\,f_1 &= 1{,}0677 \\ lg\,X &= 3{,}3979 \\ \text{colg}\,V^2 &= \bar{5}{,}3112 \\ lg \operatorname{sen} 2\varphi &= \bar{1}{,}7768 \\ 2\varphi &= 36^\circ\,44' \\ \varphi &= 18^\circ\,22' \end{aligned}$$

Si ripete il calcolo col nuovo valore di β

$$\beta = 1{,}0217$$

$$\begin{aligned} lg\,\frac{C}{\delta i} &= 0{,}08573 \\ \text{colg}\,\beta &= \bar{1}{,}99068 \\ lg\,C' &= 0{,}07641 \\ \text{colg}\,C' &= \bar{1}{,}92359 \\ lg\,X &= 3{,}39794 \\ lg\,f_0 &= 3{,}32153 \\ f_0 &= 2097 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} lg\,f_1 &= 1{,}0694 \\ lg\,\frac{X}{V^2} &= \bar{2}{,}7091 \\ lg \operatorname{sen} 2\varphi &= \bar{1}{,}7785 \\ 2\varphi &= 36^\circ\,54' \\ \varphi &= 18^\circ\,27' \end{aligned} \qquad \begin{aligned} lg\,f_2 &= 0{,}0745 \\ lg\,tg\,\varphi &= \bar{1}{,}5233 \\ lg\,tg\,\omega &= \bar{1}{,}5978 \\ \omega &= 21^\circ\,36' \end{aligned}$$

$lg\, f_3 = 0{,}7112$	$lg\, f_4 = 0{,}1120$	$lg\, f_5 = \bar{1}{,}7172$
$lg\, V = 2{,}3444$	$lg\, V = 2{,}3444$	$lg\, X = 3{,}3979$
lg sen $\varphi = \bar{1}{,}5003$	$lg \cos \varphi = \bar{1}{,}9771$	$lg\, x_0 = 3{,}1151$
colg $f_3 = 1{,}2888$	colg $\cos \omega = 0{,}0316$	$x_0 = 1303$
$lg\, T = 1{,}1335$	colg $f_4 = 1{,}8880$	
$T = 13{,}60$	$lg\, U = 2{,}2411$	
	$U = 174{,}2$	
	$lg\, f_6 = \bar{1}{,}4353$	
	$lg\, X = 3{,}3979$	
	$lg\, tg\, \varphi = \bar{1}{,}5233$	
	$lg\, Y = 2{,}3565$	
	$Y = 227{,}3$	

3 - Problema II.

Dati: V (< 240), φ, $\frac{C}{\delta\, i}$, determinare X.

Si ricava subito il β esatto dalla tav. VIII-*bis* indi si calcola

$$f_7 = \frac{V^2 \operatorname{sen} 2\varphi}{C'}$$

da cui

$$f_0 = \frac{X}{C'} \qquad X = f_0\, C'$$

4 - Problema III.

Data la gittata X, φ e C' trovare V.

Si calcola $f_0 = \frac{X}{C'}$ indi

$$f_1 = \frac{V^2 \operatorname{sen} 2\varphi}{X}$$

da cui

$$V = \sqrt{\frac{f_1\, X}{\operatorname{sen} 2\varphi}}$$

5 - Problema IV.

Dati V, φ, X, δ determinare $i\, \beta$.

Si calcola

$$f_1 = \frac{V^2 \operatorname{sen} 2\varphi}{X}$$

indi $f_0 = \frac{X}{C}\, \delta\, i\, \beta$ da cui

$$i\, \beta = \frac{f_0\, C}{\delta\, X}$$

6 - Problema V.

Dati X, ω, $\frac{C}{\delta i}$ trovare φ e V.

Si fissa una $\varphi < \omega$ e si ricava β di 1ª approssimazione indi si calcola

$$f_0 = \frac{X}{C'}; \qquad f_2 = \frac{tg\,\omega}{tg\,\varphi}$$

e si ha φ.

Si ripete il calcolo con un β esatto indi si ricava

$$f_1 = \frac{V^2 \operatorname{sen} 2\,\varphi}{X}$$

da cui

$$V = \sqrt{\frac{f_1 X}{\operatorname{sen} 2\,\varphi}}$$

7 - Problema VI.

Dati X, U e $\frac{C}{\delta i}$ determinare φ e V.

Come precedentemente si ricava β e C' indi

$$f_0 = \frac{X}{C'} \qquad f_8 = \frac{U^2 \operatorname{sen} 2\,\omega}{C'}$$

avuto ω si ricava

$$f_2 = \frac{tg\,\omega}{tg\,\varphi}$$

indi φ.

Si ripete il calcolo col β esatto; avuto φ si ha:

$$V = \sqrt{\frac{X f_1}{\operatorname{sen} 2\,\varphi}}$$

8 - Problema VII.

Dati U, ω, $\frac{C}{\delta i}$ trovare X, φ, V.

Si ricava β com'è detto precedentemente indi si calcola C' ed $f_8 = \frac{U^2 \operatorname{sen} 2\,\omega}{C'}$, avuto f_8 si calcola

$$f_0 = \frac{X}{C'} \qquad \text{ed} \qquad f_2 = \frac{tg\,\omega}{tg\,\varphi}$$

indi si ricava V.

Applicazione - Obice da 75/13.

Dati $lg\,\frac{C}{\delta i} = 0{,}08573$; $U = 180$; $\omega = 15°48'$ determinare X, φ, V.

Assumiamo $\varphi < \omega$ ed uguale a 14° allora $\beta = 1{,}0123$

$lg \frac{C}{\delta i} = 0{,}08573$	$lg\, U^2 = 4{,}51054$	$f_o = 1639$
$\mathrm{colg}\, \beta = \bar{1}{,}99469$	$lg \,\mathrm{sen}\, 2\, \omega = \bar{1}{,}71932$	$lg\, f_2 = 0{,}0583$
$lg\, C' = 0{,}08042$	$\mathrm{colg}\, C' = \bar{1}{,}91958$	$lg\, tg\, \omega = \bar{1}{,}4517$
	$lg\, f_8 = 4{,}14944$	$\mathrm{colg}\, f_2 = 1{,}9417$
	$0{,}1\, f_8 = 1411$	$lg\, tg\, \varphi = \bar{1}{,}3934$
		$\varphi = 13^o\, 54'$

Per questo nuovo valore di φ si ha $\beta = 1{,}0121$

$lg \frac{C}{\delta i} = 0{,}08573$	$lg\, U^2 \,\mathrm{sen}\, 2\, \omega = 4{,}22986$	$0{,}1\, f_8 = 1410$
$\mathrm{colg}\, \beta = \bar{1}{,}99478$	$\mathrm{colg}\, C' = \bar{1}{,}91949$	$f_o = 1637$
$lg\, C' = 0{,}08051$	$lg\, f_8 = 4{,}14935$	

$lg\, f_o = 3{,}21405$	$lg\, f_1 = 1{,}0517$	$lg\, f_2 = 0{,}0583$
$lg\, C' = 0{,}08051$	$lg\, X = 3{,}2946$	$lg\, tg^2\, \omega = \bar{1}{,}4517$
$lg\, X = 3{,}29456$	$\mathrm{colg}\, \mathrm{sen}^2\, \varphi = 0{,}3313$	$\mathrm{colg}\, f_2 = \bar{1}{,}9417$
$X = 1970$	$lg\, V^2 = 4{,}6776$	$lg\, tg\, \varphi = \bar{1}{,}3934$
	$lg\, V = 2{,}3388$	$\varphi = 13^o\, 54'$
	$V = 218{,}2$	

9 – Problema VIII.

Dati X, T, $\frac{C}{\delta i}$, trovare φ, V.

Si completa il C' com'è detto precedentemente indi si calcola

$$f_o = \frac{X}{C'} \text{ e da } f_9 = \frac{\sqrt{2\, X\, tg\, \varphi}}{T}$$

si ricava

$$tg\, \varphi = \frac{T^2 \cdot f_9^2}{2\, X}$$

si ripete il calcolo col nuovo β e si ha infine

$$V^2 = f_1 \frac{X}{\mathrm{sen}\, 2\, \varphi}$$

Applicazione. Dati $X = 3000$ $T = 17{,}4$ $lg \frac{C}{\delta i} = 0{,}08573$
Trovare φ e V.

Assumo $\varphi = 24^\circ$ e ricavo $\beta = 1{,}0384$

$lg\ \frac{C}{\delta i} = 0{,}08573$	$lg\ X = 3{,}47712$	$f_0 = 2557$
$colg\ \beta = \bar{1}{,}98364$	$colg\ C' = \bar{1}{,}93063$	$lg\ f_9 = 0{,}4737$
$lg\ C' = 0{,}06937$	$lg\ f_0 = 3{,}40775$	

$$
\begin{aligned}
lg\ T^2 &= 2{,}4811 \\
lg\ f_9^2 &= 0{,}9474 \\
colg\ 2 &= \bar{1}{,}6990 \\
colg\ X &= \bar{4}{,}5229 \\
lg\ tg\ \varphi &= \bar{1}{,}6504 \\
\varphi &= 24^\circ 5'
\end{aligned}
$$

Non è necessario cercare il nuovo β.

Si ritiene quindi il φ trovato come definitivo e si calcola V.

$$
\begin{aligned}
lg\ f_1 &= 1{,}0874 \\
lg\ X &= 3{,}4771 \\
colg\ sen\ 2\ \varphi &= 0{,}1278 \\
lg\ V^2 &= 4{,}6923 \\
lg\ V &= 2{,}34615 \\
V &= 221{,}9
\end{aligned}
$$

CAPITOLO XII

VARIAZIONI DEI PARAMETRI DELLA TRAIETTORIA

1 – Generalità.

I parametri della traiettoria sono tre: V, φ, C'.

Variando tutti o parte di essi e divenendo:

$$V + \Delta V; \qquad \varphi + \Delta \varphi; \qquad C' + \Delta C'$$

varia la traiettoria, quindi variano tutti gli elementi che ad essa si riferiscono sia per il punto di caduta che per un punto qualunque.

Ci prefiggiamo appunto in questo capitolo di determinare le variazioni degli elementi della traiettoria in funzione delle variazioni ΔV; $\Delta \varphi$; $\Delta C'$ e per fare ciò considereremo le differenze Δ come differenziali.

2 – Formula generale per la variazione delle coordinate di un punto.

L'equazione che lega i tre parametri alle coordinate del punto è la seguente:

$$y = x \, tg \, \varphi - \frac{C' x}{2 \cos^2 \varphi} \left\{ \frac{A(u) - A(V)}{D(u) - D(V)} - J(V) \right\}$$

od anche, impiegando le formule in funzione dell'ascissa,

$$tg \, \varphi - tg \, \varepsilon = \frac{C'}{2 \cos^2 \varphi} \, \frac{\bar{A}(D_o + x') - \bar{A}(D_o) - x' \bar{A}'(D_o)}{x'}$$

che si può scrivere

$$\bar{A}(D_o + x') - \bar{A}(D_o) - x' \bar{A}'(D_o) - \frac{2 \cos^2 \varphi}{C'} (tg \, \varphi - tg \, \varepsilon) \, x' = 0$$

e ponendo

$$\frac{2 \cos^2 \varphi}{C'} (tg \, \varphi - tg \, \varepsilon) = f = \frac{\Phi}{C'}$$

si ha:

$$\bar{A}(D_o + x') - \bar{A}(D_o) - x' \bar{A}'(D_o) - x' \frac{\Phi}{C'} = 0$$

Il 1° membro di questa equazione è funzione di x' e quindi di C', di D_o e quindi di V e di Φ e quindi di φ.

Noi partiremo da questa equazione per determinare la formula delle variazioni.

Differenziamo tale equazione rispetto alle tre variabili: D_o, x' e $\frac{\Phi}{C'}$

$$\left\{ \bar{A}'(D_o + x') - \bar{A}'(D_o) - \frac{\Phi}{C'} \right\} dx' + \left\{ \bar{A}'(D_o + x') - \bar{A}'(D_o) - \right.$$

$$\left. - x' \bar{A}''(D_o) \right\} d D_o - x' d \frac{\Phi}{C'} = 0$$

ma abbiamo trovato che

$$\bar{A}'(D_o + x') - \bar{A}'(D_o) = \bar{J}(D_o + x') - \bar{J}(D_o)$$

d'altra parte:

$$tg\,\theta = tg\,\varphi - \frac{C'}{2\cos^2\varphi} \left\{ \bar{J}(D_o + x') - \bar{J}(D_o) \right\}$$

quindi:

$$\left\{ \bar{J}(D_o + x') - \bar{J}(D_o) \right\} = \frac{2\cos^2\varphi}{C'} (tg\,\varphi - tg\,\theta)$$

ancora:

$$\bar{A}''(D_o) = \bar{J}'(D_o) = \frac{2g}{V^2}$$

quindi sostituendo si ha:

$$\left\{ \frac{2\cos^2\varphi}{C'} (tg\,\varphi - tg\,\theta) - \frac{\Phi}{C'} \right\} dx' + \left\{ \frac{2\cos^2\varphi}{C'} (tg\,\varphi - tg\,\theta) - \right.$$

$$\left. - x' \frac{2g}{V^2} \right\} d D_o - x' d \frac{\Phi}{C'} = 0$$

ma:

$$\frac{\Phi}{C'} = \frac{2\cos^2\varphi}{C'} (tg\,\varphi - tg\,\varepsilon)$$

quindi

$$\frac{2\cos^2\varphi}{C'} (tg\,\varphi - tg\,\theta - tg\,\varphi + tg\,\varepsilon)\, dx' + \left\{ \frac{2\cos^2\varphi}{C'} (tg\,\varphi - tg\,\theta) - \right.$$

$$\left. - x' \frac{2g}{V^2} \right\} d D_o - x' d \frac{\Phi}{C'} = 0$$

$$\frac{2\cos^2\varphi}{C'} (tg\,\varepsilon - tg\,\theta)\, dx' + \frac{2\cos^2\varphi}{C'} \left(tg\,\varphi - tg\,\theta - \frac{xg}{V^2 \cos^2\varphi} \right) d D_o - x' d \frac{\Phi}{C'} = 0$$

Ora $x' = \frac{x}{C'}$ e facendo il differenziale logaritmico ($lg\,x' = lg\,x - lg\,C'$)

$$\frac{dx'}{x'} = \frac{dx}{x} - \frac{dC'}{C'}$$

quindi

$$dx' = \frac{x}{C'} \left(\frac{dx}{x} - \frac{dC'}{C'} \right)$$

Analogamente

$$d\,\frac{\Phi}{C'} = \frac{\Phi}{C'}\left(\frac{d\,\Phi}{\Phi} - \frac{d\,C'}{C'}\right) = \frac{2\cos^2\varphi}{C'}\,(tg\,\varphi - tg\,\varepsilon)\left(\frac{d\,\Phi}{\Phi} - \frac{d\,C'}{C'}\right)$$

$$d\,D_0 = -\,\frac{V\,d\,V}{F\,(V)} = -\,\frac{V^2}{F\,(V)}\,\frac{d\,V}{V} = -\,\frac{1}{K\,(V)}\,\frac{d\,V}{V}$$

sostituendo:

$$\frac{2\cos^2\varphi}{C'}\,(tg\,\varepsilon - tg\,\theta)\,\frac{x}{C'}\left(\frac{dx}{x} - \frac{d\,C'}{C'}\right) - \frac{2\cos^2\varphi}{C'}\left(tg\,\varphi - tg\,\theta - \right.$$

$$\left. - \frac{gx}{V^2\cos^2\varphi}\right)\frac{1}{K\,(V)}\,\frac{d\,V}{V} - x'\,\frac{2\cos^2\varphi}{C'}\,(tg\,\varphi - tg\,\varepsilon)\left(\frac{d\,\Phi}{\Phi} - \frac{d\,C'}{C'}\right) = 0$$

dividendo tutto per $\frac{2\cos^2\varphi}{C'}\,(tg\,\varepsilon - tg\,\theta)\,x'$ si ha:

$$\frac{dx}{x} - \frac{d\,C'}{C'} - \frac{1}{tg\,\varepsilon - tg\,\theta}\left(tg\,\varphi - tg\,\theta - \frac{gx}{V^2\cos^2\varphi}\right)\frac{1}{x'\,K\,(V)}\,\frac{d\,V}{V} -$$

$$- \frac{tg\,\varphi - tg\,\varepsilon}{tg\,\varepsilon - tg\,\theta}\left(\frac{d\,\Phi}{\Phi} - \frac{d\,C'}{C}\right) = 0$$

Raggruppando i termini si ha:

$$\frac{dx}{x} = \frac{tg\,\varphi - tg\,\varepsilon}{tg\,\varepsilon - tg\,\theta}\,\frac{d\,\Phi}{\Phi} + \frac{d\,C'}{C'}\left(1 - \frac{tg\,\varphi - tg\,\varepsilon}{tg\,\varepsilon - tg\,\theta}\right) +$$

$$+ \frac{1}{tg\,\varepsilon - tg\,\theta}\left(tg\,\varphi - tg\,\theta - \frac{gx}{V^2\cos^2\varphi}\right)\frac{1}{x'\,K\,(V)}\,\frac{d\,V}{V}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{tg\,\varphi - tg\,\varepsilon}{tg\,\varepsilon - tg\,\theta}\,\frac{d\,\Phi}{\Phi} + \frac{d\,C'}{C'}\left(1 - \frac{tg\,\varphi - tg\,\varepsilon)}{tg\,\varepsilon - tg\,\theta)}\right) +$$

$$+ \frac{1}{tg\,\varepsilon - tg\,\theta}\left(tg\,\varphi - tg\,\varepsilon + tg\,\varepsilon - tg\,\theta - \frac{gx}{V^2\cos^2\varphi}\right)\frac{1}{x'\,K\,(V)}\,\frac{d\,V}{V}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{tg\,\varphi - tg\,\varepsilon}{tg\,\varepsilon - tg\,\theta}\,\frac{d\,\Phi}{\Phi} + \frac{d\,C'}{C'}\left(1 - \frac{tg\,\varphi - tg\,\varepsilon}{tg\,\varepsilon - tg\,\theta}\right) +$$

$$+ \frac{tg\,\varphi - tg\,\varepsilon}{tg\,\varepsilon - tg\,\theta}\left(1 + \frac{tg\,\varepsilon - tg\,\theta}{tg\,\varphi - tg\,\varepsilon} - \frac{gx}{V^2\cos^2\varphi\,(tg\,\varphi - tg\,\varepsilon)}\right)\frac{1}{x'\,K\,(V)}\,\frac{d\,V}{V}$$

ponendo:

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{tg\,\varphi - tg\,\varepsilon}{tg\,\varepsilon - tg\,\theta} = \frac{1}{f_2} = f_\varphi \\
&1 - \frac{tg\,\varphi - tg\,\varepsilon}{tg\,\varepsilon - tg\,\theta} = 1 - \frac{1}{f_2} = f_{C'} \\
&\frac{tg\,\varphi - tg\,\varepsilon}{tg\,\varepsilon - tg\,\theta}\,\frac{1}{x'\,K\,(V)}\left(1 + \frac{tg\,\varepsilon - tg\,\theta}{tg\,\varphi - tg\,\varepsilon} - \frac{gx}{V^2\cos^2\varphi\,(tg\,\varphi - tg\,\varepsilon)}\right) = \\
&\quad = \frac{1}{f_0\,f_2\,K\,(V)}\left(1 + f_2 - \frac{2\,g}{f_1}\right) = f_v
\end{aligned}\right. \qquad [1]$$

si ottiene la formula generale delle variazioni:

$$\frac{\Delta x}{x} = f_\varphi \frac{\Delta \Phi}{\Phi} + f_{C'} \frac{\Delta C'}{C'} + f_V \frac{\Delta V}{V}$$

f_φ; $f_{C'}$; f_V sono fattori di tiro ed f_V è dato da una apposita tabella mentre gli altri due sono funzione di f_2.

Nel caso di $n = 2$ (resistenza quadratica) $f_V = \frac{2}{f_2}$, infatti in tal caso:

$$z = \lambda x'$$

ma $\lambda = K(V)$; $x' = f_0$ quindi:

$$f_0 = \frac{z}{K(V)}$$

Inoltre si è visto che in generale dalla

$$g\,G_2 = f_1 \frac{1 + f_2}{2}$$

si ha:

$$1 + f_2 = \frac{2\,g\,G_2}{f_1} = \frac{2\,G_2}{G_1}$$

quindi sostituendo nella formula della f_V si ha:

$$f_V = \frac{K(V)}{z f_2 K(V)} \left(\frac{2\,G_2}{G_1} - \frac{2\,g}{g\,G_1} \right) = \frac{1}{z f_2} \frac{2\,(G_2 - 1)}{G_1}$$

ma

$$G_2 = \frac{e^{2z} - 1}{2\,z}$$

quindi:

$$G_2 - 1 = \frac{e^{2z} - 1 - 2\,z}{2\,z}$$

$$G_1 = \frac{e^{2z} - 1 - 2\,z}{2\,z^2}$$

quindi

$$f_V = \frac{2}{z f_2} \frac{\dfrac{e^{2z} - 1 - 2\,z}{2\,z}}{\dfrac{e^{2z} - 1 - 2\,z}{2\,z^2}} = \frac{2\,z}{z f_2} = \frac{2}{f_2}$$

3 – Espressione del termine $\frac{\Delta \Phi}{\Phi}$.

Abbiamo posto

$$\Phi = 2 \cos^2 \varphi \, (tg\,\varphi - tg\,\varepsilon)$$

differenziando logaritmicamente si ha:

$$\frac{d\,\Phi}{\Phi} = 2 \frac{d \cos \varphi}{\cos \varphi} + \frac{d\,(tg\,\varphi - tg\,\varepsilon)}{tg\,\varphi - tg\,\varepsilon} = -2\,tg\,\varphi\,d\,\varphi + \frac{d\,tg\,\varphi}{tg\,\varphi - tg\,\varepsilon} - \frac{d\,tg\,\varepsilon}{tg\,\varphi - tg\,\varepsilon}$$

e ricordando che $d\,tg\,\varphi = (1 + tg^2\varphi)\,d\,\varphi$ si ha:

$$\frac{d\,\Phi}{\Phi} = -2\,tg\,\varphi\,d\,\varphi + \frac{1 + tg^2\varphi}{tg\,\varphi - tg\,\varepsilon}\,d\,\varphi - \frac{d\,tg\,\varepsilon}{tg\,\varphi - tg\,\varepsilon} =$$

$$= \left(\frac{1 + tg^2\varphi}{tg\,\varphi - tg\,\varepsilon} - 2\,tg\,\varphi\right) d\,\varphi - \frac{d\,tg\,\varepsilon}{tg\,\varphi - tg\,\varepsilon}$$

ponendo il coefficiente di $d\,\varphi = A_\varepsilon$ si avrà

$$A_\varepsilon = \frac{1 + tg^2\varphi}{tg\,\varphi - tg\,\varepsilon} - 2\,tg\,\varphi = \frac{1 + tg^2\varphi - 2\,tg^2\varphi + 2\,tg\,\varphi\,tg\,\varepsilon}{tg\,\varphi - tg\,\varepsilon} = \frac{1 - tg^2\varphi + 2\,tg\,\varphi\,tg\,\varepsilon}{tg\,\varphi - tg\,\varepsilon} =$$

$$= \frac{1 - \dfrac{\text{sen}^2\varphi}{\cos^2\varphi} + \dfrac{2\,\text{sen}\,\varphi\,\text{sen}\,\varepsilon}{\cos\varphi\cos\varepsilon}}{\dfrac{\text{sen}\,(\varphi - \varepsilon)}{\cos\varphi\cos\varepsilon}} = \frac{(\cos^2\varphi - \text{sen}^2\varphi)\cos\varepsilon + 2\,\text{sen}\,\varphi\,\text{sen}\,\varepsilon\cos\varphi}{\cos\varphi\,\text{sen}\,(\varphi - \varepsilon)} =$$

$$= \frac{\cos 2\varphi\cos\varepsilon + \text{sen}\,2\varphi\,\text{sen}\,\varepsilon}{\text{sen}\,(\varphi - \varepsilon)\cos\varphi} = \frac{2\cos(2\varphi - \varepsilon)}{2\,\text{sen}\,(\varphi - \varepsilon)\cos\varphi} = \frac{2\cos(2\varphi - \varepsilon)}{\text{sen}\,(2\varphi - \varepsilon) - \text{sen}\,\varepsilon} \qquad [2]$$

quindi l'equazione delle variazioni diventa, sostituendo agli infinitesimi le differenze finite:

$$\frac{\Delta x}{x} = f_\varphi\left(A_\varepsilon\,\Delta\,\varphi - \frac{\Delta\,tg\,\varepsilon}{tg\,\varphi - tg\,\varepsilon}\right) + f_{C'}\,\frac{\Delta\,C'}{C'} + f_V\,\frac{\Delta\,V}{V}$$

da cui:

$$\frac{\Delta x}{x} + f_\varphi\,\frac{\Delta\,tg\,\varepsilon}{tg\,\varphi - tg\,\varepsilon} = f_\varphi\,A_\varepsilon\,\Delta_\varphi + f_{C'}\,\frac{\Delta\,C'}{C'} + f_V\,\frac{\Delta\,V}{V}$$

Osserviamo che $tg\,\varepsilon = \dfrac{y}{x}$ quindi:

$$d\,tg\,\varepsilon = \frac{y}{x}\left(\frac{dy}{y} - \frac{dx}{x}\right)$$

e sostituendo

$$\frac{\Delta x}{x} + f_\varphi\,\frac{\dfrac{y}{x}\left(\dfrac{\Delta y}{y} - \dfrac{\Delta x}{x}\right)}{tg\,\varphi - tg\,\varepsilon} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{tg\,\varphi - tg\,\varepsilon}{tg\,\varepsilon - tg\,\theta}\;\frac{\dfrac{\Delta y}{x} - \dfrac{y}{x}\,\dfrac{\Delta x}{x}}{tg\,\varphi - tg\,\varepsilon} =$$

$$= \frac{\Delta x}{x} + \frac{\dfrac{1}{x}\left(\Delta y - y\,\dfrac{\Delta x}{x}\right)}{tg\,\varepsilon - tg\,\theta} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y - y\,\dfrac{\Delta x}{x}}{y - x\,tg\,\theta} =$$

$$= \frac{y\,\Delta x - x\,\Delta x\,tg\,\theta + x\,\Delta y - x\,y\,\dfrac{\Delta x}{x}}{x\,(y - x\,tg\,\theta)} = \frac{x\,(\Delta y - \Delta x\,tg\,\theta)}{x\,(y - x\,tg\,\theta)}$$

per cui la formula delle variazioni diverrà:

$$\frac{\Delta y - \Delta x\,tg\,\theta}{y - x\,tg\,\theta} = f_\varphi\,A_\varepsilon\,\Delta\,\varphi + f_{C'}\,\frac{\Delta C'}{C'} + f_V\,\frac{\Delta\,V}{V} \qquad [3]$$

Con questa formula si possono risolvere due sorta di problemi, o sono date le variazioni dei parametri e si tratta di determinare lo spostamento del punto ed in tale caso deve essere data un'altra condizione e cioè l'equazione della linea

sulla quale si vuole che si sposti il punto, oppure è dato lo spostamento del punto e si ricerca la variazione corrispondente di uno dei parametri date quelle degli altri.

L'equazione della linea sulla quale deve spostarsi il punto, può essere:

$$y = f(x)$$

da cui

$$\Delta y = f'(x)\,\Delta x$$

con la quale si elimina Δy dalla formula delle variazioni.

Casi particolari importanti dello spostamento del punto sono i seguenti:

$$\varepsilon = \text{cost}; \quad y = \text{cost}; \quad x = \text{cost}$$

Nel primo caso basterà porre

$$y = x\, tg\, \varepsilon; \quad \Delta y = \Delta x\, tg\, \varepsilon$$

quindi

$$\frac{\Delta y - \Delta x\, tg\, \theta}{y - x\, tg\, \theta} = \frac{\Delta x\,(tg\, \varepsilon - tg\, \theta)}{x\,(tg\, \varepsilon - tg\, \theta)} = \frac{\Delta x}{x}$$

Negli altri due casi si ottiene:

per $\Delta x = 0$:

$$\frac{\Delta y - \Delta x\, tg\, \theta}{x - y\, tg\, \theta} = \frac{\Delta y}{y - x\, tg\, \theta}$$

per $\Delta y = 0$:

$$\frac{\Delta y - \Delta x\, tg\, \theta}{y - x\, tg\, \theta} = \frac{-\Delta x\, tg\, \theta}{y - x\, tg\, \theta} = \frac{-x\, tg\, \theta}{y - x\, tg\, \theta}\;\frac{\Delta x}{x}$$

Per applicare la formula delle variazioni basta conoscere V, φ, x ed y e, se non è dato f_o, si calcola deducendolo da

$$f_1 = \frac{2\, V^2 \cos^2 \varphi}{x} \cdot (tg\, \varphi - tg\, \varepsilon)$$

in cui tutto è noto e quindi ricavando gli altri fattori.

4 – Variazioni della gittata.

La formula generale delle variazioni

$$\frac{\Delta y - \Delta x\, tg\, \theta}{y - x\, tg\, \theta} = A_\varepsilon\, f_\varphi\, \Delta \varphi + f_{C'}\, \frac{\Delta C'}{C'} + f_V\, \frac{\Delta V}{V}$$

ove

$$A_\varepsilon = \frac{2 \cos (2\, \varphi - \varepsilon)}{\text{sen}\, (2\, \varphi - \varepsilon) - \text{sen}\, \varepsilon}$$

acquista particolare importanza quando anzichè considerare lo spostamento del punto d'arrivo nel piano lo si considera sull'orizzonte del pezzo. In tal caso si ha che:

$$tg\,\varepsilon = O; \qquad \Delta y = O$$

$$A_e = \frac{2 \cos 2\varphi}{\operatorname{sen} 2\varphi}$$

quindi sarà:

$$\frac{-\Delta X\, tg\,\theta}{-X\, tg\,\theta} = \frac{\Delta X}{X} = \frac{2\cos 2\varphi\, \Delta\varphi}{\operatorname{sen} 2\varphi} f_\varphi + f_{C'} \frac{\Delta C'}{C'} + f_V \frac{\Delta V}{V} \qquad [4]$$

e questa è la formula basilare di tutto il calcolo delle variazioni sull'orizzonte ed è impiegata per calcolare i coefficienti di correzione delle Tavole di Tiro.

Considerando costante uno o l'altro dei parametri della traiettoria si hanno le variazioni di X relative a variazioni di φ_1, di V e di C'.

5 - Problema I.

Trovare la variazione in gittata ΔX dovuta ad una variazione di C'. In questo caso poichè V e φ sono rimasti invariati:

$$\frac{\Delta X}{X} = f_{C'} \frac{\Delta C'}{C'} = \left(1 - \frac{1}{f_2}\right) \frac{\Delta C'}{C'}$$

Il coefficiente $f_{C'} = 1 - \frac{tg\,\varphi}{tg\,\omega}$ è sempre minore di 1 quindi la variazione relativa $\frac{\Delta X}{X}$ è sempre minore della variazione $\frac{\Delta C'}{C'}$ e ne è tanto più piccola quanto più piccola è la differenza fra ω e φ.

Nei tiri con grossi proietti e piccole V la variazione di gittata dovuta a variazioni $\Delta C'$ è sempre assai piccola.

Poichè come si è visto

$$C' = \frac{C}{\delta\, i\, \beta} = \frac{p}{1000\, a^2\, \delta\, i\, \beta}$$

la variazione di C' può essere dovuta ad una variazione di uno dei fattori che lo compongono, e quindi si può trovare il Δ corrispondente a $\Delta\beta$, a Δi, a $\Delta\delta$, ecc.

6 - Problema II.

Trovare l'errore ΔX dovuto ad un errore $\Delta\beta$ di β.

Sarà

$$\frac{\Delta C'}{C'} = -\frac{\Delta\beta}{\beta}$$

Quindi

$$\frac{\Delta X}{X} = -f_{C'} \frac{\Delta\beta}{\beta}$$

a) Applicazione.

Obice da 75/13 - Granata a pallette.
Dati: $V = 309$; $X = 4500$; $\varphi = 19^\circ 4'$; $C' = 1{,}656$

Determinare la variazione ΔX per una variazione di 5/100 del β cioè

$$\frac{\Delta \beta}{\beta} = 0{,}05$$

In tal caso

$$\frac{\Delta X}{X} = - f_{C'} \frac{\Delta \beta}{\beta} \qquad f_{C'} = 1 - \frac{1}{f_2}$$

$lg\, X \quad = 3{,}65321$
$\mathrm{colg}\, C' = \bar{1}{,}78094$
$lg\, f_0 \quad = 3{,}43415$
$f_0 \quad = 2717$

$\mathrm{colg}\, f_2 \quad = \bar{1}{,}8966$

$f_{C'} = 1 - \frac{1}{f_2} = 0{,}2119$

$lg\, f_{C'} \quad = \bar{1}{,}32613$
$lg\, X \quad = 3{,}65321$
$lg\, \frac{\Delta \beta}{\beta} = \bar{2}{,}69897$
$lg\, \Delta X = 1{,}68831$
$\Delta X \quad = 48{,}8$

7 - Problema III.

Trovare la variazione ΔX corrispondente ad una variazione ΔB della pressione dell'aria.

Sappiamo che la densità dell'aria è funzione della pressione e cioè

$$\delta = 0{,}3852 \frac{B - 0{,}377\, s\, F}{273 + \tau}$$

per cui derivando e supponendo di trascurare il vapore acqueo si avrà

$$\frac{\Delta \delta}{\delta} = \frac{\Delta B}{B}$$

e quindi

$$\frac{\Delta C'}{C'} = - \frac{\Delta B}{B}$$

risulterà perciò

$$\frac{\Delta X}{X} = - f_{C'} \frac{\Delta B}{B}$$

8 - Problema IV.

Trovare la variazione ΔX corrispondente ad una variazione $\Delta \tau$ della temperatura dell'aria.

Dalla formula della densità scritta precedentemente si ha:

$$\frac{\Delta \delta}{\delta} = - \frac{\Delta \tau}{273 + \tau}$$

quindi

$$\frac{\Delta X}{X} = f_{C'} \frac{\Delta \tau}{273 + \tau}$$

9 - Problema V.

Trovare la variazione di gittata che si ottiene passando da una località ad un'altra situata a diversa altitudine.

Se δ_h è la densità alla nuova altitudine e δ_o quella base sarà

$$\frac{\Delta\delta}{\delta} = \frac{\delta_h - \delta_o}{\delta_o}$$

per cui

$$\frac{\Delta X}{X} = - f_{C'} \frac{\Delta\delta}{\delta}$$

a) Applicazione.

Cannone da 149/35 - Granata a pallette.

Dati: $X = 6000$; $\varphi = 26^\circ 33'$; $C' = 2{,}970$; $V = 300$; $h = 1000$; $\delta_o = 0{,}927$; ($B = 675$; $\tau = 7{,}6$).

Determinare la variazione ΔX che si ottiene passando dalla densità data a $\delta_h = 0{,}870$; $h = 1600$ ($B = 620$; $\tau = 1^\circ$) e trovare la percentuale di variazione dovuta a ΔB e quella dovuta a $\Delta\tau$.

ΔX per $\Delta\delta = 0{,}055$ $\qquad \frac{\Delta\delta}{\delta} = \frac{0{,}055}{0{,}927} = + 0{,}0593$

$lg\, X = 3{,}77815$
colg $C' = \bar{1}{,}52724$
$lg\, f_c = 3{,}30539$
$f_c = 2020$

$lg\, f_{c'} = 0{,}0767$
$f_{c'} = 0{,}1619$

$lg\, f_{C'} = \bar{1}{,}20925$
$lg\, X = 3{,}77815$
$lg \frac{\Delta\delta}{\delta} = \bar{2}{,}77305$
$lg\, \Delta X = 1{,}76045$
$\Delta X = 57{,}6$

$$\Delta B = B_h - B_o \qquad \frac{\Delta\delta}{\delta} = - \frac{\Delta\tau}{273 + \tau}$$

$$\frac{\Delta B}{B} = - \frac{55}{675} = - 0{,}0815 \qquad \frac{\Delta\tau}{\tau} = \frac{66}{280{,}6} = 0{,}0235$$

$lg\, f_{C'} X = 2{,}98740$
$lg \frac{\Delta B}{B} = \bar{2}{,}91116$
$lg\, \Delta X_B = 1{,}89856$

$\Delta X_B = 79{,}2$
$\Delta X_\tau = - 22{,}8$
$\Delta X = 56{,}4$

$lg\, X f_{C'} = 2{,}98740$
$lg \frac{\Delta\tau}{273 + \tau} = 2{,}37107$
$lg\, \Delta X_\tau = 1{,}35847$

10 - Problema VI.

Trovare la variazione ΔX dovuta ad una variazione ΔV della velocità iniziale.
La formula della variazione sarà:

$$\frac{\Delta X}{X} = f_V \frac{\Delta V}{V}$$

Il coefficiente f_V è sempre inferiore a 2; raggiunge tale valore nel vuoto, ne l'aria è maggiore o minore di 1, quindi la variazione relativa della X è maggiore minore di quella della V, ne è maggiore per tiri con piccola V e piccolo valore di f

11 – Problema VII.

Trovare la variazione ΔX dovuta ad una variazione $\Delta \mu$ nel peso della caric
Tra la carica e la velocità iniziale si ha la seguente relazione empirica:

$$V = R\,\mu^{R_1}$$

da cui

$$\frac{\Delta V}{V} = R_1 \frac{\Delta \mu}{\mu}$$

per cui

$$\frac{\Delta X}{X} = R_1 f_V \frac{\Delta \mu}{\mu}$$

R_1 dipende dalla semidimensione minima del grano, però si può ritenere

$$R_1 = \frac{5}{8}$$

a) Applicazione.

Cannone da 149/35 – Granata inglese.
Dati: $X = 6500$; $V = 415$; $C' = 2{,}450$; $\mu = 1{,}900$
Trovare ΔX per una variazione nel peso della carica 0,085

$$\Delta X = X \frac{5}{8} f_V \frac{0{,}085}{1{,}900} = 6.500 \frac{5}{8} f_V \frac{1}{20}$$

12 – Problema VIII.

Trovare la variazione di gittata ΔX dovuta ad una variazione Δp nel pe del proietto.
Variando il peso del proietto varia il coefficiente balistico C' e precisamente

$$\frac{\Delta C'}{C'} = \frac{\Delta p}{p}$$

e varia pure la velocità iniziale secondo la formula empirica

$$V = R\,p^{-R''}$$

da cui

$$\frac{\Delta V}{V} = -R'' \frac{\Delta p}{p}$$

quindi la variazione di X consterà di due parti, una dovuta al $\Delta C'$ per Δp che vale

$$f_{C'} \frac{\Delta p}{p}$$

e una dovuta a ΔV per Δp che vale

$$- f_V R'' \frac{\Delta p}{p}$$

quindi in definitiva

$$\frac{\Delta X}{X} = f_{C'} \frac{\Delta p}{p} - R'' f_V \frac{\Delta p}{p} = (f_{C'} - R'' f_V) \frac{\Delta p}{p}$$

R'' dipende dalla semidimensione minima del grano.

Si può ritenere $R'' = 0{,}4$.

a) Applicazione.

Cannone da 149/35 - Granata inglese.

Dati: $V = 415$; $X = 7000$; $C' = 2{,}480$

Determinare il coefficiente di correzione C_p cioè la variazione ΔX per una variazione $\Delta p = 1$ kg.

$lg\, X$	$= 3{,}84510$	$R'' f_V$	$= 0{,}3688$
colg C'	$= \bar{1}{,}60555$	$f_{C'}$	$= 0{,}2766$
$lg\, f_o$	$= 3{,}45070$	$f_{C'} - R'' f_V$	$= -0{,}0922$
f_o	$= 2823$	$lg\,(f_{C'} - R'' f_V)$	$= \bar{2}{,}96473$
$lg\, f_2$	$= 0{,}1406$	$lg\, X$	$= 3{,}84510$
$lg\, f_V$	$= \bar{1}{,}9647$	colg p	$= \bar{2}{,}38722$
$f_{C'}$	$= 0{,}2766$	$lg\, \Delta X = lg\, C_p$	$= 1{,}19705$
f_V	$= 0{,}9220$	C_p	$= -15{,}7$

13 - Problema IX.

Trovare di quanto deve variare la velocità iniziale per compensare una variazione del coefficiente balistico ridotto.

In questo caso

$$\Delta X = 0; \qquad \Delta \operatorname{sen} 2\varphi = 0$$

quindi si avrà

$$f_V \frac{\Delta V}{V} + f_{C'} \frac{\Delta C'}{C'} = 0$$

per cui

$$f_V \frac{\Delta V}{V} = - f_{C'} \frac{\Delta C'}{C'} \qquad \Delta V = - \frac{V f_{C'}}{f_V} \frac{\Delta C'}{C'}$$

quindi la variazione di V è di segno contrario di quello di $\Delta C'$.

14 - Problema X.

Trovare la variazione ΔX corrispondente ad una variazione dell'angolo di proiezione $\Delta \varphi$.

In questo caso si avrà:

$$\frac{\Delta X}{X} = f_\varphi \frac{\Delta \operatorname{sen} 2\varphi}{\operatorname{sen} 2\varphi} = 2 f_\varphi \frac{\Delta \varphi}{tg\, 2\varphi}$$

nella quale $\Delta \varphi$ deve essere espresso in radianti.

Volendo invece esprimerlo in gradi basterà moltiplicarlo per 0,01745 cioè sarà:

$$\Delta \varphi = 0{,}01745\, \Delta \varphi^0$$

quindi

$$\frac{\Delta X}{X} = 0{,}0349\, f_\varphi \frac{\Delta \varphi^0}{tg\, 2\varphi}$$

Il coefficiente:

$$f_\varphi = \frac{tg\, \varphi}{tg\, \omega}$$

è sempre < 1 ma mai è eccessivamente piccolo mentre $\frac{1}{tg\, 2\varphi}$ è grande per piccoli valori di φ e diminuisce per valori di φ che si avvicinano a 45°, per tale valore è zero. Quindi le variazioni di X per $\Delta \varphi$ sono tanto più sentite quanto più l'angolo di proiezione è piccolo; appunto per questo la misura di ρ viene eseguita per piccoli valori di φ ed il valore trovato si ritiene costante.

Quando $\varphi > 45°$, ΔX è di segno contrario a quello di $\Delta \varphi$.

a) Applicazione.

Cannone da 149/35.

Dati: $V = 304$; $X = 4000$; $C' = 2{,}490$; $\varphi = 15°5'$.

Determinare ΔX per $\Delta \varphi = 0°30'$

$$\Delta X = X \cdot 0{,}0349 \frac{1}{f_2} \frac{\Delta \varphi^0}{tg\, 2\varphi}$$

$lg\, X = 3{,}60206$	$f_0 = 1606$	$lg\, X = 3{,}6021$
$\operatorname{colg} C' = \bar{1}{,}60380$	$lg\, f_2 = 0{,}0629$	$lg\, 0{,}0349 = \bar{2}{,}5428$
$lg\, f_0 = 3{,}20586$		$\operatorname{colg} f_2 = \bar{1}{,}9371$
		$lg\, \Delta \varphi = \bar{1}{,}6990$
		$\operatorname{colg} tg\, 2\varphi = 0.2356$
		$lg\, \Delta X = 2{,}0166$
		$\Delta X = 103{,}9$

Nelle applicazioni fatte non si è mai tenuto conto della variazione di β dovuta ad una variazione di X, di φ o di C per cui si sarebbe dovuto calcolare il valore

$$\Delta \beta = \frac{\delta \beta}{\delta \varphi} \Delta \varphi + \frac{\delta \beta}{\delta X} \Delta X + \frac{\delta \beta}{\delta C} \Delta C$$

Ora se la variazione di β dovuta ad una variazione di X e di C è trascurabile, non altrettanto si può dire quando varia φ, quindi per essere esatti nel caso dell'ultimo problema si dovrebbe calcolare

$$\frac{\Delta \beta}{\beta} = \frac{1}{\beta} \frac{\delta \beta}{\delta \varphi} \Delta \varphi$$

e quindi

$$\frac{\Delta X}{X} = f_{\varphi} \frac{2 \Delta \varphi}{tg\, 2 \varphi} - f_{C'} \frac{1}{\beta} \frac{\delta \beta}{\delta \varphi} \Delta \varphi$$

b) Applicazione.

Spesso avviene di dover calcolare il coefficiente di forma di un proietto servendosi di risultati sperimentali.

In questo caso, come si vedrà in seguito si calcola la traiettoria per archi successivi avendo calcolato un primo valore di i risolvendo il problema.

Dati V, φ, X, C, δ_0 e β dedotto dalla tav. VIII determinare i.

V, φ ed X sono sperimentali quindi calcolando la traiettoria per archi col valore di i ricavato si dovrebbe trovare il valore di X sperimentale. Ciò difficilmente si verifica, ma si troverà un certo ΔX; il valore di i esatto sarà $i + \Delta i$ ove Δi viene calcolato con la relazione:

$$\frac{\Delta X}{X} = - f_{C'} \frac{\Delta i}{i}$$

da cui

$$\Delta i = - \frac{\Delta X}{X} \frac{i}{f_{C'}}$$

Esempio.

Cannone da 75/45.

$V = 800$; $\delta = 0{,}978$; $C = 1{,}185$; $f_0 = 3104$; $X = 7000$; $\varphi = 6°58'$; $\beta = 0{,}892$.

Calcolato i, si è trovato $i = 0{,}602$, ripetuto il calcolo per archi si è avuto $X = 7080$; determinare i esatto

$$\Delta i = - \frac{80}{7080} \frac{0{,}602}{f_{C'}}$$

15 - Variazioni dell'inclinazione.

La seconda formula del tiro:

$$tg\, \theta = tg\, \varphi - \frac{C'}{2 \cos^2 \varphi} [J(u) - J(V)]$$

può essere scritta:

$$\bar{J}(D_0 + x') - \bar{J}(D_0) - \frac{2 \cos^2 \varphi}{C'} (tg\, \varphi - tg\, \theta) = 0$$

differenziando rispetto ad x', D_0 e

$$\frac{2 \cos^2 \varphi}{C'} (tg\, \varphi - tg\, \theta)$$

poichè

$$\bar{J}'(D_0 + x') = \frac{2g}{u^2} = \frac{2g\cos^2\varphi}{v^2\cos^2\theta}$$

$$\bar{J}'(D_0) = \frac{2g}{V^2}$$

avremo

$$\frac{2g\cos^2\varphi}{v^2\cos^2\theta}\,dx' + \left(\frac{2g\cos^2\varphi}{v^2\cos^2\theta} - \frac{2g}{V^2}\right) d\,D_0 - d\left[\frac{2\cos^2\varphi}{C'}\,(tg\,\varphi - tg\,\theta)\right] = 0$$

ora

$$dx' = \frac{x}{C'}\left(\frac{dx}{x} - \frac{d\,C'}{C'}\right)$$

$$d\,D_0 = -\frac{1}{K(V)}\,\frac{d\,V}{V}$$

$$d\left[\frac{2\cos^2\varphi}{C'}\,(tg\,\varphi - tg\,\theta)\right] =$$

$$= \frac{2\cos^2\varphi}{C'}\,(tg\,\varphi - tg\,\theta)\left[\frac{2\,d\cos\varphi}{\cos\varphi} - \frac{d\,C'}{C'} + \frac{d\,tg\,\varphi - d\,tg\,\theta}{tg\,\varphi - tg\,\theta}\right] =$$

$$= \frac{2\cos^2\varphi}{C'}\,(tg\,\varphi - tg\,\theta)\left[\frac{-\operatorname{sen}\varphi}{\cos\varphi}\,2\,d\,\varphi - \frac{d\,C'}{C'}\right] +$$

$$+ \frac{2\cos^2\varphi}{C'}\,(d\,tg\,\varphi - d\,tg\,\theta) =$$

$$= \frac{2\cos^2\varphi}{C'}\,(tg\,\varphi - tg\,\theta)\left[\frac{-\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\,2\,d\,\varphi}{\cos^2\varphi} - \frac{d\,C'}{C'}\right] + \cdots\cdots$$

$$= -\frac{2\cos^2\varphi}{C'}\,(tg\,\varphi - tg\,\theta)\left|\operatorname{sen} 2\,\varphi\,d\,tg\,\varphi + \frac{d\,C'}{C'}\right| +$$

$$+ \frac{2\cos^2\varphi}{C'}\,(d\,tg\,\varphi - d\,tg\,\theta)$$

quindi sostituendo nella equazione primitiva si avrà:

$$\frac{2g\cos^2\varphi}{v^2\cos^2\theta}\,x'\left(\frac{dx}{x} - \frac{d\,C'}{C'}\right) - \left(\frac{2g\cos^2\varphi}{v^2\cos^2\theta} - \frac{2g}{V^2}\right)\frac{1}{K(V)}\,\frac{d\,V}{V} +$$

$$+ \frac{2\cos^2\varphi}{C'}\,(tg\,\varphi - tg\,\theta)\left|\operatorname{sen} 2\,\varphi\,d\,tg\,\varphi + \frac{d\,C'}{C'}\right| -$$

$$- \frac{2\cos^2\varphi}{C'}\,(d\,tg\,\varphi - d\,tg\,\theta) = 0$$

ricavando $d\,tg\,\theta$

$$d\,tg\,\theta = -\frac{g\,x}{v^2\cos^2\theta}\,\frac{dx}{x} + \left(\frac{g\,x}{v^2\cos^2\theta} - tg\,\varphi + tg\,\theta\right)\frac{d\,C'}{C'} +$$

$$+ \left(\frac{g\,x}{v^2\cos^2\theta} - \frac{g\,x}{V^2\cos^2\varphi}\right)\frac{C'}{x\,K(V)}\,\frac{d\,V}{V} - \left|\operatorname{sen} 2\,\varphi\,(tg\,\varphi - tg\,\theta) - 1\right| d\,tg\,\varphi$$

dividendo tutto per

$$tg\,\varepsilon - tg\,\theta$$

e sostituendo agli infinitesimi le differenze finite si ha

$$\frac{\Delta\, tg\,\theta}{tg\,\varepsilon - tg\,\theta} = - \frac{gx}{v^2 \cos^2\theta} \frac{\Delta x}{x\,(tg\,\varepsilon - tg\,\theta)} +$$

$$+ \left(\frac{gx}{v^2 \cos^2\theta\,(tg\,\varepsilon - tg\,\theta)} - \frac{tg\,\varphi - tg\,\theta}{tg\,\varepsilon - tg\,\theta} \right) \frac{\Delta C'}{C'} +$$

$$+ \left(\frac{gx}{v^2 \cos^2\theta\,(tg\,\varepsilon - tg\,\theta)} - \frac{gx}{V^2 \cos^2\varphi\,(tg\,\varepsilon - tg\,\theta)} \right) \frac{C'}{x\,K\,(V)} \frac{\Delta V}{V} -$$

$$- \left(\mathrm{sen}\, 2\,\varphi\, \frac{tg\,\varphi - tg\,\theta}{tg\,\varepsilon - tg\,\theta} - \frac{1}{tg\,\varepsilon - tg\,\theta} \right) (1 + tg^2\,\varphi)\,\Delta\varphi =$$

$$= \cdots\cdots - \left[\frac{\mathrm{sen}\,2\,\varphi}{\cos^2\varphi}\, tg\,\varphi - \frac{\mathrm{sen}\,2\,\varphi}{\cos^2\varphi}\, tg\,\theta - \frac{1}{\cos^2\varphi} \right] \frac{\Delta\varphi}{tg\,\varepsilon - tg\,\theta} =$$

$$= \cdots\cdots - \left[\frac{2\,\mathrm{sen}\,\varphi \cos\varphi}{\cos^2\varphi} \frac{\mathrm{sen}\,\varphi}{\cos\varphi} - \frac{2\,\mathrm{sen}\,\varphi \cos\varphi}{\cos^2\varphi} \frac{\mathrm{sen}\,\theta}{\cos\theta} - \frac{1}{\cos^2\varphi} \right] \frac{\Delta\varphi}{tg\,\varepsilon - tg\,\theta} =$$

$$= \cdots\cdots - [2\,tg^2\,\varphi - 2\,tg\,\varphi\, tg\,\theta - (1 + tg^2\,\varphi)]\, \frac{\Delta\varphi}{tg\,\varepsilon - tg\,\theta}$$

quindi

$$\frac{\Delta\, tg\,\theta}{tg\,\varepsilon - tg\,\theta} = \frac{1 - tg^2\,\varphi + 2\,tg\,\varphi\, tg\,\theta}{tg\,\varepsilon - tg\,\theta}\, \Delta\varphi - \frac{gx}{v^2 \cos^2\theta\,(tg\,\varepsilon - tg\,\theta)} \frac{\Delta x}{x} +$$

$$+ \left[\frac{gx}{v^2 \cos^2\theta\,(tg\,\varepsilon - tg\,\theta)} - \frac{tg\,\varphi - tg\,\theta}{tg\,\varepsilon - tg\,\theta} \right] \frac{\Delta C'}{C'} +$$

$$- \left[\frac{gx}{v^2 \cos^2\theta\,(tg\,\varepsilon - tg\,\theta)} - \frac{gx}{V^2 \cos^2\varphi\,(tg\,\varepsilon - tg\,\theta)} \right] \frac{C'}{K\,(V)\,x} \frac{\Delta V}{V}$$

Ponendo

$$f_{\theta,\varphi} = \frac{tg\,\varphi - tg\,\theta}{tg\,\varepsilon - tg\,\theta} = 1 + \frac{1}{f_2} = F_2$$

perchè

$$\frac{tg\,\varphi - tg\,\theta}{tg\,\varepsilon - tg\,\theta} = \frac{tg\,\varphi - tg\,\varepsilon + tg\,\varepsilon - tg\,\theta}{tg\,\varepsilon - tg\,\theta} = \frac{1}{f_2} + 1$$

$$A_\theta = \frac{1 - tg^2\,\varphi + 2\,tg\,\varphi\, tg\,\theta}{tg\,\varphi - tg\,\theta} = \frac{\dfrac{\cos^2\varphi \cos\theta - \mathrm{sen}^2\,\varphi \cos\theta + 2\,\mathrm{sen}\,\varphi\, \mathrm{sen}\,\theta \cos\varphi}{\cos^2\varphi \cos\theta}}{\cos\varphi\, \dfrac{\mathrm{sen}\,(\varphi - \theta)}{\cos^2\varphi \cos\theta}} =$$

$$= \frac{\cos 2\,\varphi \cos\theta + \mathrm{sen}\,2\,\varphi\, \mathrm{sen}\,\theta}{\cos\varphi\, \mathrm{sen}\,(\varphi - \theta)} = \frac{\cos\,(2\,\varphi - \theta)}{\mathrm{sen}\,(\varphi - \theta) \cos\varphi}$$

Porremo ancora:

$$F_1 = \frac{gx}{V^2 \cos^2\varphi\,(tg\,\varepsilon - tg\,\theta)}$$

$$F_3 = \frac{gx}{v^2 \cos^2\theta\,(tg\,\varepsilon - tg\,\theta)}$$

quindi sarà

$$\frac{\Delta\, tg\,\theta}{tg\,\varepsilon - tg\,\theta} = A_\theta\, f_{\theta,\varphi}\, \Delta\varphi + f_{\theta,C'} \frac{\Delta C'}{C'} - f_{\theta\,x} \frac{\Delta x}{x} + f_{\theta,V} \frac{\Delta V}{V}$$

essendo

$$f_{\theta,\varphi} = F_2; \qquad f_{\theta,x} = F_3; \qquad F_{\theta,C'} = F_3 - F_2$$

$$F_{\theta,V} = (F_3 - F_1) \frac{1}{f_0\, K\,(V)} = (f_4^{\,2} - 1) \frac{F_1}{f_0\, K\,(V)}$$

Con le formule ora trovate si possono calcolare le variazioni delle inclinazioni in un punto della traiettoria, date le variazioni dei parametri e lo spostamento del punto.

Se il punto si sposta su una linea bisogna eliminare Δx per mezzo della equazione della linea e della formula trovata.

Così se il punto si sposta nella linea di sito, poichè abbiamo visto che

$$\frac{\Delta x}{x} = A_\varepsilon f_\varphi \Delta\varphi + f_{C'} \frac{\Delta C'}{C'} + f_V \frac{\Delta V}{V}$$

basterà sostituire a $\frac{\Delta x}{x}$ la sua espressione e perciò sarà

$$\frac{\Delta tg\,\theta}{tg\,\varepsilon - tg\,\theta} = A_\theta f_{\theta,\varphi} \Delta\varphi + f_{\theta,C'} \frac{\Delta C'}{C} -$$

$$- f_{\theta,x}\left(A_\varepsilon f_\varphi \Delta\varphi + f_{C'} \frac{\Delta C'}{C'} + f_V \frac{\Delta V}{V}\right) + f_{\theta,V} \frac{\Delta V}{V} =$$

$$= [A_\theta f_{\theta,\varphi} - A_\varepsilon f_\varphi f_{\theta,C'}] \Delta\varphi + (f_{\theta,C'} - f_{\theta,x} f_{C'}) \frac{\Delta C'}{C'} +$$

$$+ (f_{\theta,V} - f_{\theta,x} f_V) \frac{\Delta V}{V}$$

16 - Variazioni dell'angolo di caduta.

Se nella formula generale delle variazioni poniamo per ε = costante

$$\varepsilon = O \qquad \theta = -\omega \qquad x = X \qquad v = U$$

si ottiene la formula di variazione di ω, cioè notando che

$$A_\theta = \frac{1 - tg^2\varphi + 2\,tg\,\varphi\,tg\,\theta}{tg\,\varphi - tg\,\theta}$$

$$f_{\theta,\varphi} = \frac{tg\,\varphi - tg\,\theta}{tg\,\varepsilon - tg\,\theta}$$

sarà

$$A_\theta f_{\theta,\varphi} = \frac{1 - tg^2\varphi - 2\,tg\,\varphi\,tg\,\omega}{tg\,\omega}$$

$$f_\varphi A_\varepsilon f_{\theta,x} = \frac{tg\,\varphi}{tg\,\omega} \frac{2\cos 2\varphi}{\operatorname{sen} 2\varphi} F_3 = \frac{\cos^2\varphi - \operatorname{sen}^2\varphi}{\cos^2\varphi} \frac{1}{tg\,\omega} F_3 = \frac{1 - tg^2\varphi}{tg\,\omega} F_3$$

Inoltre

$$f_{\theta,x} f_{C'} - f_{\theta,C'} = F_3\left(1 - \frac{1}{f_2}\right) - (F_3 - F_2)$$

$$= F_3\left(1 - \frac{tg\,\varphi}{tg\,\omega}\right) - F_3 + F_2 =$$

$$= F_3 - F_3 \frac{tg\,\varphi}{tg\,\omega} - F_3 + F_2 =$$

$$= - F_3 \frac{tg\,\varphi}{tg\,\omega} + 1 + \frac{tg\,\varphi}{tg\,\omega}$$

perchè

$$F_2 = 1 + \frac{tg\,\varphi}{g\,\omega}$$

quindi

$$f_{\theta.x} f_{C'} - f_{\theta.C'} = 1 - \frac{tg\,\varphi}{tg\,\omega}(F_3 - 1)$$

poichè

$$f_V = \frac{1}{f_0 f_2 K(V)}\left(1 + f_2 - \frac{2g}{f_1}\right)$$

sarà

$$f_V = \frac{1}{f_0 K(V)}\left(\frac{1}{f_2} + 1 - \frac{2g}{f_1 f_2}\right) =$$

$$= \frac{1}{f_0 K(V)}(F_2 - F_1) \qquad \left(F_1 = \frac{2g}{f_1 f_2}\right)$$

quindi

$$f_{\theta.x} f_V - f_{\theta.V} = F_3 \frac{1}{f_0 K(V)}(F_2 - F_1) - (F_3 - F_1)\frac{1}{f_0 K(V)} =$$

$$= \frac{F_3}{f_0 K(V)} F_2 - \frac{F_3 F_1}{f_0 K(V)} - \frac{F_3}{f_0 K(V)} + \frac{F_1}{f_0 K(V)} =$$

$$= \left[F_3 \frac{tg\,\varphi}{tg\,\omega} - F_1 (F_3 - 1)\right] \frac{C'}{X K(V)}$$

per cui sostituendo si otterrà la formula generale delle variazioni

$$\frac{\Delta\, tg\,\omega}{tg\,\omega} = \left[\text{sen}\, 2\,\varphi + \frac{\cos 2\,\varphi}{tg\,\omega}\left(\frac{2\,g\,X}{U^2\,\text{sen}\, 2\,\omega} - 1\right)\right]\frac{\Delta\,\varphi}{\cos^2\varphi} +$$

$$+ \left[1 - \frac{tg\,\varphi}{tg\,\omega}\left(\frac{2\,g\,X}{U^2\,\text{sen}\, 2\,\omega} - 1\right)\right]\frac{\Delta\, C'}{C'} +$$

$$+ \frac{C'}{X K(V)}\,\frac{tg\,\varphi}{tg\,\omega}\left[\frac{2\,g\,X}{V^2\,\text{sen}\, 2\,\varphi} + \frac{2\,g\,X}{U^2\,\text{sen}\, 2\,\omega}\left(1 - \frac{2\,g\,X}{V^2\,\text{sen}\, 2\,\varphi}\right)\right]\frac{\Delta\, V}{V}$$

Applicazione.

Cannone da 149/35 – Granata inglese.
Dati: $V = 415$ $X = 7000$ $\varphi = 20°\,49'$ $\omega = 27°$ $U = 256$
Determinare la variazione di ω per $\Delta\,\varphi = 1°$.
Dalla formula

$$\frac{\Delta\, tg\,\omega}{tg\,\omega} = \left[\text{sen}\, 2\,\varphi + \frac{\cos 2\,\varphi}{tg\,\omega}\left(\frac{2\,g\,X}{U^2\,\text{sen}\, 2\,\omega} - 1\right)\right]\frac{\Delta\,\varphi}{\cos^2\varphi} +$$

$$+ \left[1 - \frac{tg\,\varphi}{tg\,\omega}\left(\frac{2\,g\,X}{U^2\,\text{sen}\, 2\,\omega} - 1\right)\right]\frac{\Delta\, C'}{C'} +$$

$$+ \frac{C'}{X K(V)}\,\frac{tg\,\varphi}{tg\,\omega}\left[\frac{2\,g\,X}{V^2\,\text{sen}\, 2\,\varphi} + \frac{2\,g\,X}{U^2\,\text{sen}\, 2\,\omega}\left(1 - \frac{2\,g\,X}{V^2\,\text{sen}\, 2\,\varphi}\right)\right]\frac{\Delta\, V}{V}$$

essendo variabile la sola φ sarà

$$\frac{\Delta\, tg\, \omega}{tg\, \omega} = \left[\text{sen } 2\varphi + \frac{\cos 2\varphi}{tg\, \omega}\left(\frac{2gX}{U^2 \text{ sen } 2\omega} - 1\right)\right] \frac{\Delta \varphi}{\cos^2 \varphi}$$

$lg\, 2$	$= 0{,}30103$	$[\ldots\ldots]$	$= 2{,}9952$
$lg\, g$	$= 0{,}99145$	$lg\, [\ldots\ldots]$	$= 0{,}47643$
$lg\, X$	$= 3{,}84510$	$lg\, \Delta \varphi$	$= \bar{2}{,}24180$
colg D^{re}	$= \bar{5}{,}27556$	colg $\cos^2 \varphi$	$= 0{,}05864$
$lg \frac{2gX}{U^2 \text{ sen } 2\omega}$	$= 0{,}41314$	$lg \frac{\Delta\, tg\, \omega}{tg\, \omega}$	$= \bar{2}{,}77687$
$lg \cos 2\varphi$	$= \bar{1}{,}87356$	$\frac{2gX}{U^2 \text{ sen } 2\omega}$	$= 2{,}589$
$lg \left(\frac{2gX}{U^2 \text{ sen } 2\omega} - 1\right)$	$= 0{,}20112$	$\ldots\ldots - 1$	$= 1{,}589$
colg $tg\, \omega$	$= 0{,}29283$		
$lg \frac{\cos 2\varphi}{tg\, \omega} [\ldots\ldots]$	$= 0{,}36751$	$lg \frac{\Delta\, tg\, \omega}{tg\, \omega}$	$= \bar{2}{,}77687$
		$lg\, tg\, \omega$	$= \bar{1}{,}70717$
$lg\, U$	$= 2{,}40824$	$lg\, \Delta\, tg\, \omega$	$= \bar{2}{,}48404$
$lg\, U^2$	$= 4{,}81648$	$\Delta\, tg\, \omega$	$= 0{,}03048$
lg sen 2ω	$= \bar{1}{,}90796$	$tg\, \omega$	$= 0{,}50954$
$lg\, D^{re}$	$= 4{,}72444$	$tg\, \omega_1$	$= 0{,}54002$
sen 2φ	$= 0{,}6644$	ω_1	$= 28^\circ\, 22'$
$\frac{\cos 2\varphi}{tg\, \omega} [\ldots\ldots]$	$= 2{,}3308$	$\Delta\, \omega$	$= 1^\circ\, 22'$

17 - Variazioni della durata.

Per determinare questa variazione consideriamo la formula che dà il tempo.

$$t = \frac{C'}{\cos \varphi} [T(u) - T(v)]$$

e che può scriversi

$$\frac{t \cos \varphi}{C'} - \bar{T}(D_0 + x') + \bar{T}(D_0) = 0$$

Differenziamo rispetto a $\frac{t \cos \varphi}{C'}$; x'; D_0 e sommiamo i differenziali parziali:

$$d\left(\frac{t \cos \varphi}{C'}\right) - \bar{T}'(D_0 + x')\, dx' - [\bar{T}'(D_0 + x') - \bar{T}'(D_0)]\, dD_0 = 0$$

ora

$$\bar{T}'(u) = \bar{T}'(D_0 + x') = -\frac{1}{u} = -\frac{\cos \varphi}{v \cos \theta}$$

$$\bar{T}'(D_0) = -\frac{1}{V}; \qquad d\, D_0 = -\frac{1}{K(V)} \frac{dV}{V}$$

$$d\left(\frac{t \cos \varphi}{C'}\right) = \frac{t \cos \varphi}{C'}\left(\frac{dt}{t} + \frac{d \cos \varphi}{\cos \varphi} - \frac{dC'}{C'}\right) \qquad d\, x' = d\, \frac{x}{C'} = \frac{x}{C'}\left(\frac{dx}{x} - \frac{dC'}{C'}\right)$$

Sostituendo si avrà

$$\frac{t\cos\varphi}{C'}\left(\frac{dt}{t}+\frac{d\cos\varphi}{\cos\varphi}-\frac{dC'}{C'}\right)-$$

$$-\frac{\cos\varphi}{v\cos\theta}x'\left(\frac{dx}{x}-\frac{dC'}{C'}\right)+\left[\frac{\cos\varphi}{v\cos\theta}-\frac{1}{V}\right]\frac{1}{K(V)}\frac{dV}{V}=0$$

dividendo tutto per

$$\frac{t\cos\varphi}{C'}$$

$$\frac{dt}{t}-\frac{\operatorname{sen}\varphi\, d\varphi}{\cos\varphi}-\frac{dC'}{C'}-\frac{x}{v\,t\cos\theta}\frac{dx}{x}+$$

$$+\frac{x}{v\,t\cos\theta}\frac{dC'}{C'}+\left[\frac{C'}{v\,t\cos\theta}-\frac{C'}{V\,t\cos\varphi}\right]\frac{1}{K(V)}\frac{dV}{V}=0$$

da cui

$$\frac{\Delta t}{t}=tg\,\varphi\,\Delta\varphi-\left|\frac{x}{v\,t\cos\theta}-1\right|\frac{\Delta C'}{C'}+$$

$$+\frac{x}{v\,t\cos\theta}\frac{\Delta x}{x}-\left[\frac{x}{v\,t\cos\theta}-\frac{x}{V\,t\cos\varphi}\right]\frac{C'}{x\,K(V)}\frac{\Delta V}{V}$$

Se ora poniamo

$$f_{t,x}=\frac{x}{v\,t\cos\theta}=F_4$$

$$F_5=\frac{x}{V\,t\cos\varphi}$$

$$f_{t,V}=\left(F_4-F_5\right)\frac{C'}{x\,K(V)}$$

$$f_{t,C'}=F_4-1$$

si avrà

$$\frac{\Delta t}{t}=tg\,\varphi\,\Delta\varphi+f_{t,x}\frac{\Delta x}{x}-f_{t,C'}\frac{\Delta C'}{C'}-f_{t,V}\frac{\Delta V}{V}$$

Per il punto di caduta si avrà

$$\theta=-\omega;\qquad x=X;\qquad t=T;\qquad v=U$$

per cui

$$\frac{\Delta T}{T}=tg\,\varphi\,\Delta\varphi-f_{T,X}\frac{\Delta X}{X}-f_{T,C'}\frac{\Delta C'}{C'}-f_{T,V}\frac{\Delta V}{V}$$

$$F_4=\frac{X}{U\,T\cos\omega}$$

$$F_5=\frac{X}{V\,T\cos\varphi}$$

Problema 1°.

Determinare la variazione del tempo corrispondente ad una variazione di C' supposto che il punto si sposti sulla linea di sito.

Nella formula della variazione del tempo

$$\Delta \varphi = \Delta V = 0$$

quindi sarà

$$\frac{\Delta t}{t} = f_{t,x} \frac{\Delta x}{x} - f_{t,C'} \frac{\Delta C'}{C'}$$

Occorre ora esprimere la variazione di x in funzione della variazione di C' in tal caso è

$$\frac{\Delta x}{x} = f_{C'} \frac{\Delta C'}{C'}$$

per cui

$$\frac{\Delta t}{t} = f_{t,x} f_{C'} \frac{\Delta C'}{C'} - f_{t,C'} \frac{\Delta C'}{C'}$$

ma

$$f_{t,C'} = f_{t,x} - 1$$

quindi

$$\frac{\Delta t}{t} = \left(f_{t,x} f_{C'} - f_{t,x} + 1\right) \frac{\Delta C'}{C'} = \left\{ f_{t,x}\left(f_{C'} - 1\right) + 1 \right\} \frac{\Delta C'}{C'}$$

$$f_{C'} = 1 - \frac{1}{f_2}$$

$$\frac{\Delta t}{t} = \left\{ f_{t,x}\left(1 - \frac{1}{f_2} - 1\right) + 1 \right\} \frac{\Delta C'}{C'} = \left(- f_{t,x} \frac{1}{f_2} + 1\right) \frac{\Delta C'}{C'}$$

$$f_{t,x} = \frac{x}{v t \cos \theta}$$

$$\frac{1}{f_2} = \frac{tg\, \varphi - tg\, \varepsilon}{tg\, \varepsilon - tg\, \theta}$$

quindi

$$\frac{\Delta t}{t} = \left\{ 1 - \frac{tg\, \varphi - tg\, \varepsilon}{tg\, \varepsilon - tg\, \theta} \frac{x}{v t \cos \theta} \right\} \frac{\Delta C'}{C'}$$

cioè

$$\frac{\Delta t}{t} = \left\{ 1 - \frac{\dfrac{\operatorname{sen}(\varphi - \varepsilon)}{\cos \varphi \cos \varepsilon}}{\dfrac{\operatorname{sen}(\varepsilon - \theta)}{\cos \varepsilon \cos \theta}} \frac{x}{t v \cos \theta} \right\} \frac{\Delta C'}{C'} = \left\{ 1 - \frac{x \operatorname{sen}(\varphi - \varepsilon)}{v t \operatorname{sen}(\varepsilon - \theta) \cos \varphi} \right\} \frac{\Delta C'}{C'}$$

se $\varepsilon = 0$

$$\frac{\Delta T}{T} = \left(1 - \frac{X\, tg\, \varphi}{U T \operatorname{sen} \omega}\right) \frac{\Delta C'}{C'}$$

Problema 2°.

Determinare la variazione della durata ΔT corrispondente a $\Delta \varphi$ e $\Delta C'$ tale che la gittata non cambi.

Ponendo $\Delta V = \Delta X = 0$ poichè la gittata non cambia sarà

$$0 = f_\varphi \frac{2 \Delta \varphi}{tg\, 2 \varphi} + f_{C'} \frac{\Delta C'}{C'}$$

e

$$\frac{\Delta T}{T} = tg\, \varphi\, \Delta \varphi - f_{TC'} \frac{\Delta C'}{C'}$$

ricavo $\Delta \varphi$ dalla prima

$$\Delta \varphi = - f_{C'} \frac{\Delta C'}{C'} \frac{tg\, 2 \varphi}{2 f_\varphi}$$

per cui

$$\frac{\Delta T}{T} = - \left\{ tg\, \varphi \frac{tg\, 2 \varphi}{2 f_\varphi} f_{C'} + f_{T,C'} \right\} \frac{\Delta C'}{C'} =$$

$$= - \left\{ \frac{X}{TU \cos \omega} - 1 + \frac{tg\, 2 \varphi\, tg\, \omega}{2} \left(1 - \frac{tg\, \varphi}{tg\, \omega} \right) \right\} \frac{\Delta C'}{C'} =$$

$$= - \left\{ \frac{X}{TU \cos \omega} - 1 + \frac{1}{2} tg\, 2 \varphi\, tg\, \omega \left(\frac{tg\, \omega - tg\, \varphi}{tg\, \omega} \right) \right\} \frac{\Delta C'}{C'} =$$

$$= - \left\{ \frac{X}{UT \cos \omega} + \frac{1}{2} tg\, 2 \varphi\, (tg\, \omega - tg\, \varphi) - 1 \right\} \frac{\Delta C'}{C'}$$

Applicazione sul Problema 1°.

Cannone da 149/45.

$X = 8000 \quad \varphi = 16° 29' \quad \omega = 25° 2' \quad T = 24{,}3 \quad U = 272 \quad \delta = 0{,}927$ $h = 1000$.

Si vuole ΔT quando si passa alla quota di m. 1500 ($\delta = 0{,}879$) e si spara con lo stesso angolo.

$lg\, X$	$= 3{,}90309$
$lg\, tg\, \varphi$	$= \bar{1}{,}47114$
colg U	$= \bar{3}{,}56543$
colg T	$= \bar{2}{,}61439$
colg sen ω	$= 0{,}37351$
$lg \dfrac{X\, tg\, \varphi}{UT \operatorname{sen} \omega}$	$= \bar{1}{,}92756$

$\dfrac{X\, tg\, \varphi}{UT \operatorname{sen} \omega}$	$= 0{,}8464$
$1 - \left[\dfrac{X\, tg\, \varphi}{UT \operatorname{sen} \omega} \right]$	$= 0{,}1536$
$lg \left(1 - \dfrac{X\, tg\, \varphi}{UT \operatorname{sen} \omega} \right)$	$= \bar{1}{,}18639$
$lg\, \Delta \delta$	$= \bar{2}{,}68124$
colg δ	$= 0{,}03292$
$lg\, T$	$= 1{,}38561$
$lg\, \Delta T$	$= \bar{1}{,}28616$
ΔT	$= 0{,}193$

Applicazione sul Problema 2°.

Cannone da 149/35.

$X = 8000 \quad \varphi = 16^\circ 29' \quad \omega = 25^\circ 2' \quad U = 272 \quad T = 24{,}3 \quad \delta = 0{,}927.$

Determinare la variazione di durata nel tiro alla stessa distanza ma con $\delta = 0{,}879$ $(h = 1500)$

In questo caso restano invariate X e V, varia C' e corrispondentemente φ.

$$\frac{\Delta T}{T} = -\left[\frac{X}{TU\cos\omega} + \frac{1}{2}\, tg\, 2\varphi\,(tg\,\omega - tg\,\varphi) - 1\right]\frac{\Delta C'}{C'}$$

ove

$$\frac{\Delta C'}{C'} = -\frac{\Delta\delta}{\delta} = +\frac{48}{927}$$

$lg\, X$	$= 3{,}90309$	$tg\,\omega$	$= 0{,}46701$
$\text{colg}\, T$	$= \bar{2}{,}61439$	$tg\,\varphi$	$= 0{,}29590$
$\text{colg}\, U$	$= \bar{3}{,}56543$	$tg\,\omega - tg\,\varphi$	$= 0{,}17111$
$\text{colg}\cos\omega$	$= 0{,}04284$	$lg\,(tg\,\omega - tg\,\varphi)$	$= \bar{1}{,}23328$
$lg\,\dfrac{X}{TU\cos\omega}$	$= 0{,}12575$	$lg\, tg\, 2\varphi$	$= \bar{1}{,}81196$
		$\text{colg}\, 2$	$= \bar{1}{,}69897$
		$lg\,\frac{1}{2}\, tg\, 2\varphi\,(tg\,\omega - tg\,\varphi)$	$= \bar{2}{,}74421$

$\dfrac{X}{TU\cos\omega}$	$= 1{,}3358$	$[\cdots\cdots] - 1$	$= 0{,}3913$
$\frac{1}{2}\, tg\, 2\varphi\,(tg\,\omega - tg\,\varphi)$	$= 0{,}0555$	lg id.	$= \bar{1}{,}59251$
$\dfrac{X}{TU\cos\omega} + \frac{1}{2}\, tg\, 2\varphi\,(tg\,\omega - tg\,\varphi)$	$= 1{,}3913$	$\lg\Delta\delta$	$= \bar{2}{,}68124$
		$\text{colg}\,\delta$	$= 0{,}03292$
		$\lg\dfrac{\Delta T}{T}$	$= \bar{2}{,}30667$
		$\lg T$	$= 1{,}38561$
		$\lg\Delta T$	$= \bar{1}{,}69228$
		ΔT	$= -0{,}49$

18 – Variazioni delle velocità d'arrivo.

Dalla 5ª formula del tiro

$$v\cos\theta = u\cos\varphi$$

differenziando logaritmicamente si ottiene:

$$\frac{dv}{v} + \frac{d\cos\theta}{\cos\theta} = \frac{du}{u} + \frac{d\cos\varphi}{\cos\varphi}$$

Ora dalla

$$d\,D\,(u) = \frac{-u\,d\,u}{F\,(u)}$$

si deduce

$$\frac{du}{u} = -\frac{F(u)}{u^2}\, d\,D(u) = -K(u)\, d\,D(u) = -K(u)\, d\,(D_0 + x') =$$
$$= -K(u)\, d\,D_0 - K(u)\, dx'$$

ma

$$dx' = x'\left(\frac{d\,x}{x} - \frac{d\,C'}{C'}\right)$$

$$d\,D_0 = -\frac{1}{K(V)}\frac{d\,V}{V}$$

quindi

$$\frac{du}{u} = -K(u)\,\frac{x}{C'}\left(\frac{dx}{x} - \frac{d\,C'}{C'}\right) + \frac{K(u)}{K(V)}\frac{d\,V}{V}$$

quindi la relazione trovata precedentemente diventa

$$\frac{dv}{v} = \frac{du}{u} - tg\,\varphi\, d\,\varphi + tg\,\theta\, d\,\theta =$$
$$= tg\,\theta\, d\,\theta - tg\,\varphi\, d\,\varphi - K(u)\, x'\left(\frac{d\,x}{x} - \frac{d\,C'}{C'}\right) + \frac{K(u)}{K(V)}\frac{d\,V}{V}$$

e ponendo

$$u = \frac{v\cos\theta}{\cos\varphi}$$

e sostituendo agli infinitesimi le differenze finite si ha:

$$\frac{\Delta v}{v} = tg\,\theta\,\Delta\,\theta - tg\,\varphi\,\Delta\,\varphi - K\left(\frac{v\cos\theta}{\cos\varphi}\right)\frac{x}{C'}\left(\frac{\Delta\,x}{x} - \frac{\Delta\,C'}{C'}\right) + \frac{K\left(\frac{v\cos\theta}{\cos\varphi}\right)}{K(V)}\,\frac{\Delta\,V}{V}$$

In questa formula compaiono $\Delta\,\theta$ e $\Delta\,x$ che debbono essere eliminate mediante le formule che danno i valori di queste due quantità.

Per il punto di caduta la formula diviene

$$\frac{\Delta U}{U} = tg\,\omega\,\Delta\,\omega - tg\,\varphi\,\Delta\,\varphi - K\left(\frac{U\cos\omega}{\cos\varphi}\right)\frac{X}{C'}\left(\frac{\Delta\,X}{X} - \frac{\Delta C'}{C'}\right) + \frac{K\left(\frac{U\cos\omega}{\cos\varphi}\right)}{K(V)}\,\frac{\Delta\,V}{V}$$

Problema.

Determinare la relazione fra le variazioni di φ e C' necessarie per ottenere che la componente verticale della velocità di caduta non vari supposto che non vari la V.

Ciò equivale a dire che deve essere

$$U \operatorname{sen}\omega = \text{cost.}$$

Differenziando logaritmicamente

$$\frac{d\,U}{U} + \frac{d\operatorname{sen}\omega}{\operatorname{sen}\omega} = 0$$

cioè

$$\frac{d\,U}{U} + \frac{d\,\omega}{tg\,\omega} = 0$$

Ma dalla formula generale che da $\Delta\,U$ per $\Delta\,V = 0$ si ha:

$$\frac{\Delta\,U}{U} = tg\,\omega\,\Delta\,\omega - tg\,\varphi\,\Delta\,\varphi - K\left(\frac{U\cos\omega}{\cos\varphi}\right)\frac{X}{C'}\left(\frac{\Delta\,X}{X} - \frac{\Delta\,C'}{C'}\right)$$

e d'altra parte

$$\frac{\Delta\,tg\,\omega}{tg\,\omega} = \left|\operatorname{sen} 2\,\varphi + \frac{\cos 2\,\varphi}{tg\,\omega}\left(\frac{2\,g\,X}{U^2 \operatorname{sen} 2\,\omega} - 1\right)\right| \frac{\Delta\,\varphi}{\cos^2\varphi} +$$
$$+ \left|1 - \frac{tg\,\varphi}{tg\,\omega}\left(\frac{2\,g\,X}{U^2\operatorname{sen} 2\,\omega} - 1\right)\right| \frac{\Delta\,C'}{C'}$$

$$\frac{\Delta\,X}{X} = f_\varphi\,\frac{2\,\Delta\,\varphi}{tg\,2\,\varphi} + f_{C'}\,\frac{\Delta\,C'}{C'} = f_\varphi\,\frac{2\,\Delta\,\varphi}{tg\,2\,\varphi} + \frac{\Delta\,C'}{C'} - \frac{1}{f_2}\,\frac{\Delta\,C'}{C'}$$

$$\frac{\Delta\,X}{X} - \frac{\Delta\,C'}{C'} = \frac{tg\,\varphi}{tg\,\omega}\left(\frac{2\,\Delta\,\varphi}{tg\,2\,\varphi} - \frac{\Delta\,C'}{C'}\right)$$

Sostituendo a $\frac{\Delta\,U}{U}$ il valore $\frac{\Delta\,\omega}{tg\,\omega}$ si ha

$$-\frac{\Delta\,\omega}{tg\,\omega} = tg\,\omega\,\Delta\,\omega - tg\,\varphi\,\Delta\,\varphi - K\left(\frac{U\cos\omega}{\cos\varphi}\right)\frac{X}{C'}\left(\frac{\Delta\,X}{X} - \frac{\Delta\,C'}{C'}\right)$$

cioè

$$\frac{\Delta\,\omega}{tg\,\omega} + tg\,\omega\,\Delta\,\omega = \left(\frac{1}{tg\,\omega} + tg\,\omega\right)\Delta\,\omega = tg\,\varphi\,\Delta\,\varphi + K\left(\frac{U\cos\omega}{\cos\varphi}\right)\frac{X}{C'}\left(\frac{\Delta\,X}{X} - \frac{\Delta\,C'}{C'}\right)$$

$$\frac{1 + tg^2\,\omega}{tg\,\omega}\,\Delta\,\omega = \frac{\Delta\,tg\,\omega}{tg\,\omega} = tg\,\varphi\,\Delta\,\varphi + K\left(\frac{U\cos\omega}{\cos\varphi}\right)\frac{X}{C'}\left(\frac{\Delta\,X}{X} - \frac{\Delta\,C'}{C'}\right)$$

ma

$$\frac{\Delta\,X}{X} - \frac{\Delta\,C'}{C'} = \frac{tg\,\varphi}{tg\,\omega}\left(\frac{2\,\Delta\,\varphi}{tg\,2\,\varphi} - \frac{\Delta\,C'}{C'}\right)$$

quindi

$$\frac{\Delta\,tg\,\omega}{tg\,\omega} = tg\,\varphi\,\Delta\,\varphi + K\left(\frac{U\cos\omega}{\cos\varphi}\right)\frac{X}{C'}\,\frac{tg\,\varphi}{tg\,\omega}\left(\frac{2\,\Delta\,\varphi}{tg\,2\,\varphi} - \frac{\Delta\,C'}{C'}\right)$$

Eguagliando il valore così trovato con quello dato dalla formula trovata nelle variazioni di ω sarà:

$$tg\,\varphi\,\Delta\,\varphi + K\left(\frac{U\cos\omega}{\cos\varphi}\right)\frac{X}{C'}\,\frac{tg\,\varphi}{tg\,\omega}\left(\frac{2\,\Delta\,\varphi}{tg\,2\,\varphi} - \frac{\Delta\,C'}{C'}\right) -$$
$$- \left|\operatorname{sen} 2\,\varphi + \frac{\cos 2\,\varphi}{tg\,\omega}\left(\frac{2\,g\,X}{U^2\operatorname{sen} 2\,\omega} - 1\right)\right| \frac{\Delta\,\varphi}{\cos^2\varphi} -$$
$$- \left|1 - \frac{tg\,\varphi}{tg\,\omega}\left(\frac{2\,g\,X}{U^2\operatorname{sen}^2 2\,\omega} - 1\right)\right| \frac{\Delta\,C'}{C'} = 0$$

cioè

$$tg\,\varphi\,\Delta\varphi + K\left(\frac{U\cos\omega}{\cos\varphi}\right)\frac{X}{C'}\,\frac{tg\,\varphi}{tg\,\omega}\,\frac{2\,\Delta\varphi}{tg\,2\varphi} -$$

$$-\left[\operatorname{sen} 2\varphi - \frac{\cos 2\varphi}{tg\,\omega}\left(\frac{2\,g\,X}{U^2 \operatorname{sen} 2\omega} - 1\right)\right]\frac{\Delta\varphi}{\cos^2\varphi} -$$

$$-\left[1 - \frac{tg\,\varphi}{tg\,\omega}\left(\frac{2\,g\,X}{U^2 \operatorname{sen}^2 2\omega} - 1\right) + K\left(\frac{U\cos\omega}{\cos\varphi}\right)\frac{X}{C'}\,\frac{tg\,\varphi}{tg\,\omega}\right]\frac{\Delta C'}{C'} = 0$$

$$\frac{\Delta\varphi}{\cos^2\varphi}\left\{\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\cos\varphi}\cos^2\varphi + K\left(\frac{U\cos\omega}{\cos\varphi}\right)\frac{X}{C'}\,\frac{\operatorname{sen} 2\varphi}{tg\,\omega}\,\frac{1}{tg\,2\varphi} -\right.$$

$$\left.-\left[\operatorname{sen} 2\varphi - \frac{\cos 2\varphi}{tg\,\omega}\left(\frac{2\,g\,X}{U^2 \operatorname{sen} 2\omega} - 1\right)\right]\right\} -$$

$$-\left[1 - \frac{tg\,\varphi}{tg\,\omega}\left\{\frac{2\,g\,X}{U^2 \operatorname{sen} 2\omega} - 1 + \frac{X}{C'}\,K\left(\frac{U\cos\omega}{\cos\varphi}\right)\right\}\right]\frac{\Delta C'}{C'} = 0$$

$$\left\{\frac{\operatorname{sen} 2\varphi}{2} + \frac{\cos 2\varphi}{tg\,\omega}\left[\frac{2\,g\,X}{U^2 \operatorname{sen} 2\omega} - 1 + \frac{X}{C'}\,K\left(\frac{U\cos\omega}{\cos\varphi}\right)\right]\right\}\frac{\Delta\varphi}{\cos^2\varphi} +$$

$$+\left\{1 - \frac{tg\,\varphi}{tg\,\omega}\left[\frac{2\,g\,X}{U^2 \operatorname{sen} 2\omega} - 1 - \frac{X}{C'}\,K\left(\frac{U\cos\omega}{\cos\varphi}\right)\right]\right\}\frac{\Delta C'}{C'} = 0$$

CAPITOLO XIII *A*

FORMULE DI VARIAZIONE NEL CALCOLO DI TRAIETTORIE PER PUNTI

1 – Problema I.

Supposti fissi i valori di V, φ e θ determinare le variazioni degli elementi x, y, t e v nell'estremità dell'arco dovute ad un errore di C'.

Questo problema si risolve impiegando le formule

$$\frac{\Delta y - \Delta x \, tg\,\theta}{y - x \, tg\,\theta} = A_\theta \, f_\varphi \, \Delta \varphi + f_{C'} \frac{\Delta C'}{C'} + f_V \frac{\Delta V}{V} \qquad [1]$$

$$\frac{\Delta \, tg\,\theta}{tg\,\varepsilon - tg\,\theta} = A_\theta \, f_{\theta,\varphi} \, \Delta \varphi + f_{\theta,C'} \frac{\Delta C'}{C'} - f_{\theta,x} \frac{\Delta x}{x} + f_{\theta,V} \frac{\Delta V}{V} \qquad [2]$$

$$\frac{\Delta t}{t} = tg\,\varphi \, \Delta \varphi + f_{t,x} \frac{\Delta x}{x} - f_{t,C'} \frac{\Delta C'}{C'} - f_{t,V} \frac{\Delta V}{V} \qquad [3]$$

$$\frac{\Delta v}{v} = tg\,\theta \, \Delta \theta - tg\,\varphi \, \Delta \varphi - K\left(\frac{v \cos\theta}{\cos\varphi}\right) \frac{x}{C'} \left(\frac{\Delta x}{x} - \frac{\Delta C'}{C'}\right) + \frac{K\left(\frac{v\cos\theta}{\cos\varphi}\right)}{K(V)} \frac{\Delta V}{V} \qquad [4]$$

nelle quali $\Delta V = \Delta \varphi = \Delta \theta = 0$.

In questa ipotesi la [2] diventa

$$f_{\theta,x} \frac{\Delta x}{x} = f_{\theta,C'} \frac{\Delta C'}{C'}$$

e poichè $f_{\theta,x} = F_3 \qquad f_{\theta,C'} = F_3 - F_2$ sarà:

$$F_3 \frac{\Delta x}{x} = (F_3 - F_2) \frac{\Delta C'}{C'}$$

cioè

$$\frac{\Delta x}{x} = \left(1 - \frac{F_2}{F_3}\right) \frac{\Delta C'}{C} \quad \text{cioè} \quad \frac{\Delta x}{x} = (1 - F) \frac{\Delta C'}{C'}$$

che fornisce lo spostamento orizzontale del punto.

La [1] nella ipotesi precedente diventa:

$$\frac{\Delta y - \Delta x \, tg\,\theta}{y - x \, tg\,\theta} = f_{C'} \frac{\Delta C'}{C'}$$

ma

$$f_{C'} = 1 - \frac{tg\,\varphi - tg\,\varepsilon}{tg\,\varepsilon - tg\,\theta} = \frac{2\,tg\,\varepsilon - tg\,\varphi - tg\,\theta}{tg\,\varepsilon - tg\,\theta}$$

Sostituendo e dividendo tutto il 1° membro per y si avrà:

$$\frac{\frac{\Delta y}{y} - \frac{\Delta x\, tg\,\theta}{y}}{1 - \frac{x}{y}\, tg\,\theta} = \frac{\frac{\Delta y}{y} - \frac{\Delta x}{x}\frac{x}{y}\, tg\,\theta}{1 - \frac{x\, tg\,\theta}{y}} = \frac{\frac{\Delta y}{y} - \frac{\Delta x}{x}\frac{tg\,\theta}{tg\,\varepsilon}}{1 - \frac{tg\,\theta}{tg\,\varepsilon}} =$$

$$= \frac{2\, tg\,\varepsilon - tg\,\varphi - tg\,\theta}{tg\,\varepsilon - tg\,\theta}\,\frac{\Delta C'}{C'}$$

cioè

$$\frac{\Delta y}{y} - \frac{\Delta x}{x}\frac{tg\,\theta}{tg\,\varepsilon} = \frac{2\, tg\,\varepsilon - tg\,\varphi - tg\,\theta}{tg\,\varepsilon - tg\,\theta}\,\frac{\Delta C'}{C'}\,\frac{tg\,\varepsilon - tg\,\theta}{tg\,\varepsilon}$$

da cui

$$\frac{\Delta y}{y} = \frac{\Delta x}{x}\frac{tg\,\theta}{tg\,\varepsilon} + \frac{2\, tg\,\varepsilon - tg\,\varphi - tg\,\theta}{tg\,\varepsilon}\,\frac{\Delta C'}{C'}$$

ma $\frac{\Delta x}{x} = (1 - F)\frac{\Delta C'}{C'}$ quindi

$$\frac{\Delta y}{y} = \left(\frac{\Delta C'}{C'} - F\,\frac{\Delta C'}{C'}\right)\frac{tg\,\theta}{tg\,\varepsilon} + \frac{2\, tg\,\varepsilon - tg\,\varphi - tg\,\theta}{tg\,\varepsilon}\,\frac{\Delta C'}{C'} =$$

$$= \frac{1}{tg\,\varepsilon}\left(\frac{\Delta C'}{C'}\, tg\,\theta - F\,\frac{\Delta C'}{C'}\, tg\,\theta + 2\, tg\,\varepsilon\,\frac{\Delta C'}{C'} - tg\,\varphi\,\frac{\Delta C'}{C'} - tg\,\theta\,\frac{\Delta C'}{C'}\right)$$

quindi

$$\frac{\Delta y}{y} = \frac{2\, tg\,\varepsilon - tg\,\varphi - F\, tg\,\theta}{tg\,\varepsilon}\,\frac{\Delta C'}{C'}$$

che dà lo spostamento verticale del punto.

Dalla equazione che fornisce la variazione della velocità

$$\frac{\Delta v}{v} = tg\,\theta\,\Delta\,\theta - tg\,\varphi\,\Delta\,\varphi - K\left(\frac{v\cos\theta}{\cos\varphi}\right)\frac{x}{C'}\left(\frac{\Delta x}{x} - \frac{\Delta C'}{C'}\right) + \frac{K\left(\frac{v\cos\theta}{\cos\varphi}\right)}{K(V)}\,\frac{\Delta V}{V}$$

ponendo $\Delta\,\varphi = \Delta\, V = \Delta\,\theta = 0$ si ha

$$\frac{\Delta v}{v} = -K\left(\frac{v\cos\theta}{\cos\varphi}\right)\frac{x}{C'}\left(\frac{\Delta x}{x} - \frac{\Delta C'}{C'}\right)$$

ma $\frac{\Delta x}{x} = (1 - F)\frac{\Delta C'}{C'}$ quindi

$$\frac{\Delta v}{v} = -K\left(\frac{v\cos\theta}{\cos\varphi}\right)\frac{x}{C'}(1 - F - 1)\frac{\Delta C'}{C'} = K\left(\frac{v\cos\theta}{\cos\varphi}\right)\frac{x}{C'}\,F\,\frac{\Delta C'}{C'}$$

Finalmente dalla

$$\frac{\Delta t}{t} = tg\,\varphi\,\Delta\,\varphi - f_{t,C'}\frac{\Delta C'}{C'} + f_{t,x}\frac{\Delta x}{x} - f_{t,V}\frac{\Delta V}{V}$$

ponendo $\Delta V = \Delta \varphi = 0$

$$\frac{\Delta t}{t} = f_{t,x} \frac{\Delta x}{x} - f_{t,C'} \frac{\Delta C'}{C'}$$

ma $f_{t,x} = F_4 \quad f_{t,C'} = F_4 - 1$ quindi

$$\frac{\Delta t}{t} = F_4 (1 - F) \frac{\Delta C'}{C'} - (F_4 - 1) \frac{\Delta C'}{C'} = [F_4 (1 - F) - F_4 + 1] \frac{\Delta C'}{C'} =$$

$$= (F_4 - F_4 F - F_4 + 1) \frac{\Delta C'}{C'} = (1 - F F_4) \frac{\Delta C'}{C'}$$

posto $FF_4 = F_t$

$$\frac{\Delta t}{t} = (1 - F_t) \frac{\Delta C'}{C'}$$

Si può dimostrare che i nuovi fattori F ed F_t sono fattori di tiro.

2 - I nuovi fattori di tiro.

I nuovi fattori F ed F_t possono essere espressi in funzione degli elementi finali dell'arco.

Abbiamo visto che $F = \frac{F_2}{F_3}$ ma

$$F_2 = 1 + \frac{1}{f_2} = 1 + \frac{tg\,\varphi - tg\,\varepsilon}{tg\,\varepsilon - tg\,\theta} =$$

$$= \frac{tg\,\varepsilon - tg\,\theta + tg\,\varphi - tg\,\varepsilon}{tg\,\varepsilon - tg\,\theta} = \frac{tg\,\varphi - tg\,\theta}{tg\,\varepsilon - tg\,\theta}$$

$$F_3 = \frac{gx}{v^2 \cos^2\theta\,(tg\,\varepsilon - tg\,\theta)}$$

quindi

$$F = \frac{\dfrac{tg\,\varphi - tg\,\theta}{tg\,\varepsilon - tg\,\theta}}{\dfrac{g\,x}{v^2 \cos^2\theta\,(tg\,\varepsilon - tg\,\theta)}} = \frac{v^2 \cos^2\theta}{gx} (tg\,\varphi - tg\,\theta)$$

Analogamente $F_t = FF_4$

$$F = \frac{v^2 \cos^2\theta}{gx} (tg\,\varphi - tg\,\theta)$$

$$F_4 = \frac{x}{vt \cos\theta}$$

quindi

$$F_t = \frac{v^2 \cos^2\theta}{gx} (tg\,\varphi - tg\,\theta) \frac{x}{vt \cos\theta}$$

$$F_t = \frac{v \cos\theta}{gt} (tg\,\varphi - tg\,\theta)$$

Questi fattori potrebbero anche esser espressi in funzione degli ordinari fattori di tiro, ma ciò per noi ha poca importanza.

a) APPLICAZIONE.

Dati; $V = 798{,}1 \qquad \varphi = 30° \qquad lg\,\frac{C}{\delta\, i} = 0{,}27623 \qquad n = 2$

Calcolato β_θ per la resistenza ennesima questo è risultato

$$\beta_\theta = 1{,}1270$$

Col calcolo per archi si è ancora avuto:

$$x = 935{,}9 \qquad y = 530{,}3 \qquad t = 1''479 \qquad v = 661 \qquad \theta = 29°$$

Determinare gli errori che si commetterebbero impiegando invece di β_θ calcolato il valore di β in 1ª approssimazione cioè

$$\beta = \frac{1}{\cos\varphi}$$

In questa ipotesi dato che

$$\beta = \frac{1}{\cos\varphi} = 1{,}1547$$

risulta

$$\Delta\,\beta = 0{,}0277$$

e

$$\frac{\Delta\, C'}{C'} = -\frac{\Delta\,\beta}{\beta} = -\frac{0{,}0277}{1{,}1270}$$

per cui

$$lg\,\frac{\Delta\, C'}{C'} = \bar{2}{,}39056$$

Calcolo di

$$\frac{\Delta\, x}{x} = (1 - F)\,\frac{\Delta\, C'}{C'} \qquad \text{con} \qquad F = \frac{F_2}{F_3} = \frac{v^2\cos^2\theta}{g x}\,(tg\,\varphi - tg\,\theta)$$

$lg\, v$	$= 2{,}82020$	$tg\,\varphi$	$= 0{,}57735$
$lg\cos\theta$	$= \bar{1}{,}94182$	$tg\,\theta$	$= 0{,}55431$
$lg\,(v\cos\theta)$	$= 2{,}76202$	$tg\,\varphi - tg\,\theta$	$= 0{,}02304$
$lg\,(v\cos\theta)^2$	$= 5{,}52404$	F	$= 0{,}8391$
colg g	$= \bar{1}{,}00855$	$1 - F$	$= 0{,}1609$
colg x	$= \bar{3}{,}02877$	$lg\,(1 - F)$	$= \bar{1}{,}20656$
$lg\,(tg\,\varphi - tg\,\theta)$	$= \bar{2}{,}36248$	$lg\,\frac{\Delta\, C'}{C'}$	$= \bar{2}{,}39056$
lg F	$= \bar{1}{,}92384$	$lg\, x$	$= 2{,}97123$
		$lg\,\Delta\, x$	$= 0{,}56835$
		$\Delta\, x$	$= -3{,}70$

Calcolo di

$$\frac{\Delta t}{t} = (1 - F_t)\,\frac{\Delta C'}{C'}$$

$lg\, v \cos\theta$	$= 2,76202$	F_t	$= 0,9185$
colg g	$= \bar{1},00855$	$1 - F_t$	$= 0,0815$
colg t	$= \bar{1},83003$	$lg\,(1 - F_t)$	$= \bar{2},91116$
$lg\,(tg\,\varphi - tg\,\theta)$	$= \bar{2},36248$	$lg\,\frac{\Delta C'}{C'}$	$= \bar{2},39056$
$lg\, F_t$	$= \bar{1},96308$	$lg\, t$	$= 0,16997$
		$lg\,\Delta t$	$= \bar{3},47169$
		Δt	$= 0,0030$

Calcolo di

$$\frac{\Delta V}{V} = K\left(\frac{v \cos\theta}{\cos\varphi}\right)\frac{x}{C'}\, F\, \frac{\Delta C'}{C'}$$

$lg\, v \cos\theta$	$= 2,76202$	$K\left(\frac{v\cos\theta}{\cos\varphi}\right)$	$= 0,000331$	$lg\,\frac{C}{\delta_i \beta}$	$= 0,27623$
colg $\cos\varphi$	$= 0,06247$	$lg\, K\left(\frac{v\cos\theta}{\cos\varphi}\right)$	$= \bar{4},51983$	colg β	$= \bar{1},93753$
$lg\,\frac{v\cos\theta}{\cos\varphi}$	$= 2,82449$	$lg\, f_o$	$= 2,75747$	$lg\, C'$	$= 0,21376$
$\frac{v\cos\theta}{\cos\varphi}$	$= 667,5$	$lg\, F$	$= \bar{1},92384$	colg C'	$= \bar{1},78624$
		$lg\,\frac{\Delta C'}{C'}$	$= \bar{2},39056$	$lg\, x$	$= 2,27123$
		$lg\, V$	$= 2,82020$	$lg\, f_o$	$= 2,75747$
		$lg\,\Delta V$	$= 0,41190$		
		ΔV	$= -2,58$		

Il calcolo potrebbe essere ripetuto assumendo per β il valore all'estremo dell'arco cioè

$$\beta = \frac{\delta_y}{\delta_o}\,\frac{K(V)}{K(u)}\,\frac{1}{\cos\theta}$$

In tale ipotesi si troverebbe

$$\beta = 1,0996$$

e ripetendo le operazioni precedenti si avrebbe:

$$\Delta x = 3,66$$
$$\Delta y = 2,06$$
$$\Delta v = 2,56$$
$$\Delta t = 0,0029$$

e poichè nel calcolo precedente si è avuto

$$\Delta x = -3,70$$
$$\Delta y = -2,09$$
$$\Delta v = -2,58$$
$$\Delta t = -0,0030$$

si vede che la media dei due valori è appunto il valore trovato assumendo il β_θ della resistenza ennesima.

3 - Deviazioni dovute al vento.

Uno dei problemi secondari della balistica esterna riguarda le deviazioni che subisce il proietto per effetto del vento.

Il problema è quindi il seguente:

« Supposta nota la traiettoria d'un proietto nell'aria in quiete determinare le variazioni:

$$\Delta x(t) \qquad \Delta y(t) \qquad \Delta z(t)$$

negli elementi x y z quando il proietto è soggetto all'azione di un vento di intensità e direzione note.

Il problema fino ad ora non ha avuto una soluzione soddisfacente per le difficoltà che presenta non solo analiticamente ma anche perchè non si è sempre d'accordo nei criteri da seguirsi per la determinazione del vento.

Il metodo adottato da Siacci suppone il vento costante sia col variare del tempo che col variare del punto nello spazio.

In altre parole il Siacci supposto il vento costante ed orizzontale ha risolto il problema riducendo il calcolo delle perturbazioni dovute al vento a quello delle variazioni dei parametri della traiettoria V e φ.

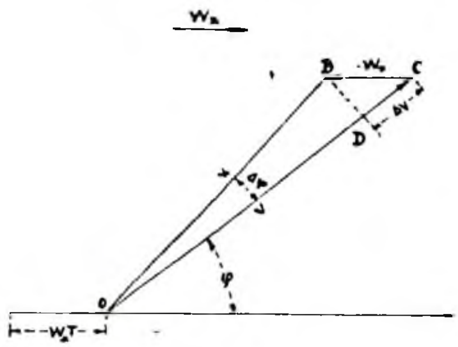


FIG. 74.

Infatti se consideriamo una traiettoria di velocità V ed angolo di proiezione φ e supponiamo che sul proietto agisca un vento orizzontale nel piano di tiro di intensità W, questo come effetto fa variare φ perchè tende ad abbassare la traiettoria: e varierà anche la velocità orizzontale.

Le variazioni di φ e V saranno (v. fig. 74).

$$\Delta\varphi = \frac{W \operatorname{sen}\varphi}{V} \qquad \Delta V = -W\cos\varphi$$

In questo caso la variazione della X sarà rappresentata da

$$\Delta X = W_x \left| T - \frac{X}{V\cos\varphi}\left(f_0 \cos^2\varphi - f_\varphi \cos 2\varphi\right)\right|$$

od anche

$$\Delta X = W_x T \left| 1 - \frac{2 f_3}{f_1}\left(f_0 \cos^2\varphi - \frac{1}{f_2}\cos 2\varphi\right)\right|$$

Il vento però non sempre si mantiene costante in grandezza e direzione, nel caso di vento variabile si può sostituire ad esso un vento fittizio detto « vento balistico » di direzione fissa e d'intensità costante.

Il prof. Burzio, studiando la questione del vento conclude che la migliore soluzione è quella di prendere un vento balistico d'intensità media aritmetica dei valori che esso assume alle varie altitudini e che vengono periodicamente misurati.

Presso alcuni eserciti stranieri il vento viene misurato alle varie altitudini e per tener conto delle diverse durate di permanenza del proietto nei vari strati, l'atmosfera viene divisa nei vari strati e si applica ad ognuno di essi un particolare coefficiente.

La media ponderale dei valori del vento per i vari strati darà il vento balistico medio.

Nel caso di resistenza quadratica

$$f_V = \frac{2}{f_2}$$

quindi

$$\Delta X = W_x T\left(1 - \frac{2 f_3}{f_1 f_2}\right)$$

La componente normale del vento ha come effetto lo spostamento del proietto fuori dal piano di tiro.

Se W_z è la componente normale del vento sarà:

$$\Delta z = W_z\left(T - \frac{X}{V \cos \varphi}\right)$$

Le tavole di tiro contengono due coefficenti di correzione C_{W_x} e C_{W_z} che danno le variazioni in gittata ed in direzione (in millesimi) per effetto di un vento della intensità di 1 m/s.

a) Applicazioni.

Obice da 75/13; $V = 350$ $x = 6000$ $\varphi = 27^\circ 19'$ $T = 26{,}6$ $C' = 1{,}425$ determinare i coefficenti di correzione C_{W_x} e C_{W_z}

$$C_{W_z} = W_z\left(T - \frac{X}{V \cos \varphi}\right)$$

$lg\, X$	$= 3{,}77815$	T	$= 26{,}6$
$\mathrm{colg}\, V$	$= 3{,}45593$	$\frac{X}{V \cos \varphi}$	$= 19{,}3$
$\mathrm{colg} \cos \varphi$	$= 0{,}05135$	$C_{W_z m}$	$= 7{,}3$
$lg \frac{X}{V \cos \varphi}$	$= 1{,}28543$	$C_{W_z \infty}$	$= 1^{\infty} 2$

$$C_{W_x} = W_x\left[T - \frac{X}{V \cos \varphi}\left(f_V \cos^2 \varphi - f_\varphi \cos 2\varphi\right)\right]$$

$lg\, X$	$= 3{,}77815$	$\mathrm{colg}\, f_2$	$= \bar{1}{,}83920$	$lg\, [\cdots\cdot]$	$= \bar{1}{,}31048$
$\mathrm{colg}\, C'$	$= \bar{1}{,}84619$	$lg \cos^2 \varphi$	$= \bar{1}{,}76253$	$lg \frac{X}{V \cos \varphi}$	$= 1{,}28543$
$lg\, f_0$	$= 3{,}62434$	$lg\, f_\varphi \cos^2 \varphi$	$= \bar{1}{,}60173$	lg somma	$= 0{,}59591$
f_0	$= 4211$	$f_\varphi \cos^2 \varphi$	$= 0{,}3997$	$\frac{X}{V \cos \varphi} [\cdots\cdot]$	$= 3{,}94$
$lg\, f_1$	$= 0{,}1608$	$f_V \cos^2 \varphi$	$= 0{,}6041$	T	$= 26{,}6$
$lg\, f_V$	$= \bar{1}{,}88380$	$[f_V \cos^2 \varphi - f_\varphi \cos^2 \varphi]$	$= 0{,}2044$	C_{W_x}	$= 22{,}7$
$lg \cos^2 \varphi$	$= \bar{1}{,}89730$				
$lg\, f_V \cos^2 \varphi$	$= \bar{1}{,}78110$				

CAPITOLO XIII *B*

CALCOLO DELLE VARIAZIONI COL METODO G. H. M.

1 – Generalità.

Siano date all'inizio di un arco di traiettorie le variazioni ΔV e $\Delta \varphi$; lungo l'arco verranno ad aggiungersi oltre alle accelerazioni principali g ed $f(v)$ anche altre accelerazioni perturbatrici dovute a variazioni nei parametri delle traiettorie.

Si tratta di determinare le alterazioni che ne derivano alla fine dell'arco con la condizione che l'arco perturbato abbia la stessa ampiezza dell'arco primitivo più un incremento $\Delta \theta$ cioè

$$\theta = \theta, \qquad \theta + \Delta \theta$$

Per risolvere questo problema si decompongono le accelerazioni perturbatrici in due componenti: una diretta secondo la verticale che dà luogo ad una variazione Δg della gravità, l'altra diretta secondo la tangente che genera una variazione nella ritardazione $\Delta f(v)$.

A queste perturbazioni, che si possono chiamare determinanti vengono ad aggiungersi quelle dovute alla ripercussione di Δv e di Δy sul valore della resistenza ed anche di ciò è tenuto conto nel calcolo definitivo delle alterazioni.

2 – Equazioni differenziali delle variazioni.

Partiamo dalle equazioni di S. Robert che scriveremo nel modo seguente:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{dx}{d\theta} = -\frac{v^2}{g} \\ y' &= \frac{dy}{d\theta} = -\frac{v^2}{g}\, tg\,\theta \\ s' &= \frac{ds}{d\theta} = -\frac{v^2}{g\cos\theta} \\ t' &= \frac{dt}{d\theta} = -\frac{v}{g\cos\theta} \end{aligned}\right\} \qquad [1]$$

mentre l'equazione dell'odografa può essere scritta, dopo aver posto

$$\frac{f(v)}{g} = \rho$$

$$d(v\cos\theta) = \rho\, v\, d\theta$$

da cui

$$\frac{d(v\cos\theta)}{v\cos\theta} = \rho\,\frac{d\theta}{\cos\theta}$$

cioè

$$d\, lg\, (v \cos \theta) = \rho\, \frac{d\,\theta}{\cos \theta}$$

$$\frac{d\, lg\, v \cos \theta}{d\,\theta} = (\log v \cos \theta)'$$

quindi:

$$(\log v \cos \theta)' = \frac{\rho}{\cos \theta}$$

Le equazioni delle variazioni si ottengono differenziando logaritmicamente le equazioni precedenti, per cui si ottiene:

$$\frac{d\, (lg\, v \cos \theta)'}{(lg\, v \cos \theta)'} = \frac{d\, \rho}{\rho} + tg\, \theta\, d\, \theta$$

Dalla

$$x' = -\frac{v^2}{g}$$

si ha, tenendo conto del solo valore assoluto,

$$\frac{d\, x'}{x'} = 2\, \frac{d\, v}{v} - \frac{d\, g}{g}$$

e per le altre, sempre tenendo conto del solo valore assoluto,

$$\frac{d\, y'}{y'} = 2\, \frac{d\, v}{v} - \frac{d\, g}{g} + \frac{d\, tg\, \theta}{tg\, \theta} = 2\, \frac{d\, v}{v} - \frac{d\, g}{g} + \frac{d\, \theta}{\cos^2 \theta\, tg\, \theta} =$$

$$= 2\, \frac{d\, v}{v} - \frac{d\, g}{g} + \frac{2\, d\, \theta}{\text{sen}\, 2\, \theta}$$

$$\frac{d\, s'}{s} = 2\, \frac{d\, v}{v} - \frac{d\, g}{g} - \frac{d \cos \theta}{\cos \theta} =$$

$$= 2\, \frac{d\, v}{v} - \frac{d\, g}{g} + tg\, \theta\, d\, \theta$$

$$\frac{d\, t'}{t'} = \frac{d\, v}{v} - \frac{d\, g}{g} + tg\, \theta\, d\, \theta$$

a) Determinazione delle variazioni nella $v \cos \theta$.

Dalla

$$\frac{d\, (lg\, v \cos \theta)'}{(lg\, v \cos \theta)'} = \frac{d\, \rho}{\rho} + tg\, \theta\, d\, \theta$$

che può essere scritta:

$$\frac{d\, \dfrac{d\, lg\, (v \cos \theta)}{d\, \theta}}{\dfrac{d\, lg\, (v \cos \theta)}{d\, \theta}} = \frac{d\, \rho}{\rho} + tg\, \theta\, d\, \theta$$

si ha

$$d^2\, lg\, (v \cos \theta) = \left| \frac{d\, \rho}{\rho} + tg\, \theta\, d\, \theta \right| d\, lg\, (v \cos \theta)$$

ed integrando questa equazione fra $(v \cos \theta)_0$ e $(v \cos \theta)_1$ si ha:

$$d\, lg\, (v \cos \theta)_1 - d\, lg\, (v \cos \theta)_0 = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \left[\frac{d\rho}{\rho} + tg\, \theta\, d\, \theta \right] d\, lg\, v \cos \theta$$

Poniamo ora

$$E = lg_e\, (v \cos \theta)_0 - lg_e (v \cos \theta)_1 = \frac{1}{M} \left[lg_{10}\, (v \cos \theta)_0 - lg_{10}\, (v \cos \theta)_1 \right]$$

con

$$M = lg_{10}\, e = 0{,}4343$$

viene

$$d\, E = d\, lg_e\, (v \cos \theta)_0 - d\, lg_e\, (v \cos \theta)_1$$

quindi

$$+\, d\, lg_e\, (v \cos \theta)_0 - d\, lg\, (v \cos \theta)_1 = d\, E = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \left(\frac{d\rho}{\rho} + tg\, \theta\, d\, \theta \right) d\, lg\, v \cos \theta$$

L'integrale può essere calcolato, applicando il teorema della media, quindi

$$d\, E = \left(\frac{d\rho}{\rho} + tg\, \theta\, d\, \theta \right)_m (lg\, v \cos \theta_0 - lg\, v \cos \theta_1) = AE$$

dove

$$A = \left(\frac{d\rho}{\rho} + tg\, \theta\, d\, \theta \right)_m$$

Ne deriva che

$$\frac{d\, E}{E} = A$$

Ora conoscendo le variazioni $\frac{d\rho}{\rho}$ e $tg\, \theta\, d\, \theta$ all'inizio e alla fine dell'arco, può calcolarsi il valore di A, che è

$$2\, A \cong \left(\frac{d\rho}{\rho} \right)_0 + \left(\frac{d\rho}{\rho} \right)_1 + q\, (N_0 + N_1)$$

dove

$$q = \frac{d\, \theta}{\text{arc } 10'} \qquad N = tg\, \theta \text{ arc } 10'$$

quindi, passando dai differenziali alle differenze finite:

$$\frac{2\, \Delta E}{E} = \left(\frac{\Delta \rho}{\rho} \right)_0 + \left(\frac{\Delta \rho}{\rho} \right)_1 + q\, (N_0 + N_1)$$

b) Determinazione di $\frac{\Delta v}{v}$.

Per avere la variazione della velocità ricordiamo che:

$$E = lg_e\, (v \cos \theta)_0 - lg_e\, (v \cos \theta)_1 = \frac{1}{M} \left[lg_{10}\, (v \cos \theta)_0 - lg_{10}\, (v \cos \theta)_1 \right]$$

$$ME = lg_{10}\, (v \cos \theta)_0 - lg_{10}\, (v \cos \theta_1)$$

Differenziando e sostituendo le differenze finite ai differenziali e considerando $\Delta\theta_0 \cong \Delta\theta_1$

$$\Delta E = \frac{\Delta v_0}{v_0} + \frac{\Delta \cos\theta_0}{\cos\theta_0} - \frac{\Delta v_1}{v_1} - \frac{\Delta \cos\theta_1}{\cos\theta_1} =$$

$$= \frac{\Delta v_0}{v_0} - \frac{\Delta v_1}{v_1} + (tg\,\theta_1 - tg\,\theta_0)\,\Delta\theta = \frac{\Delta v_0}{v_0} - \frac{\Delta v_1}{v_1} - (tg\,\theta_0 - tg\,\theta_1)\,\Delta\theta =$$

ma si è visto che

$$N = tg\,\theta \text{ arc } 10'$$

quindi ponendo

$$\Delta N = N_0 - N_1 = (tg\,\theta_0 - tg\,\theta_1) \text{ arc } 10'$$

$$\Delta E = \frac{\Delta v_0}{v_0} - \frac{\Delta v_1}{v_1} - q\,\Delta N$$

da cui si può dedurre $\frac{\Delta v_1}{v_1}$

c) Determinazione delle variazioni nelle x, y, α, s.

Si è trovato che

$$\frac{dx'}{x'} = 2\frac{dv}{v} - \frac{dg}{g}$$

con

$$x' = \frac{dx}{d\theta}$$

quindi

$$\frac{d\frac{dx}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = 2\frac{dv}{v} - \frac{dg}{g}$$

cioè

$$d^2x = \left(2\frac{dv}{v} - \frac{dg}{g}\right)dx$$

Analogamente si ricava

$$d^2y = \left(2\frac{dv}{v} - \frac{dg}{g} + \frac{2\,d\theta}{\operatorname{sen} 2\theta}\right)dy$$

$$d^2s = \left(2\frac{dv}{v} - \frac{dg}{g} + tg\,\theta\,d\theta\right)ds$$

$$d^2s = \left(\frac{dv}{v} - \frac{dg}{g} + tg\,\theta\,d\theta\right)dt$$

Integrando fra l'origine e la fine dell'arco ed applicando il teorema delle medie si ottengono i valori cercati per i quali, sostituendo le differenze finite ai differenziali, si hanno i valori $\Delta_{(\Delta x)}$, $\Delta_{(\Delta y)}$, $\Delta_{(\Delta t)}$, dove $\Delta x = x_1 - x_0$; $\Delta y = y_1 - y_0$; $\Delta t = t_1 - t_0$ essendo, $x_0\ y_0\ t_0$ e $x_1\ y_1\ t_1$ rispettivamente le coordinate e i tempi relativi all'inizio ed alla fine dell'arco.

Per $\Delta_{(\Delta y)}$, la quantità da integrare diventa infinita quando una delle estremità dell'arco è il vertice della traiettoria; però, anche in questo caso, l'integrale non è infinito poichè basta sostituire a dy la quantità $dx\, tg\, \theta$ nel qual caso si ottiene:

$$d^2 y = \left[2 \frac{dv}{v} - \frac{dg}{g} \right] dy + \frac{d\,\theta}{\cos^2 \theta}\, d\,x$$

L'integrazione approssimata delle formule suddette fornisce quindi:

$$\left.\begin{aligned} \Delta_{(\Delta x)} &= [2\,\Phi - G]\,\Delta\,x \\ \Delta_{(\Delta y)} &= [2\,\Phi - G]\,\Delta\,y + q\,L_m\,\Delta\,x \\ \Delta_{(\Delta s)} &= [2\,\Phi - G + q\,N_m]\,\Delta\,s \\ \Delta_{(\Delta t)} &= [\Phi - G + q\,N_m]\,\Delta\,t \end{aligned}\right\} \qquad [2]$$

avendo posto:

$$\Phi = \frac{1}{2}\left[\frac{\Delta\,i_0}{i_0} + \frac{\Delta\,v_1}{v_1}\right] \qquad N_m = \frac{N_0 + N_1}{2}$$

$$G = \frac{1}{2}\left[\frac{\Delta\,g_0}{g_0} + \frac{\Delta\,g_1}{g_1}\right] \qquad L_m = \frac{L_0 + L_1}{2}$$

$$L = \frac{\text{arc } 10'}{\cos^2\theta}$$

d) Determinazione di $\dfrac{\Delta g}{g}$ e $\dfrac{\Delta \rho}{\rho}$.

Conoscendo le perturbazioni di cui si cercano gli effetti si scomporranno, come si è detto prima, in perturbazioni assolute verticali $\Delta\, g$ e tangenziali $\Delta\, f\,(v) = \Delta\,(g\,\rho)$ per cui si avranno le perturbazioni relative:

$$\frac{\Delta\,g}{g} \quad \text{e} \quad \frac{\Delta\,f\,(v)}{f\,(v)} = \frac{\Delta\,\rho}{\rho} + \frac{\Delta\,g}{g}$$

Però le variazioni $\Delta\,v$ e $\Delta\,y$ dell'arco danno luogo ad ulteriori variazioni sul valore di ρ definito da

$$f\,(v) = \rho\,g = \frac{\delta_y\,i}{C}\,F\,(v) = \frac{e^{-\alpha y}\,i}{C}\,F\,(v)$$

per cui

$$\frac{\Delta\,\rho}{\rho} = \frac{F'\,(v)}{F\,(v)}\,\Delta\,v - \alpha\,dy = v\,\frac{F'\,(v)}{F\,(v)}\,\frac{\Delta\,v}{v} - \alpha\,\Delta\,y$$

$$\frac{\Delta\,\rho}{\rho} = n\,\frac{\Delta\,v}{v} - \alpha\,\Delta\,y \qquad [3]$$

Quindi, se nella formula ora trovata si sostituiscono a $\dfrac{\Delta\,v}{v}$ e $\Delta\,y$ i valori ricavati dal calcolo delle variazioni di 1ª approssimazione, è possibile determinare $\dfrac{\Delta\,\rho}{\rho}$.

e) Calcolo diretto di $\frac{\Delta v}{v}$.

Se teniamo conto delle perturbazioni secondarie, (sopradette), e poniamo per le sole perturbazioni principali (determinanti)

$$2 D = \left(\frac{\Delta \rho}{\rho}\right)_0 + \left(\frac{\Delta \rho}{\rho}\right)_1$$

l'equazione già trovata in precedenza

$$2 \frac{\Delta E}{E} = \left(\frac{\Delta \rho}{\rho}\right)_0 + \left(\frac{\Delta \rho}{\rho}\right)_1 + q (N_0 + N_1)$$

può scriversi tenendo presente la [3]

$$2 \frac{\Delta E}{E} = 2 D + n_0 \left(\frac{\Delta v}{v}\right)_0 + n_1 \left(\frac{\Delta v}{v}\right)_1 - \alpha (\Delta y_0 + \Delta y_1) + 2 q N_m$$

D'altra parte si è trovato

$$\frac{\Delta E}{M} = \left(\frac{\Delta v}{v}\right)_0 - \left(\frac{\Delta v}{v}\right)_1 - q \Delta N$$

per cui eliminando ΔE tra queste due equazioni:

$$2 D E + n_0 \left(\frac{\Delta v}{v}\right)_0 E + n_1 \left(\frac{\Delta v}{v}\right)_1 E - \alpha E (\Delta y_0 + \Delta y_1) + 2 E q N_m =$$
$$= 2 \frac{\Delta v_0}{v_0} M - 2 \frac{\Delta v_1}{v_1} M - 2 q M \Delta N$$

$$2 D E + (n_0 E - 2 M) \frac{\Delta v_0}{v_0} + (n_1 E + 2 M) \frac{\Delta v_1}{v_1} + 2 q (E N_m + M \Delta N) -$$
$$- \alpha E (\Delta y_0 + \Delta y_1) = 0$$

Dividendo tutto per E

$$2 D + \left(n_0 - \frac{2 M}{E}\right) \frac{\Delta v_0}{v_0} + \left(n_1 + \frac{2 M}{E}\right) \frac{\Delta v_1}{v_1} + 2 q \left(N_m + \frac{M}{E} \Delta N\right) -$$
$$- \alpha (\Delta y_0 + \Delta y_1) = 0$$

da cui

$$\left(\frac{2 M}{E} - n_0\right) \frac{\Delta v_0}{v_0} - \left(n_1 + \frac{M}{E}\right) \frac{\Delta v_1}{v_1} =$$
$$= 2 D - \alpha (\Delta y_0 + \Delta y_1) + 2 q \left(N_m + \frac{M}{E} \Delta N\right)$$

Posto

$$P_0 = \frac{2 M}{E} - n_0$$

$$Q_1 = \frac{2 M}{E} + n_1$$

si ha

$$P_0 \left(\frac{\Delta v_0}{v_0}\right) - Q_1 \left(\frac{\Delta v_1}{v_1}\right) = 2 D - \alpha \left(\Delta y_0 + \Delta y_1\right) + 2 q \left(N_m + \frac{M}{E} \Delta N\right)$$

Se ora si sostituisce a Δy, il suo valore dedotto dalla

$$\Delta_{(\Delta y)} = (2\,\Phi - G)\,\Delta y - q\,L_m\,\Delta x$$

cioè

$$\Delta y_1 = \Delta y_0 + \Delta_{(\Delta y)}$$

e si pone per $2\,\Phi$ il suo valore

$$2\,\Phi = \frac{\Delta v_0}{v_0} + \frac{\Delta v_1}{v_1}\,;$$

si ottiene una equazione di 1° grado su $\frac{\Delta v_1}{v_1}$ la cui soluzione è immediata.

3 – Formule pratiche per il calcolo corrente.

Poniamo per semplicità:

$$P_0 + \alpha\,\Delta y = P \qquad 2\,D + G\,\alpha\,\Delta y = A$$

$$Q_1 - \alpha\,\Delta y = Q \qquad \frac{2\,M}{E}\,\Delta N - \alpha\,L_m\,\Delta x = B$$

$$- A - q\,(2\,N_m + B)\,C$$

risolvendo la equazione di 1° grado su $\frac{\Delta v}{v}$ si ottiene

$$\frac{\Delta v_1}{v_1} = \frac{P}{Q}\,\frac{\Delta v_0}{v_0} + \frac{2\,\alpha\,\Delta y_0 + C}{Q}$$

Si ha così $\frac{\Delta v_1}{v_1}$ conoscendo $\frac{\Delta v_0}{v_0}$ e Δy_0 dall'inizio dell'arco.

Le altre variazioni si calcolano con le formule [2] dopo avere calcolato $2\,E$.

4 – Correzioni longitudinali per variazioni di pressione e di temperatura.

Il calcolo di una traiettoria per archi viene fatto ammettendo che la densità vari con la formula:

$$\delta = \delta_0\,e^{-hy}$$

con $h = 10^{-4}$

a cui corrispondono le variazioni seguenti per la pressione e temperatura:

$$B = 889{,}6\,e^{-\frac{z}{10^4}} - 139{,}6$$

$$T = 341°6 - 52{,}8\,e^{-\frac{y}{10^4}}$$

Ora una variazione di pressione e di temperatura comporta una variazione nel δ e quindi in $f(v)$ e meglio in

$$\rho = \frac{f(v)}{g}$$

per cui avremo, tenuto conto della presenza di B e T nell'espressione di δ,

$$\left(\frac{\Delta\rho}{\rho}\right)_B = \frac{\Delta B}{B} \quad \text{essendo} \quad \Delta B = B_r - B_t$$

$$\left(\frac{\Delta\rho}{\rho}\right)_T = -\frac{\Delta T}{T} \qquad \Delta T = T_r - T_t$$

Volendosi una buona precisione può essere tenuto conto anche della umidità dell'aria ed in tal caso la temperatura assoluta viene corretta mediante la relazione:

$$T^1 = T\left(1 + \frac{3}{8}\frac{f}{B}\right)$$

essendo $f = s\,F$.

5 – Correzioni longitudinali per l'influenza della temperatura su $F(v)$.

Nella soluzione dei problemi del tiro si assume $F(v)$ tal quale è dato dalla tavola relativa. Studi recenti hanno dimostrato che la funzione $F(v)$ varia, anche con la temperatura.

Se si indica con $T_0 = 288$, la temperatura assoluta media alla quale si ritiene siano state calcolate le tabelle di $F(v)$, e con T la temperatura assoluta dei vari strati dell'atmosfera attraversati dal proietto, si è trovato

$$\frac{\Delta F}{F} = \frac{\Delta T}{T}\left(1 - \frac{n}{2}\right)$$

e questa relazione dà modo di calcolare, per una traiettoria calcolata, le alterazioni dovute all'effetto della temperatura su $F(v)$ con le solite formule generali, tenendo presente che

$$\frac{\Delta g}{\gamma} = 0 \quad \text{e} \quad \Delta\theta = 0$$

e prendendo per T i vari valori dati dalle tabelle che forniscono la variazione della temperatura con la quota.

La variazione di $F(v)$ dà luogo ad una variazione di $f(v)$ e quindi di

$$\frac{f(v)}{g} = \rho$$

per cui

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\Delta T}{T}\left(1 - \frac{n}{2}\right)$$

essendo

$$\Delta T = T - T_0$$

ma giacchè

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = -\frac{\Delta T}{T}$$

sarà in definitiva tenendo conto delle due perturbazioni

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = -\frac{\Delta T}{T} + \frac{\Delta T}{T}\left(1 - \frac{n}{2}\right) = -\frac{n}{2}\frac{\Delta T}{T}$$

6 - Correzioni longitudinali per la velocità-angolo di proiezione e peso del proietto.

Indichiamo con ΔV, $\Delta \varphi$; $\frac{\Delta f(v)}{f(v)} = \frac{\Delta p}{p}$ le variazioni nella velocità iniziale, nell'angolo di proiezione e nel peso del proietto.

Il calcolo delle correzioni per la velocità ed il peso del proietto è riportato ai casi precedenti.

7 - Perturbazioni normali al piano di tiro.

Occorre riferirsi ai tre assi coordinati OX OY OZ (fig. 75).

I primi due sono quelli finora considerati, tuttavia il piano OXY può nel caso più generale, fare un piccolo angolo η_0 col piano verticale che contiene la velocità iniziale V (piano di tiro).

Il terzo asse OZ è perpendicolare ad OX e verso destra quando si guardi nel senso del movimento del proietto.

In queste condizioni, se si indica con ε_1 l'accelerazione perturbatrice secondo OZ, le equazioni del movimento trasversale saranno:

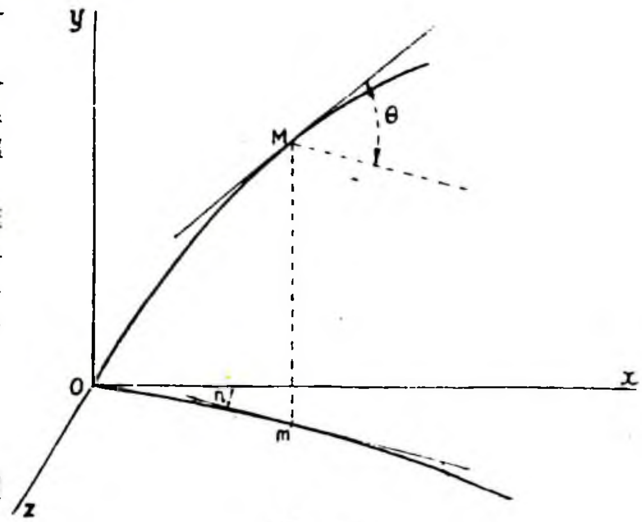


Fig. 75.

$$\left.\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= v\cos\theta \cdot \operatorname{sen}\eta \\ \frac{d^2 z}{d^2 t} &= -\rho g \cos\theta \operatorname{sen}\eta + \varepsilon_1 \end{aligned}\right\} \quad [1]$$

η essendo l'angolo che il piano verticale contenente la tangente nel punto corrente M della traiettoria, forma col piano OXY.

Noi ammettiamo che η sia e resti piccolo, che cioè si tratti veramente di perturbazioni trasversali.

Le equazioni precedenti possono allora scriversi:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \eta \cdot v\cos\theta \\ \frac{d(\eta \cdot v\cos\theta)}{dt} &= \rho g \eta \cos\theta + \varepsilon_1 \end{aligned}\right\} \quad [2]$$

Essendo η_0 il valore iniziale di η si può, nel second'ordine in rapporto alla differenza $(\eta - \eta_0)$, ammettere che i valori dell'angolo θ e della sua proiezione sul piano di tiro siano coincidenti, si ha allora, per le equazioni del movimento principale (componente secondo OX)

$$\frac{d(v\cos\theta)}{dt} = -\rho \cdot g \cdot \cos\theta \quad [3]$$

La seconda equazione del sistema precedente può quindi scriversi, dopo sviluppata la derivata

$$v \cos \theta \frac{d\eta}{dt} = \varepsilon_z$$

oppure:

$$\frac{d\eta}{dt} = + \frac{\varepsilon_z}{u} \qquad [4]$$

essendo $u = v \cos \theta$ (velocità orizzontale)

Integrando la [4] si trova

$$\eta = \eta_0 + \int_0^t \left(\frac{\varepsilon_z}{u} \right) dt \qquad [5]$$

ed applicando il teorema del valor medio

$$\Delta \eta = \left[\left(\frac{\varepsilon_z}{u} \right)_0 + \left(\frac{\varepsilon_z}{u} \right)_1 \right] \frac{\Delta t}{2} = \left\{ \left(\frac{\varepsilon_z}{v \cos \theta} \right)_0 + \left(\frac{\varepsilon_z}{v \cos \theta} \right)_1 \right\} \frac{\Delta t}{2} \qquad [6]$$

Per ricavare la variazione Δz, notando che

$$dz = \eta \cdot u \cdot dt = \eta \cdot dx \qquad [7]$$

e sempre per il teorema della media

$$\Delta z = (\eta_0 + \eta_1) \frac{\Delta x}{2} \qquad [8]$$

Se si vogliono calcolare le variazioni non più arco per arco ma direttamente per un punto qualsiasi $(t_1 \; x_1)$, si porterà nella precedente espressione di dz il valore di η calcolato.

Si trova così

$$dz = \eta_0 \, dx + dx \int_0^t \left(\frac{\varepsilon_z}{u} \right) dt \qquad [9]$$

ed integrando dall'origine fino al punto fissato sarà

$$z_1 = \eta_0 \, x_1 + \int_0^t dx \int \left(\frac{\varepsilon_z}{u} \right) dt \qquad [10]$$

ed integrando per parti si trova

$$z_1 = \eta_0 \, x_1 + x_1 \int_0^{t_1} \left(\frac{\varepsilon_z}{u} \right) dt - \int_0^{t_1} \left(\frac{\varepsilon_z}{u} \right) x \, dt \qquad [11]$$

Questa seconda forma presenta il vantaggio di sostituire ad un integrale doppio due integrali semplici, ciascuno dei quali a sua volta può essere calcolato con il metodo dei trapezi, quando si conosca la legge di variazioni di $\left(\frac{\varepsilon_z}{u} \right)$ e di x lungo tutta la traiettoria.

CAPITOLO XIV

GRADUAZIONE DELLA SPOLETTA

1 - Formula della graduazione.

Sia G la graduazione di spoletta in millimetri o divisioni che in una data traiettoria corrisponde al tempo t, e sia $G + dG$ la graduazione corrispondente al tempo $t + dt$.

Se c è un coefficente dipendente dalla spoletta ed r la velocità di combustione della miccia sarà

$$\frac{dG}{dt} = c\,r$$

Se la velocità di combustione della miccia fosse costante si potrebbe integrare l'equazione trovata e si avrebbe

$$G - G_0 = c r_0 t$$

essendo G_0 la graduazione corrispondente al tempo zero e che è un numero negativo perchè la graduazione 0 fa scoppiare il proietto fuori della *b. d. f.* a causa del tempo impiegato dalla fiammata a propagarsi attraverso i vari foconi.

La formula trovata è impiegabile solo con spolette meccaniche nelle quali r rimane costante.

Ma poichè r varia sarà

$$G - G_0 = \int_0^t c r\,dt$$

E perciò necessario conoscere la legge di variazione della velocità di combustione della miccia.

Le cause che influiscono sulla r sono molteplici ma la più importante è la pressione atmosferica.

Vi influiscono ancora, ma in modo minore, le velocità del proietto, la lunghezza di miccia contenuta, lo stato di conservazione della spoletta ecc. ma per ora supponiamo che r dipenda solo dalla pressione e quindi dalla quota. Da esperienze si è ottenuto

$$r = r_0 - r'y \qquad [1]$$

essendo r_0 il valore di r nell'origine della traiettoria ed r' una quantità praticamente costante.

La formula della graduazione diverrà quindi

$$G - G_0 = \int_0^t c r\,dt = c r_0 t - \int_0^t c r' y\,dt \qquad [2]$$

cioè

$$G - G_0 = c r_0 t - c r' \int_0^t y\,dt$$

Se costruiamo una curva che rappresenta la legge di variazione del tempo con la y otteniamo un diagramma analogo ad una traiettoria il quale però ha il vertice più vicino all'origine che al punto di caduta.

L'area compresa fra l'asse dei tempi la curva e l'ordinata y_s rappresenta per l'appunto

$$\int_0^t y\,dt$$

Disponendo quindi della curva dei tempi si può mediante un integrafo calcolare

$$\int_0^t y\,dt$$

e quindi trovare il valore di G.

Però questo procedimento è alquanto lungo perchè per costruire la curva dei tempi è richiesto un tempo notevole e poichè il termine

$$cr' \int y\,dt$$

è assai piccolo, perchè r' è molto piccolo, si fa più presto sostituendo all'integrale una formula approssimata che permette il calcolo della graduazione.

Se quindi il punto di scoppio è prossimo all'orizzonte, l'area rappresentata da

$$\int y\,dt$$

differisce di poco da quella racchiusa tra l'asse dei tempi l'ordinata y_s ed un arco di parabola con l'asse parallelo all'asse delle y, passante per l'origine, per il punto di scoppio e d'altezza uguale all'altezza massima della traiettoria (fig. 76).

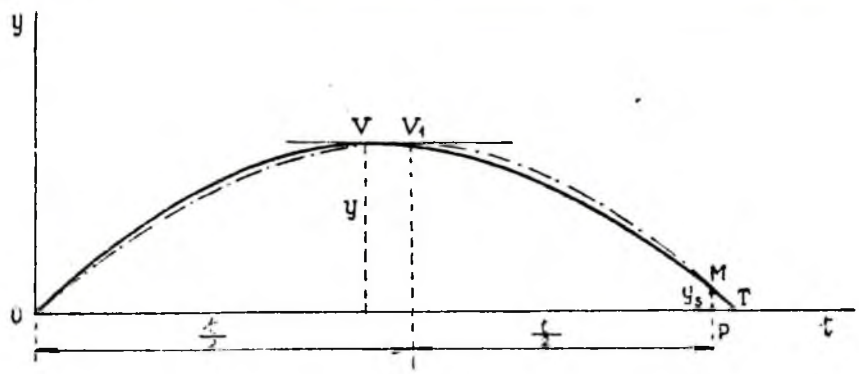


FIG. 76.

In tale ipotesi applicando la formula di Simpson

$$\int_a^b y\,dx = \frac{b-a}{6}\,(y_0 + 4\,y_1 + y_2)$$

poichè

$$y_0 = 0; \qquad y_1 = Y; \qquad y_2 = y_s$$

sarà

$$\int_0^t y\,dt = \frac{t}{6}\,(4\,Y + y_s)$$ [3]

per cui la graduazione sarà

$$G - G_0 = cr_0\,t - cr'\,\frac{t}{6}\,(4\,Y + y_s)$$

cioè

$$G - G_0 = cr_0\,t\left(1 - \frac{r'}{r_0}\,\frac{4\,Y + y_s}{6}\right)$$ [4]

con la quale si può calcolare la graduazione in funzione di tutti gli elementi noti.

Se lo scoppio deve avvenire in un punto molto lontano dall'orizzonte la formula trovata non è più applicabile e, se non è possibile dedurre il valore di

$$\int y\,dt$$

mediante una integrazione grafica si può ricorrere al metodo seguente:

Si sostituiscano alla curva delle durate due archi di parabola con asse parallelo ad Y aventi entrambi il vertice comune con quello della curva e passanti l'uno per l'origine e l'altro per il punto di scoppio (fig. 77).

La Y e la y_s sono le ordinate del vertice e del punto di scoppio cui corrispondono i tempi t_v e t_s e posto

$$t_d = t_s - t_v$$

l'integrale

$$\int_0^{t_s} y\,dt$$

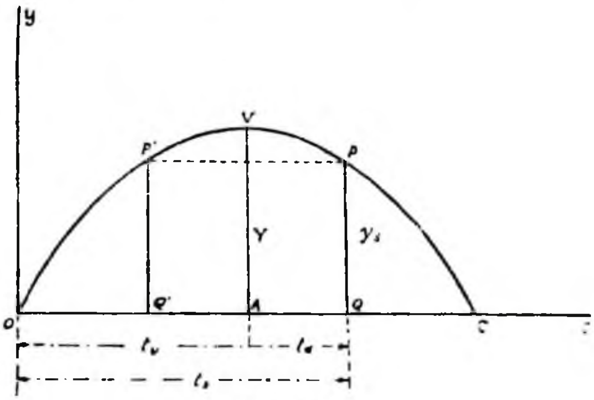


FIG. 77.

è rappresentato dall'area $OVPQ$ la quale si scinde in 2 parti OVA e $VPQA$.

Poichè l'area di un segmento parabolico è 2/3 il prodotto della base per l'altezza sarà

$$OVA = \frac{2}{3}\,Yt_v; \qquad VPQA = y_s\,t_d + \frac{2}{3}\,t_d\,(Y - y_s)$$

onde

$$\int_0^{t_s} y\,dt = \frac{2}{3}\,Yt_v + t_d\,\frac{2\,Y + y_s}{3} = \frac{2}{3}\,Yt_s + \frac{1}{3}\,y_s\,(t_s - t_v) =$$

$$= \frac{1}{3}\,t_s\left[2\,Y + y_s\left(1 - \frac{t_v}{t_s}\right)\right]$$ [5]

Se fosse $\varphi < 0$ le formule precedenti non sarebbero applicabili. In questo caso si sostituisce al diagramma dei tempi un arco di parabola col vertice in O e passante per il punto di scoppio.

Allora l'area

$$\int y\, dl = \bar{y}_s\, t_s - \frac{2}{3}\, \bar{y}_s\, t_s = \frac{1}{3}\, \bar{y}_s\, t_s$$

e la formula della graduazione risulterà

$$G - G_0 = c r_0\, t \left(1 - \frac{r'}{r_c}\, \frac{\bar{y}_s}{3} \right)$$

a) Applicazione

Cannone da 152/50

$V = 540$ $X = 10.000$ $y_s = 6^{oo}$ $t_s = 32{,}3$ $Y = 1367$ $B = 700$ m/m

Spoletta mod. 99.

Determinare la graduazione della spoletta.

$$G - G_0 = c r_0\, t \left(1 - \frac{r'}{r_0}\, \frac{4\,Y + y_s}{6} \right)$$

$$G_0 = -\,0{,}7$$

Per $B = 700$; $r_0 = 9{,}394$; $r' = 0{,}00072$

$\frac{4\,Y + y_s}{6}$	$= 921$	$4\,Y$	$= 5468$	$lg\,(1 - [\cdots])$	$= \bar{1},96820$
$lg\,[\quad]$	$= 2{,}96426$	y_s	$= 60$	$lg\,c$	$= \bar{1},99344$
$lg\,r'$	$= \bar{4},85733$	$4\,Y + y_s$	$= 5528$	$lg\,r_0$	$= 0{,}90285$
$\mathrm{colg}\,r_0$	$= \bar{1},02715$	$\frac{r'}{r_0}\,\frac{4\,Y + y_s}{6}$	$= 0{,}0706$	$lg\,t$	$= 1{,}50920$
$lg\,\frac{r'}{r_0}\,\frac{4\,Y + y_s}{6}$	$= \bar{2},84874$	$1 - [\cdots\cdots]$	$= 0{,}9294$	$lg\,G - G_0$	$= 2{,}44369$
				$G - G_0$	$= 277{,}8$
				G	$= 277{,}1$

2 – Formula ridotta.

Delle quantità che entrano nella formula della graduazione t, Y, ed y_s sono date oppure si calcolano con le formule che abbiamo visto precedentemente.

G_0 è sempre negativo ed è dato da una apposita tavola per le spolette in servizio

$G_0 = -\,0{,}7$ div. per le spolette Mod. 99
$G_0 = -\,1{,}3$ millim. » » da 65 Mont
$G_0 = -\,1{,}4$ » » » Mod. 06
$G_0 = -\,1{,}5$ » » » da 149 A camp.

Per le moderne spolette mod. 36 e mod. 32 si ha:

Spoletta mod. 36 $\begin{cases} c = 0{,}479 \\ G_0 = -\,2 \end{cases}$

Spoletta mod. 32 $\begin{cases} c = 1{,}223 \\ G_0 = -\,20 \end{cases}$

Teoricamente, il valore c è dato dalla tav. XXI ed è stato dedotto dal disegno della spoletta; però, per un calcolo di G tale valore non serve perchè in c congloberemo tutte le cause di variazione della velocità di combustione della miccia:

quindi c viene ad assumere le stesse caratteristiche del β del 1° problema del tiro e si deduce sperimentalmente eseguendo un tiro, misurando G e quindi ricavando c dalla formula

$$G - G_0 = cr_0 t \left(1 - \frac{r'}{r_0} \frac{4Y + y_s}{6}\right)$$

in cui tutto è noto ad eccezione di c.

I valori di r_0 e di r' sono contenuti nella tav. XXI: r' è leggermente variabile ma non è difficile dedurne un valore medio tra l'origine ed il vertice della traiettoria.

Il valore di $\frac{r'}{r_0}$ è sempre tanto piccolo per quanto sia grande la Y quindi il termine

$$\frac{r'}{r_0} \frac{4Y + y_s}{6}$$

è assai piccolo. Perciò non è necessaria una approssimazione molto grande nei valori di Y di y_s e di r'.

Ancora y_s è generalmente piccolo rispetto a 4 Y e quindi lo si può trascurare mentre per Y si può adottare la formula del vuoto

$$Y = \frac{1}{8} X (tg\,\varphi + tg\,\omega)$$

essendo X la gittata, φ ed ω gli angoli di proiezione e di caduta.

Inoltre per tener conto dell'errore commesso nel trascurare y_s si può porre

$$tg\,\varphi = tg\,\omega$$

e quindi

$$Y = \frac{1}{4} X\,tg\,\omega$$

per cui la formula della graduazione diverrà

$$G - G_0 = cr_0 t \left(1 - \frac{r'}{r_0} \frac{X\,tg\,\omega}{6}\right) \qquad [6]$$

a) Applicazione

$X = 10.000$; $\omega = 30° 54'$; $t = 32,3$; $B = 700$ m/m; $c = 0,985$; $r_0 = 9,394$; $r' = 0,00072$

$lg \frac{r'}{r_0}$	$= \bar{5},88448$	$lg\,cr_0 t$	$= 2,47549$
colg 6	$= \bar{1},22185$	$lg\,(1 - [\ldots])$	$= \bar{1},96544$
$lg\,X$	$= 4,$———	$lg\,G - G_0$	$= 2,44093$
$lg\,tg\,\omega$	$= \bar{1},77710$	G	$= 275,3$

$$lg \frac{1}{6} \frac{r'}{r_0} X\,tg\,\omega = \bar{2},88343$$

$$\frac{1}{6} \frac{r'}{r_0} X\,tg\,\omega = 0,0765$$

$$1 - [\cdots\cdots] = 0,9235$$

3 - Influenze delle cause secondarie.

Il movimento del proietto influisce sulla combustione delle miccie per spolette. Da esperienze fatte con granate a pallette da 149 *G* munite di spolette d'assedio mod. 1886 (che era la stessa spoletta mod. 1899 a tre giri di miccia) e lanciati dal cannone, dall'obice e dal mortaio dello stesso calibro risultò:

1° che aumentando la velocità di traslazione del proietto, aumenta la velocità di combustione della miccia, e che l'aumento è sensibile, quando la velocità media di traslazione supera i 200 m.

2° che forse la rotazione del proietto fa diminuire la velocità di combustione, tanto da neutralizzare l'acceleramento dovuto alla velocità di traslazione quando il passo delle righe scende a soli 15 calibri;

3° che quando il passo delle righe è di 55 calibri (cannone da 149 *G*) il secondo membro della formula della graduazione deve essere moltiplicato per

$$K_1 = 1 + 5{,}5\left(\frac{V+U}{2000}\right)^4$$

V ed U essendo rispettivamente la velocità iniziale e la velocità di caduta.

Dalle stesse esperienze risultò che la velocità di combustione delle miccie per spolette mod. 1886, che corrisponde alla durata di combustione t, si ottiene moltiplicando il valore di r, dato dalla tav. XXI, per

$$K_2 = 1{,}010 - \frac{0{,}3362}{t + 1{,}94}$$

Quindi se si vuol calcolare la graduazione della spoletta mod. 1886 o mod. 1899 tenendo conto della variabilità della velocità di combustione col variare della graduazione della spoletta e della velocità del proietto, si dovrà moltiplicare il secondo membro della [4] per $K_1\,K_2$. Questi due fattori sono poco diversi da 1; il primo K ne è maggiore, il secondo ne è minore, e si approssimano insieme alla unità col crescere della distanza.

Risultato analogo si otterrebbe molto probabilmente sperimentando con altre bocche da fuoco. Quindi si può ritenere che la formula [4] dia risultati prossimi ai veri, sebbene essa formula sia stata ricavata con ipotesi non conformi alla realtà.

Vi sono altre cause che fanno variare la velocità di combustione delle miccie.

D'estate le miccie abbruciano un po' più rapidamente che d'inverno, ma l'effetto della temperatura dell'aria è piccolissimo. La mistura di cui è formata la miccia si altera col tempo, per cui, coll'invecchiare della spoletta, la velocità di combustione della miccia va diminuendo fino ad un limite che raggiunge dopo alcuni anni.

4 - Variazioni della graduazione della spoletta.

La variazione è funzione dei parametri della traiettoria e di r_0 ossia della velocità di combustione della miccia.

Le piccole variazioni di G si possono determinare con un procedimento analogo a quello seguito per determinare le variazioni di x e di t.

Si noti però che la quantità

$$c\left(1 - \frac{r'}{r_0}\,\frac{4\,Y + y_s}{6}\right)$$

varia assai poco in modo che si può ritenere costante e trascurabile.

Si presentano quindi 2 problemi:

5 - Problema I.

Trovare la variazione ΔG della graduazione che corrisponde ad una variazione Δy dell'ordinata del punto di scoppio senza variare la traiettoria.

In questo caso, poichè la traiettoria non varia, resterà tutto costante ad eccezione della durata di scoppio. Essendo:

$$\frac{\Delta G}{G - G_0} = \frac{\Delta r_0}{r_0} + \frac{\Delta t}{t}$$

e

$$\Delta r_0 = 0$$

sarà

$$\frac{\Delta G}{G - G_0} = \frac{\Delta t}{t}$$

Si tratta perciò di determinare Δt in funzione di Δy, tutto il resto restando costante. In tale ipotesi sappiamo che

$$\frac{dy}{dt} = v \operatorname{sen} \theta$$

cioè

$$\frac{\Delta t}{t} = \frac{\Delta y}{v t \operatorname{sen} \theta}$$

ove v e θ sono riferite al punto di scoppio, e quindi incognite. Per calcolarle in funzione degli elementi U, ω e T del punto di caduta, sostituiamo all'arco di traiettoria compreso fra punto di scoppio e punto di caduta un arco di parabola. In tal caso, per una nota proprietà del moto parabolico, il tempo che il proietto impiega ad andare dal punto di scoppio a quello di caduta è uguale a quello che impiegherebbe a cadere liberamente lungo la verticale, quindi se y_s è l'ordinata del punto di scoppio ed $U \operatorname{sen} \omega$ la componente verticale della velocità sarà:

$$t = \frac{y_s}{U \operatorname{sen} \omega}$$

e quindi

$$t_s = T - \frac{y_s}{U \operatorname{sen} \omega}$$

Dobbiamo ora calcolare $v \operatorname{sen} \theta$

Notiamo che

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d\,(v \operatorname{sen} \theta)}{dt} = -g$$

integrando tra il punto di caduta considerato come origine ed il punto di scoppio

$$v \operatorname{sen} \theta - U \operatorname{sen} \omega = -gt$$

cioè

$$v \operatorname{sen} \theta = U \operatorname{sen} \omega - \frac{g y_s}{U \operatorname{sen} \omega}$$

quindi

$$\frac{\Delta G}{G - G_0} = \frac{\Delta y_s}{vt \operatorname{sen} \theta}$$

con

$$t = T - \frac{y_s}{U \operatorname{sen} \omega}\,; \qquad v \operatorname{sen} \theta = U \operatorname{sen} \omega - \frac{g y_s}{U \operatorname{sen} \omega}$$

Le tavole di tiro contengono in una colonna le variazioni d'altezza di scoppio dovute ad una variazione di graduazione.

Tale dato è calcolato mediante la formula sopra esposta cioè

$$\Delta y_s = \frac{\Delta G}{G - G_0}\, V t \operatorname{sen} \theta$$

a) Applicazione.

Cannone da 149/35 - Granata a pallette.
Spoletta Mod. 99 - $X = 7000$ $G = 210$ $G_0 = -0{,}7$ $y = 42$.
Determinare ΔG per $\Delta y_s = 18$ m. $U = 263$ $T = 24{,}7$ $\omega = 26°20'$

$lg\, y_s = 1{,}62325$
colg $U = \bar{3}{,}58004$
colg sen $\omega = 0{,}35302$
$lg \frac{y_s}{U \operatorname{sen} \omega} = \bar{1}{,}55631$
$G - G_0 = 210{,}7$
$lg\,(G - G_0) = 2{,}32366$
$lg\, \Delta y_s = 1{,}25527$
colg vt sen $\theta = \bar{4}{,}56006$
$lg\, \Delta G = 0{,}13899$
$\Delta G = 1{,}4$

$T = 24{,}7$
$\frac{y_s}{U \operatorname{sen} \omega} = 0{,}36$
$t_s = 24''\,34$

$lg\, U$ sen $\omega = 2{,}06694$
U sen $\omega = 116{,}67$
$\frac{g y_s}{U \operatorname{sen} \omega} = 3{,}53$
v sen $\theta = 113{,}14$
$lg\, v$ sen $\theta = 2{,}05362$
$lg\, t_s = 1{,}38632$
$lg\, vt$ sen $\theta = 3{,}43994$

6 - Problema II.

Trovare la variazione della graduazione ΔG corrispondente alla variazione dell'altitudine dell'origine della traiettoria, supposto che y_s, V e φ siano costanti.

In questo caso r_0 è funzione della quota dell'origine, e inoltre, variando B, variano C' e il tempo.

Supposto sempre che

$$\left(1 - \frac{r'}{r_0} y_m\right)$$

resti invariato perchè molto prossimo ad uno sarà:

$$\frac{\Delta G}{G - G_0} = \frac{\Delta r_0}{r_0} + \frac{\Delta t}{t}$$

$\frac{\Delta r_0}{r_0}$ si calcola molto rapidamente e facilmente coi dati della tavola XXI perchè

$$\frac{\Delta r_0}{r_0} = \frac{r_h - r_0}{r_0}$$

Per $\frac{\Delta t}{t}$ invece consideriamo che variando C' varia x e quindi

$$\frac{\Delta t}{t} = f_{tx} \frac{\Delta x}{x} - f_{tC'} \frac{\Delta C'}{C'}$$

Esprimiamo $\frac{\Delta x}{x}$ in funzione di $\Delta C'$: se y è costante, $\Delta y = 0$ quindi la formula generale delle variazioni:

$$\frac{\Delta y - \Delta x \, tg\,\theta}{y - x \, tg\,\theta} = f_\varphi A_\varepsilon \Delta_\varphi + f_{C'} \frac{\Delta C'}{C'} + f_V \frac{\Delta V}{V}$$

diverrà

$$- \frac{\Delta x \, tg\,\theta}{y - x \, tg\,\theta} = f_{C'} \frac{\Delta C'}{C'}$$

cioè

$$- \frac{\Delta x}{x} \frac{tg\,\theta}{tg\,\varepsilon - tg\,\theta} = f_{C'} \frac{\Delta' C'}{C'}$$

ossia

$$\frac{\Delta x}{x} = - \frac{tg\,\varepsilon - tg\,\theta}{tg\,\theta} f_{C'} \frac{\Delta C'}{C'}$$

e quindi

$$\frac{\Delta t}{t} = \left(- f_{tx} \frac{tg\,\varepsilon - tg\,\theta}{tg\,\theta} f_{C'} - f_{tt} + 1 \right) \frac{\Delta C'}{C'}$$

$$= - \left[f_{tx} \left(\frac{tg\,\varepsilon - tg\,\theta}{tg\,\theta} f_{C'} + 1 \right) - 1 \right] \frac{\Delta C'}{C'}$$

ma

$$f_{C'} = 1 - \frac{tg\,\varphi - tg\,\varepsilon}{tg\,\varepsilon - tg\,\theta} = \frac{2\,tg\,\varepsilon - tg\,\varphi - tg\,\theta}{tg\,\varepsilon - tg\,\theta}$$

quindi

$$\frac{\Delta t}{t} = -\left\{ f_{tx}\left(\frac{2\,tg\,\varepsilon - tg\,\varphi - tg\,\theta}{tg\,\theta} + 1\right) - 1 \right\} \frac{\Delta C'}{C'}$$

$$\frac{\Delta t}{t} = -\left[f_{tx}\,\frac{2\,tg\,\varepsilon - tg\,\varphi}{tg\,\theta} - 1\right] \frac{\Delta C'}{C'}$$

ma essendo $f_{tx} = \frac{x}{vt\cos\theta}$ si avrà:

$$\frac{\Delta t}{t} = \left\{ 1 - \frac{x}{vt\cos\theta}\,\frac{2\,tg\,\varepsilon - tg\,\varphi}{tg\,\theta} \right\} \frac{\Delta C'}{C'} = \left\{ 1 - \frac{x}{vt\,\mathrm{sen}\,\theta}\,(2\,tg\,\varepsilon - tg\,\varphi) \right\} \frac{\Delta C'}{C'}$$

Passando da una località all'altra, la variazione di C' è dovuta esclusivamente ad una variazione di δ quindi

$$\frac{\Delta C'}{C'} = -\frac{\delta_o - \delta_h}{\delta_o}$$

per cui

$$\frac{\Delta G}{G - G_o} = -\frac{r_o - r_h}{r_o} + \frac{\delta_o - \delta_h}{\delta_o}\left| 1 - \frac{x}{vt\,\mathrm{sen}\,\theta}\,(2\,tg\,\varepsilon - tg\,\varphi) \right|$$

In questa formula t, v, θ vengono calcolati col metodo indicato per il problema 1° cioè

$$t = T - \frac{y_s}{U\,\mathrm{sen}\,\omega}$$

$$v\,\mathrm{sen}\,(-\theta) = U\,\mathrm{sen}\,\omega - \frac{g y_s}{U\,\mathrm{sen}\,\omega}$$

Volendo evitare quest'ultima parte del calcolo, se y_s è piccolo si può porre, invece degli elementi del punto d'arrivo di ascissa x, quelli del punto di caduta avente $X = x$ quindi sarà

$$\frac{\Delta G}{G - G_o} = \frac{\Delta r_o}{r_o} - \left| 1 - \frac{x\,tg\,\varphi_x}{T_x\,U_x\,\mathrm{sen}\,\omega_a} \right| \frac{\Delta\delta}{\delta}$$

a) Applicazione

Cannone da 149/35 - Granata a pallette.
Spoletta mod. 99 $V = 406$ $X = 8500$ $\varphi = 28°52'$ $x_s = 8431$ $y_s = 55$
$\omega = 36°51'$ $U = 261$ $t = 33{,}1$ $B = 675$ $G = 287$

$$\frac{\Delta G}{G - G_o} = -\frac{r_o - r_h}{r_o} + \frac{\delta - \delta_u}{\delta}\left| 1 - \frac{x}{vt\,\mathrm{sen}\,\theta}\,(2\,tg\,\varepsilon - tg\,\varphi) \right|$$

$$v\,\mathrm{sen}\,(-\theta) = U\,\mathrm{sen}\,\omega - \frac{g y_s}{U\,\mathrm{sen}\,\omega} \qquad t_s = T - \frac{y_s}{U\,\mathrm{sen}\,\omega}$$

Determinare il coefficente C_g corrispondente a $\Delta B = 10$ mm. $r_0 = 9{,}170$
$r_k - r_0 = 0{,}086$

$lg\, U$	$= 2{,}41664$
lg sen ω	$= 1{,}77795$
$lg\, U$ sen ω	$= 2{,}19459$
$lg\, y$	$= 1{,}74036$
colg x	$= 4{,}07412$
$lg\, tg\, \varepsilon$	$= 3{,}81448$
$tg\, \varepsilon$	$= 0{,}0065$
$2\, tg\, \varepsilon$	$= 0{,}0130$
$tg\, \varphi$	$= 0{,}5513$
$2\, tg\, \varepsilon - tg\, \varphi$	$= 0{,}5383$

$lg\, g$	$= 0{,}99145$
$lg\, y_s$	$= 1{,}74036$
colg U sen ω	$= 3{,}80541$
$lg \dfrac{g y_s}{U \text{ sen } \omega}$	$= 0{,}53722$
$lg \dfrac{y_s}{U \text{ sen } \omega}$	$= 1{,}54577$
$lg\, x$	$= 3{,}92588$
colg v sen θ	$= 3{,}81531$
colg t	$= 2{,}48479$
$lg\, (2\, tg\, \varepsilon - tg\, \varphi)$	$= 1{,}73102$
$lg\, [\cdots\cdots]$	$= 1{,}95700$
N°	$= 0{,}9057$
1 — N°	$= 0{,}0943$

U sen ω	$= 156{,}5$
$\dfrac{g y_s}{U \text{ sen } \omega}$	$= 3{,}5$
v sen θ	$= 153{,}0$
T	$= 33{,}10$
$\dfrac{y_s}{U \text{ sen } \omega}$	$= 0{,}35$
t_s	$= 32{,}75$

$lg \dfrac{\Delta B}{B}$	$= 2{,}17070$
$lg\, (1 - N^\circ)$	$= 2{,}97451$
$lg \left[\dfrac{\Delta B}{B}\left(1 - \dfrac{x}{vt \text{ sen } \theta}\,(2\, tg\, \varepsilon - tg\, \varphi)\right)\right]$	$= 3{,}14521$
$H\, [\cdots\cdots\cdots]$	$= -0{,}0014$
$\dfrac{r_0 - r_k}{r_0}$	$= 0{,}0094$
$\dfrac{\Delta G}{G - G_0}$	$= 0{,}0080$
$C\, g$	$= 2{,}30$

CAPITOLO XV

EFFETTI DEI PROIETTI

1 – Penetrazione nei mezzi solidi.

Un corpo che venga spinto da una forza continua in un mezzo solido omogeneo e sufficientemente esteso da potersi considerare come indefinito non ha altra resistenza da vincere che quella offertagli dalla coesione delle molecole costrette a separarsi.

Questa resistenza varia con la sezione e la forma del corpo ma se la velocità non è grande la si può ritenere indipendente dalla velocità.

Quando però la velocità sia forte, come si verifica nel caso dei proietti, la resistenza non può più considerarsi indipendente dalla velocità perchè, oltre a vincere la coesione delle particelle al proietto viene sottratta energia che viene trasmessa alle particelle del mezzo; ciò è dimostrato dal fatto che il foro non è cilindrico ma è tronco conico.

Per lo studio della penetrazione dei proietti faremo varie ipotesi e cioè supporremo che:

1) al momento dell'urto e durante il moto nel mezzo l'asse del proietto coincida con la direzione della velocità, in altri termini che la resistenza sia diretta;

2) la superficie del solido sia urtata normalmente;

3) il mezzo abbia estensione infinita.

Nello studio viene trascurato il peso perchè molto piccolo rispetto alle altre forze in gioco.

Da esperienze eseguite risulta che la resistenza che un proietto incontra a penetrare in un mezzo solido si può rappresentare con due termini ambedue proporzionali alla sezione retta del proietto S ed al coefficente di forma, dei quali uno, costante, è dovuto alla coesione ed all'attrito e l'altro, proporzionale al quadrato della velocità è dovuto alla forza viva ceduta dal proietto alle particelle solide.

In tal caso può scriversi:

$$\rho = S\, i\, \alpha\, (1 + \beta\, v^2)$$

ove α e β sono coefficenti dipendenti dal mezzo.

A noi però non interessa la resistenza totale ma la resistenza per unità di massa (ritardazione), che si ottiene dividendo ρ per la massa m, quindi

$$\frac{\rho}{m} = \frac{\rho}{\frac{p}{g}} = \frac{g\,\rho}{p} = -\frac{g\,S\,i}{p}\,\alpha\,(1 + \beta\, v^2)$$

ma

$$\frac{\rho}{m} = \frac{dv}{dt} \qquad S = \frac{\pi\, a^2}{4}$$

quindi

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{g}{p}\,\frac{\pi a^2}{4}\,i\,\alpha\,(1+\beta v^2) = \frac{g\,\pi}{4\cdot 1000}\,\frac{1000\,a^2}{p}\,i\,\alpha\,(1+\beta v^2)$$

Conglobando tutte le costanti in α sarà

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\alpha\,i}{C}\,(1+\beta v^2) \qquad [1]$$

che rappresenta la equazione del moto del proietto in un mezzo solido.

2 – Formula della penetrazione.

Chiamando con x la penetrazione alla fine del tempo t poichè

$$v = \frac{dx}{dt}$$

sarà

$$dx = v\,dt$$

ricavando $d\,t$ dalla formula trovata precedentemente e sostituendo:

$$dx = -\frac{C\,v\,dv}{\alpha\,i\,(1+\beta v^2)}$$

che integrata fra l'origine ed un punto generico dà la penetrazione

$$\int_0^x dx = -\frac{C}{\alpha\,i}\int_V^v \frac{v\,dv}{1+\beta v^2} = -\frac{C}{2\,\alpha\,i\,\beta}\int_U^v \frac{2\,\beta\,v\,dv}{1+\beta v^2}$$

dove U indica la velocità del proietto al momento del suo ingresso nel mezzo solido; quindi

$$x = \frac{C}{2\,\alpha\,i\,\beta}\,lg_e\,\frac{1+\beta U^2}{1+\beta v^2}$$

La penetrazione totale si avrà per $v = 0$ quindi

$$X = \frac{C}{2\,\alpha\,i\,\beta}\,lg_e\,(1+\beta U^2)$$

Volendo passare dai lg in base e a quelli decimali:

$$X = \frac{C\,2,30258}{2\,\alpha\,i\,\beta}\,lg_{10}\,(1+\beta U^2)$$

e posto

$$\gamma = \frac{2,30258}{2\,\alpha\,\beta}$$

$$X = \frac{C\,\gamma}{i}\,lg_{10}\,(1+\beta U^2)$$

3 - Determinazione dei coefficienti.

I coefficenti β e γ dipendenti dalla natura del mezzo si determinano sperimentalmente misurando le penetrazioni X_1 ed X_2 ottenute in uno stesso mezzo con uno stesso proietto e con velocità U_1 e U_2. Si avrà allora:

$$X_1 = \frac{C\gamma}{i}\, lg_{10}(1 + \beta U_1^2)$$

$$X_2 = \frac{C\gamma}{i}\, lg_{10}(1 + \beta U_2^2)$$

da cui

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{lg_{10}(1 + \beta U_1^2)}{lg_{10}(1 + \beta U_2^2)}$$

dalla quale si ricaverà β; e questa sostituita in una delle relazioni di X_1 ed X_2 ci permetterà di ricavare anche γ.

In questo modo sono stati ricavati i valori di γ e di β per differenti mezzi ripartiti nella tav. XXII, usando proietti sferici per i quali $i = 2$.

Coi proietti oblunghi sono state fatte poche esperienze dalle quali si può dedurre che la penetrazione si può calcolare con le stesse formule e coefficenti del proietto sferico quando si ponga anche per essi $i = 1$.

4 - Formula pratica della penetrazione.

Il coefficiente β ha il valore di $0.0^4 15$ per tutte le murature e $0,0^4 20$ per tutte le qualità di legno, per le terre β varia da $0,0^4 35$ a $0,0^3 20$.

Ora se il mezzo resistente non è uno di quelli contemplati nella tav. XXII occorre determinare γ e β con un metodo lungo e sproporzionato allo scopo, per cui non si commette un sensibile errore adottando $\beta = 0,0^4 5$ per tutte le terre.

In tal caso la formula della penetrazione diventa:

$$X = \frac{C\gamma'}{i}\, lg_{10}(1 + \beta U^2)$$

ponendo $i = 1$, e $\beta = 0,0^4 5 = \frac{1}{2 \cdot 100^2}$ si ha

$$X = C\gamma'\, lg_{10}\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{U}{100}\right)^2\right] = C\gamma' A \qquad [3]$$

essendo

$$A = lg_{10}\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{U}{100}\right)^2\right]$$

tali valori di A sono contenuti nella tav. XXII.

Quest'ultima formula si estende anche alle murature ed ai legnami purchè per γ' si mettano i valori dati dalla tav. XXII.

Per i vari mezzi aumentando γ' aumenta anche la perforazione a pari C ed U.

Applicazione.

Tiro a granata *a b. p.* con l'obice da 305/17.

Si vuole la penetrazione del proietto entro terra argillosa, quando la velocità d'urto sia $U = 312$.

Dalla tav. XXII si ha $\gamma' = 3{,}436$, dalla tav. XXIII $A = 0{,}769$, quindi

$$\begin{aligned} lg\, C &= 0{,}583 \\ lg\, \gamma' &= 0{,}536 \\ lg\, A &= \bar{1}{,}886 \\ lg\, X &= 1{,}005 \\ X &= \text{m. } 10{,}1 \end{aligned}$$

5 – Durata della penetrazione.

Dalla equazione

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\alpha i}{C}\left(1 + \beta v^2\right)$$

si ha

$$d\,t = -\frac{C}{\alpha i}\,\frac{d\,v}{1 + \beta v^2}$$

e posto $i = 1$

$$\int_0^t d\,t = \frac{C}{\alpha}\int_v^U \frac{d\,v}{1 + \beta v^2}$$

da cui

$$t = \frac{C}{\alpha\sqrt{\beta}}\left|\text{arc}\,tg\,(U\sqrt{\beta}\,) - \text{arc}\,tg\,(v\sqrt{\beta}\,)\right|$$

La durata totale si ottiene per $v = 0$

$$T = \frac{C}{\alpha\sqrt{\beta}}\,\text{arc}\,tg\,(U\sqrt{\beta}\,)$$

Essendo $\beta = 0.00005$

$$\alpha = \frac{2{,}3026}{2\,\gamma\,\beta} = \frac{2{,}3026}{0{,}0001\,\gamma'}$$

e ponendo

$$U\sqrt{\beta} = lg\,\lambda$$

la formula della durata diventa

$$T = \gamma'\,n\,C\,\lambda^{\circ} \qquad [4]$$

essendo λ in gradi ed

$$n = \frac{1}{\alpha\,\gamma'\sqrt{\beta}}\,\frac{\pi}{180}$$

Applicazione.

Dati $U = 312$ e $lg\ C = 0.583$ determinare la durata di penetrazione della terra argillosa.

$lg\ U$	$= 2,494$	$lg\ n$	$= \bar{4},030$
$lg \sqrt{\beta}$	$= 3,849$	$lg\ C\ \gamma'$	$= 1,121$
$tg\ tg\ \lambda$	$= 0,343$	$lg\ \lambda^{o}$	$= 1,817$
λ	$= 65^{o}6'$	$lg\ T$	$= 2,968$
		T	$= 0''093$

6 – Effetto dei proietti contro muri in cemento.

Gli effetti ottenuti sparando proietti d'artiglieria contro muri in cemento vennero per molto tempo calcolati con formule della balistica razionale con le quali, mediante l'introduzione di coefficienti dedotti dall'esperienza, si ottenevano risultati largamente approssimati.

Tale formule vengono dedotte con ipotesi semplificative, alcune delle quali si discostano poco dalla realtà, mentre altre non sono generalmente ammissibili (es.: resistenza diretta durante la perforazione).

D'altra parte i coefficienti sperimentali dati da apposite tabelle si riferiscono a tiri effettuati con proietti troppo diversi da quelli ora impiegati ed a conglomerato cementizio avente caratteristiche che si scostano troppo da quelle delle moderne costruzioni.

In base a quanto sopra si può dedurre la necessità di effettuare esperienze sistematiche per determinare la facoltà di penetrazione contro opere fortificate dei moderni proietti d'artiglieria.

Numerose esperienze vennero in proposito già eseguite fino al calibro 149 e da tali esperienze sono state dedotte le considerazioni che seguono:

I tiri sono stati eseguiti contro muri in cemento armato costruiti secondo i dettami della tecnica moderna e contro piccole fortezze.

Da essi si può senz'altro dedurre che il cal. 149 con modeste velocità d'urto in genere non è sufficiente per la distruzione di opere aventi spessori dei muri laterali e superiori di 70 – 100 cm. ed il cui muro frontale è protetto da una massa di sassi disposta alla rinfusa e di notevole profondità, caso questo che si verifica generalmente nelle fortificazioni moderne.

Non è il caso di fare affidamento sull'efficacia del tiro di sfondo contro i tetti di tali opere, perchè la probabilità di colpire è molto piccola, mentre generalmente non è possibile sparare contro i muri laterali, nei quali sono ricavate le feritoie delle armi nemiche, giacchè tali muri sono protetti da un prolungamento del muro frontale, comunemente denominato « orecchio ».

I moderni sistemi fortificati aventi nella prima e seconda linea opere piccole, che effettuano solo tiri fiancheggianti, se non impediscono all'artiglieria dell'attaccante di avvicinarsi molto alle linee difensive, sono peraltro di difficile distruzione per la piccolezza di esse e per la possibilità da loro offerta di una buona protezione frontale mediante mucchi di sassi che rendono praticamente invulnerabile l'opera almeno dai calibri inferiori al 149.

Le granate perforanti da 100 e da 105 sono efficaci contro muri di notevole spessore, se lanciate con forti velocità iniziali, però la loro azione è resa quasi nulla dalla massa di sassi coprente il muro frontale.

La loro efficacia è invece notevole se si colpisce in pieno una feritoia anche chiusa, caso questo però di difficile realizzazione data la scarsa probabilità di colpire, a meno che l'arma sia posta a non oltre 800 – 1000 m. dall'opera da abbattere, nel qual caso si possono avere uno o due colpi in pieno sparando da 20 a 30 colpi, compreso l'aggiustamento.

In ogni caso occorre avere osservatori ben disposti e che permettano un'ottima osservazione.

L'opera può essere neutralizzata, se non distrutta, con tiri a gas che rendono inservibile il forte se questo non dispone di mezzi protettivi, ed obbliga a tenere chiuse le feritoie.

Per tale azione danno buoni risultati con poca spesa, anche le bombarde ed i mortai pesanti della fanteria.

La recente esperienza di guerra ha dimostrato che bocche da fuoco di calibro relativamente piccolo ed inferiore al 105, impieganti proietti perforanti con forti velocità iniziali, hanno una grande efficacia sia contro cupole in acciaio che contro muri scoperti di cemento armato delle fortificazioni.

Contro tali muri, se verticali, l'efficacia di queste bocche da fuoco è notevolmente superiore a quella degli obici e mortai anche di calibro rilevante; e tale efficacia deriva sia dalla forte velocità d'imbatto del proietto, sia dalla maggiore probabilità di colpire.

Si noti infine che il costo del colpo singolo dei cannoni di piccolo calibro è notevolmente inferiore a quello degli obici di medio calibro.

7 – Efficacia dei proietti semiperforanti contro muri in cemento aventi caratteristiche costanti.

Le esperienze si dovrebbero riferire a prove contro muri in cemento armato della migliore qualità contenente 350 kg/m³ di cemento Protland, ottima ghiaia di fiume, colato mediante « vibrazione ».

Le opere devono subire una stagionatura di almeno 4 settimane, l'armatura deve essere costituita di maglie di 30 cm. di lato con tondino di acciaio nella quantità di 80–90 kg/m³.

Particolare cura deve essere messa nella scelta della spoletta, inquantochè se essa non è munita di ritardo, fa scoppiare la granata prima della completa penetrazione e se il ritardo è eccessivo il proietto penetra, poi rimbalza indietro, scoppiando fuori del muro.

Per ogni tipo di proietto dovrà quindi essere studiato un apposito ritardo.

Di massima, il ritardo dovrà avere durata compresa fra 0,1 e 0,2". Con una approssimazione sufficiente per la pratica, si può ritenere che la profondità di perforazione sia calcolabile con la formula

$$X_{cm.} = 0{,}01\, D \cdot V$$

essendo X la perforazione in cm., D il calibro del proietto in cm. e V la velocità d'imbatto.

La formula, evidentemente serve per l'imbatto normale; se questo è obliquo la profondità di perforazione diminuisce e precisamente la perforazione con imbatto di 30° dalla normale è 0,60 di quella a 90°, con 45° è 0,30.

Tali effetti si ottengono evidentemente con proietti semiperforanti, giacchè le granate dirompenti non hanno alcun effetto di distruzione sui muri di cemento armato.

Se lo spessore del muro, in relazione al calibro impiegato, è troppo grande, il proietto può perforare il muro dopo una certa penetrazione e cioè distaccare dal lato opposto una specie di cono di materiale che assicura la completa perforazione del muro.

Secondo esperienze si può ritenere che si abbia la completa perforazione del muro se il suo spessore è uguale alla penetrazione totale del proietto moltiplicata per il coefficiente 1,5.

Nei riguardi della costituzione del cemento delle opere, l'esperienza dimostrerebbe che la penetrazione aumenta di circa il 20-25 % nel cemento confezionato a mano invece che col vibratore, del 50 % nel cemento pozzolanico. Il cemento armato contenente ghiaia basaltica offre una resistenza superiore del 5 % rispetto al buon cemento vibrato.

8 – Perforazione delle corazze.

Agli scopi tattici è del massimo interesse avere una idea, sia pure approssimata, del potere perforante dei proietti e del potere resistente delle corazze alle varie distanze di combattimento.

È evidente che la resistenza d'una corazza di spessore limitato è tanto più piccola quanto più piccolo è lo spessore di essa.

In questo caso però non sono applicabili le formule trovate precedentemente.

Fra le varie teorie riguardanti la perforazione delle piastre la più attendibile è quella del Tressidder.

Secondo questa, quando un proietto senza cappuccio urta contro una corazza, sulla punta di esso si avrebbe una pressione che il proietto riesce a sopportare fino a che la velocità d'urto non raggiunge un valore limite chiamato: prima velocità critica.

Superata questa velocità si ha la rottura della punta del proietto.

Aumentando ancora la velocità, il proietto si frantuma sempre più minutamente ma cresce anche il tormento della piastra tanto che raggiunta una velocità chiamata velocità di stretta perforazione a proietto rotto si ha la perforazione della piastra.

Aumentando ancora la velocità, si perviene ad una terza velocità critica alla quale il proietto senza cappuccio perfora la piastra senza rompersi.

La teoria del Tressidder non sempre è vera. Esperienze recenti avrebbero dimostrato che per piastre di corazzatura in acciaio speciale a forte resistenza e con proietti che hanno subito uno spinto trattamento termico, può verificarsi la rottura del proietto qualora venga aumentata la velocità iniziale pur avendosi sempre la perforazione.

La questione ha notevole importanza perchè ai proietti moderni non è richiesto la sola perforazione della corazza ma è pure necessario che il proietto passi, rimanendo in condizioni, di esplodere, e ciò per evidenti ragioni di efficacia, oltre la piastra.

Quanto è stato detto riguarda l'urto normale, condizione questa che in pratica non si verifica quasi mai.

Vediamo ora ciò che accade col variare del più importante degli elementi in gioco cioè col variare dell'angolo d'imbatto, misurato a partire dalla normale alla piastra.

Aumentando l'angolo d'imbatto dalla normale dovremo fare una prima distinzione a seconda che l'imbatto permetta oppure no alla punta del proietto di lavorare nella piastra.

Se la punta lavora ci troveremo dinanzi al fenomeno della perforazione (a proietto intero o rotto) in caso contrario avremo solo una lesione.

Si comprende quindi come tutto dipenda dal tipo di piastra e dal profilo della ogiva (per i proietti senza cappuccio) e dalle caratteristiche del cappuccio per proietti che ne sono forniti.

Le esperienze pratiche hanno portato a ritenere che per i moderni proietti come angolo limite si possa assumere circa 50° dalla normale con un gioco di $\pm 5°$ ossia se σ è tale valore sarà

$$\sigma = 50° \pm 5°$$

Quando l'angolo d'imbatto è tale che la punta del proietto non lavora più si ha la lesione della piastra, fenomeno questo tutto diverso da quello della perforazione.

In questo caso le lamiere o le piastre si ingobbano senza rompersi e tanto migliore è la loro qualità quanto più si ingobbano senza rompersi.

Le corazze colpite con tiro di striscio resistono bene anche a proietti di calibro superiore al loro spessore.

La lesione può anche portare a fenditure e, con proietti di calibro molto superiore allo spessore della piastra, allo sfondamento.

a) Perforazione.

Per determinare la perforazione sia a proietto intero che a proietto rotto ci varremo della formula di De Marre

$$p\, V_p^2 = 1530^2\, K^2\, a^{1,5}\, S_o^{1,4}$$

in cui

V_p = velocità di stretta perforazione
a = calibro in dec.
p = peso del proietto in kg.
S_o = spessore della piastra in dec.
K = coefficiente di qualità.

Naturalmente il coefficiente di qualità K sarà diverso a seconda che si abbia la perforazione a proietto rotto od a proietto intero e sarà minore nella prima delle due ipotesi.

La formula di De Marre risolta rispetto allo spessore si può scrivere

$$S_o = M \sqrt[1,4]{\frac{p\, V_p^2}{a^{1,5}}}$$

essendo M un coefficiente numerico.

Per un dato proietto cioè per dati p ed a sarà

$$S_o = Q \sqrt[1,4]{V_p^2}$$

dove Q è sempre un coefficiente numerico.

La formula di De Marre presenta la maggiore attendibilità per spessori pressochè uguali al calibro del proietto.

Estenderemo tale formula anche a spessori sensibilmente diversi dal calibro e, per correggere gli errori che in tal modo commetteremmo, non daremo a Q un valore costante ma valori ricavati mediante esperienze.

Quando l'urto non è normale alla piastra, il caso è assai più complesso.

Molte formule sono state proposte ma nessuna dà risultati soddisfacenti.

Partendo dalla formula di De Marre

$$p\, V^2 = K\, a^{1,5}\, S_o^{1,4}$$

si deduce

$$V = K \frac{a^{0,75}}{\sqrt{p}}\, S_o^{0,7} = N\, S^{0,7}$$

per un dato proietto.

Se ora ammettiamo vera l'ipotesi del Rusch adottata da Krupp secondo la quale è utile per la penetrazione obliqua la sola componente della velocità normale alla piastra si avrebbe, per l'urto normale

$$S_o^{0,7} = \frac{V_o}{N}$$

e per l'urto obliquo

$$S_\theta^{\ 0,7} = \frac{V_o \cos\theta}{N}$$

da cui

$$\left(\frac{S_\theta}{S_o}\right)^{0,7} = \cos\theta$$

$$\left(\frac{S_\theta}{S_o}\right) = \cos^{1,43}\theta$$

ed ammettendo che nei due casi il valore di N rimanga costante si ha

$$S_\theta = S_o \cos^{1,43}\theta$$

Abbiamo detto d'altra parte che

$$S_o = Q \sqrt[1,4]{V_p^2}$$

quindi sarà

$$S_\theta = Q \sqrt[1,4]{V^2} \cos^{1,43} \theta = Q \, (V \cos \theta)^{1,43}$$

Se si sono eseguite esperienze in occasione di collaudi, il che presso i poligoni avviene molto sovente, e si sono misurate le quantità

$$V = V_c$$
$$\theta = \theta_c$$
$$S_\theta = S_c$$

è possibile, basandosi su tali risultati, ricavare il valore del coefficente Q cioè:

$$Q = \frac{S_c}{\sqrt[1,4]{V^2} \cos^{1,43} \theta_c}$$

Il coefficiente Q determinato in tal modo serve nei casi simili a quelli che hanno permesso di ricavarlo. Anche se la costanza di Q potesse essere ammessa (e ciò non è possibile quando le variazioni di θ sono forti), si devono tenere presenti molte limitazioni perchè altrimenti si perviene a risultati assurdi.

Si potrebbe ora pensare che aumentando convenientemente la velocità d'urto si potessero perforare spessori di piastra assai superiori a quello che effettivamente viene perforato.

Esiste però sempre uno spessore massimo perforabile sia a proietto intero che a proietto rotto e per quanto si aumenti la velocità non si riesce a superare questo limite.

Abbiamo visto che il coefficiente Q varia con θ ma la formula che serve meglio al calcolo della perforazione è la seguente

$$S_\theta = S_0 \cos^{1,43} h \, \theta$$

in cui h è un coefficiente numerico non costante ma variabile con θ e che viene dedotto con la seguente considerazione:

con $\theta = 60°$ non si ha perforazione, perchè la punta del proietto non lavora più la piastra, quindi

$$\cos h \, \theta = 0$$
$$h \, \theta = 90°$$

e poichè

$$\theta = 60° \qquad h = 1,5$$

Per l'urto normale

$$\theta = 0 \qquad h = 1$$

Quindi h varierà in funzione dell'angolo θ da 1 a 1,5.

È interessante eseguire alcune applicazioni della formula

$$S_\theta = Q \, (V \cos \theta)^{1,43}$$

a dati sperimentali:

1°) Proietto senza cappuccio contro lamiere omogenee.

Perforazione a proietto intero ed in condizioni di esplodere.

a) lamiera da 40 mm. Inclinazione 30° dalla normale. Velocità di stretta perforazione a proietto intero 306.

Ricavando Q mediante la relazione

$$Q = \frac{S\theta}{(V \cos \theta)^{1,43}}$$

si ottiene

$$Q = 0{,}0137$$

b) Corazza omogenea da 70 mm. – urto normale – velocità di stretta perforazione 430 m.

$$Q = 0{,}0133$$

Quindi Q risulta poco diverso tanto che, assumendo un valore medio

$$Q = 0{,}0135$$

e applicato ai due casi studiati si avrebbe

nel 1° caso m/s 39,4
nel 2° caso m/s 71,1

2°) Proietto con cappuccio.

Perforazione a proietto intero

piastra da 150 $\theta = 20°$ velocità di stretta perforazione 609 - 14
piastra da 100 $\theta = 35°$ velocità di stretta perforazione 547 - 53

Però in tal caso si ha ancora una velocità residua dei proietti di 20 m/s per cui calcolando Q con $V = 590$ nel 1° caso e 530 nel 2° caso si ricava

per piastre da 150 $Q = 0{,}0178$
per piastre da 100 $Q = 0{,}0170$

Ammettendo $Q_{medio} = 0{,}0174$ e applicando questo coefficiente alle piastre studiate in precedenza si ottiene

$$S_{calcolato} = 153{,}5$$
$$S_{calcolato} = 97{,}8$$

b) Lesione.

Data l'assoluta diversità fra il fenomeno della perforazione e quello della lesione, a quest'ultima non è possibile applicare le formule di De Marre nè quelle di Rusch per l'urto obliquo.

Se si suppone che per la lesione sia utile la sola componente normale alla piastra ($v \cos \theta$) potremo porre

$$S = H (v \cos \theta)^{\alpha}$$

in cui H ed α sono coefficienti da dedursi sperimentalmente.

Se scriviamo la formula sotto forma logaritmica

$$lg\, S = lg\, H + \alpha\, lg\, (v \cos \theta)$$

e tracciamo un diagramma avente per asse delle x i valori di

$$lg\, (v \cos \theta)$$

e per y i valori dello spessore strettamente lesionato ottenuti sperimentalmente avremo una serie di punti che stanno pressochè su una retta.

Allora sarà:

H = valore dell'ordinata della retta compensatrice al suo incontro con l'asse delle y.

α tangente della inclinazione della retta.

In genere $\alpha = 1{,}6$ quindi

$$S = H (v \cos \theta)^{1{,}6}$$

9 - Applicazione al tiro di guerra.

Ricordiamo che le formule da applicare sono:

a) per le perforazioni (angolo d'impatto da 0° fino a $50^{\circ} \pm 5^{\circ}$)

$$S = Q (v \cos \theta)^{1{,}43}$$

b) per le lesioni

$$S = H (v \cos \theta)^{1{,}6}$$

Si osservi che non è possibile tener conto dei fenomeni di nutazione e precessione del proietto poichè non è possibile conoscere questi angoli al momento dell'urto.

Si ha perciò incertezza di qualche grado nel valore dell'angolo di impatto il che ci dice come sia inutile cercar molta esattezza nella determinazione dei coefficienti.

Dalle tavole di tiro si ha il valore di U e quello di ω.

Occorre ora distinguere:

1) *Bersaglio orizzontale.*

Se l'angolo di caduta è ω, avremo $\theta = 90 - \omega$ quindi per la lesione sarà

$$S_r = H (V \operatorname{sen} \omega)^{1{,}6}$$

Se le distanze sono grandi ω aumenta e ci troviamo nel caso della perforazione per cui avremo

$$S_p = Q (V \operatorname{sen} \omega)^{1{,}43}$$

Se il bersaglio è leggermente inclinato di un angolo λ come nel caso di cupole

$$\theta = 90 - \omega - \lambda$$

quindi

$$S_r = H\,[V \text{ sen } (\omega + \lambda)]^{1,6}$$
$$S_p = Q\,[V \text{ sen } (\omega + \lambda)]^{1,43}$$

2) *Bersaglio verticale.*

Se ω è l'angolo di caduta e η l'angolo che il piano verticale contenente l'ultimo tratto di traiettoria forma con la piastra sarà:

$$S_p = Q\,(V \cos\omega \cos\eta)^{1,43}$$
$$S_l = H\,(V \cos\omega \cos\eta)^{1,6}$$

10 – Cappuccio.

Uno degli elementi per i quali i modernissimi proietti maggiormente differiscono da quelli anteguerra 1915-1918 ed uno degli elementi che più ha concorso ad accrescere l'efficienza dei proietti ad urto inclinato è il cappuccio.

Le precedenti teorie circa il funzionamento del cappuccio ammettevano che all'urto, la reazione della piastra produceva il distacco della estrema punta dell'ogiva che a guisa di cuneo determinava rotture man mano crescenti fino a giungere alla rottura del proietto.

Quindi il cappuccio aveva la stessa funzione di una cerchiatura dell'ogiva del proietto.

Il cappuccio, secondo questa teoria, doveva essere fatto di materiale dolce; inoltre non era necessario avere alcuna parte del cappuccio oltre la punta del proietto.

Le dimensioni del cappuccio erano assai limitate; ad esempio:

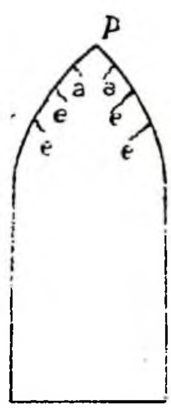


Fig. 78.

Palla da 305/46		
peso del proietto scarico	kg.	422
peso del cappuccio . . .	kg.	34,30
percentuale		8,13
Palla da 203/45		
peso del proietto scarico	kg.	119,650
peso del cappuccio . . .	kg.	6,7
percentuale		5,60
Palla da 152/40		
peso del proietto scarico	kg.	45,844
peso del cappuccio . . .	kg.	1,842
percentuale		4,02

Ma tali cappucci, ottimi nell'urto normale, si dimostrano insufficienti nell'urto obliquo.

Attualmente al cappuccio si richiede che:

1) nell'urto obliquo tenda ad avvicinare l'asse del proietto alla normale alla piastra;

2) attacchi la superficie cementata della piastra facilitando il lavoro del proietto;

3) protegga l'ogiva durante il 1° periodo della perforazione.

Per ottenere questi scopi si sono accresciute le dimensioni e quindi il peso del cappuccio cosicchè:

Granata perforante da 203		
peso del proietto scarico	kg.	118,600
peso del cappuccio. . .	kg.	14,700
percentuale		12,39
Palla da 152/53		
peso del proietto scarico	kg.	47,300
peso del cappuccio. . .	kg.	6,840
percentuale		14,40

Il profilo anteriore è stato studiato in vista dell'angolo d'impatto. Si viene così ad avere, per ogni angolo d'inclinazione, un profilo ottimo.

Infine, per ottenere una buona azione del cappuccio contro la superficie delle piastre e per conservare ad esso la sua antica azione protettrice, si è costruito il cappuccio con la parte anteriore ed esterna cementata e durissima, mentre la parte a contatto dell'ogiva è dolce.

11 - Effetto delle granate a pallette.

La granata a pallette, scoppiando, si trasforma in un fascio di pallette che seguono traiettorie divergenti dal punto di scoppio. Tutte le pallette hanno una velocità di traslazione uguale alla velocità residua del proietto nel punto di scoppio e diretta secondo la tangente alla traiettoria.

Inoltre, per effetto del moto di rotazione del proietto esse sono animate da una velocità diretta normalmente al raggio della sezione retta del proietto passante per il loro centro.

Questa velocità non è la stessa per tutte le pallette ed è massima per quelle che sono più distanti dall'asse.

Se v_1 è questa velocità, r_1 la distanza di una palletta dall'asse, ω la velocità angolare del proietto sarà

$$v_1 = \omega \, r_1$$

Ora ω si considera costante lungo tutta la traiettoria ed è espresso da:

$$\omega = \frac{V}{r} \, tg \, i = \frac{V}{r} \cdot \frac{\pi}{n} \quad \text{ove}$$

r è il semicalibro, i l'inclinazione, n il passo in calibri delle righe alla bocca, V la velocità iniziale quindi

$$v_1 = V \frac{r_1}{r} \, tg\, i = V \frac{r_1}{r} \frac{\pi}{n}$$

L'esplosione della carica di scoppio dà luogo ad un incremento di velocità che, in generale, non sarà nella direzione dell'asse.

Siano w_1 e w_2 le componenti di questo incremento nella direzione dell'asse, ed in senso ad esso normale; riteniamo che il valore di queste componenti sia lo stesso per tutte le pallette.

Avvenuto lo scoppio esse si muovono con una velocità che è la risultante delle varie componenti enumerate.

Consideriamo una palletta distante r_1 dal centro del proietto, la velocità residua della quale è v. Essa, come s'è detto, sarà pure animata da una velocità tangenziale v_1 e da due componenti della velocità dovuta alla carica di scoppio w_1 e w_2.

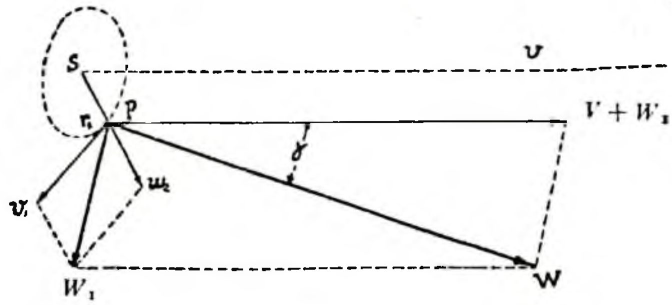


Fig. 79.

Componendo la v_1 con w_2 si avrà la w' che composta con $(v + w_1)$ darà come risultante la velocità W da cui è animata la palletta.

Quest'ultima fa con l'asse del proietto un angolo γ che chiamasi semiapertura del cono delle pallette.

Si ricava facilmente dalla figura 79

$$tg\,\gamma = \frac{W'}{v + w_1} = \frac{\sqrt{v_1^2 + w_2^2}}{v + w_1} = \frac{\sqrt{\left(V \frac{r_1}{r}\, tg\, i\right)^2 + w_2^2}}{v + w_1}$$

$$W = \sqrt{(v + w_1)^2 + v_1^2 + w_2^2} = \frac{v + w_1}{\cos\gamma}$$

formule che ci permettono di calcolare γ e W quando siano noti la velocità iniziale del proietto, la distanza della palletta dal centro e le componenti della velocità di scoppio.

Queste ultime però non si possono misurare direttamente, per cui la loro determinazione viene fatta essendo già noto γ.

Per avere una idea approssimata degli effetti della granata a pallette, si suppone che le pallette siano distribuite uniformemente su tutta la sezione retta del cono, ipotesi che l'esperienza dimostra vera con molta approssimazione, sebbene nelle granate a pallette a diaframma, che sono quelle da noi impiegate, nel centro del cono le pallette siano più rade.

Variando la distanza varia soltanto v, le componenti w_1 e w_2 restano invariate e si possono misurare anche facendo scoppiare il proietto a riposo.

Tale determinazione viene eseguita nel seguente modo:
si fa scoppiare la granata a pallette posta su un cavalletto innanzi al quale si colloca un diaframma di cartone su cui si raccolgono i fori fatti dalle pallette. Si pone in prossimità del bicchiere, il quale nelle granate a pallette di acciaio non si rompe, un telaio per la misura della velocità iniziale e si determina la velocità del bicchiere al momento dello scoppio.

Considerando allora che il projetto si trova nelle condizioni di un sistema animato da sole forze interne e chiamando con p la parte del proietto proiettata indietro e con p_1 quella proiettata in avanti, supposto che la carica interna μ per metà segua il bicchiere e metà le pallette, per il teorema delle quantità di moto dovrà essere

$$\left(p + \frac{\mu}{2}\right) u = \left(p_1 + \frac{\mu}{2}\right) w_1$$

essendo u la velocità.

Si deduce quindi

$$w_1 = \frac{\left(p + \frac{\mu}{2}\right) u}{p_1 + \frac{\mu}{2}}$$

e si ha modo di misurare w_1 nel senso dell'asse.

Intanto dal diaframma forato dalle pallette sarà possibile ricavare anche γ con misurazione diretta e quindi sarà

$$w_2 = w_1 \, tg \, \gamma_1$$

Le esperienze fatte con questo metodo hanno dato per il 75 *A* una $w_1 = 87$ m/s.

Per w_2 i valori risultano assai piccoli tanto che senza errore notevole si possono trascurare e ritenere $w_2 = 0$.

Noti così w_1 e w_2 è poi possibile, conoscendo v, determinare il valore di γ per le varie distanze.

Per le granate a pallette a diaframma, di ghisa, il cui bossolo si rompe al momento dello scoppio, non è possibile determinare γ_1 sperimentalmente come è stato indicato ed allora si pone un telone o delle sagome a piccola distanza dal punto di scoppio del tiro, avuto il raggio del fascio dei fori e la distanza dello scoppio si ha γ.

Facendo misurare a varie distanze si può costruire un diagramma tra X ed i valori sperimentali di γ e così si ha la legge di variazione di γ con le distanze.

Per le granate a pallette a carica centrale si procede nello stesso modo. La misura sperimentale di γ però è poco esatta perchè difficilmente si può misurare con esattezza la distanza dal punto di scoppio del telone.

Per le granate a pallette a diaframma, la w_1 può avere valori prossimi a 100 m/s però, se il bicchiere si rompe, questa velocità cade subito a valori assai bassi.

a) Distanza a cui le pallette conservano efficacia.

Secondo dati sperimentali, una palletta può mettere fuori combattimento un uomo od un cavallo se è animata da una forza viva residua di 8 o 19 kgm.

Questi valori corrispondono, per le pallette di vario peso, alle seguenti velocità residue

Peso della palletta in grammi	Granate che le contengono	Velocità corrispondente alla forza viva di	
		8 kgm	19 kgm
16	da 149/12-35	102	156
14	da 75	107	165
12	da 75	114	176
11	da 65	119	184

Si tratta quindi di vedere, per i vari proietti, a quale distanza le pallette conservano ancora la velocità voluta per essere efficaci.

Per fare ciò, consideriamo la traiettoria descritta da una palletta; per essa sarà

$$x = C' [D(u) - D(V)]$$

ove per V si pone la velocità w nel punto di scoppio e per u la velocità limite data dallo specchio precedente.

Per C' porremo $\delta = 1$; $\beta = 1$; $i = 2$; C quello della palletta.

Risolvendo con la formula si ha x.

b) Altezza ed intervallo di scoppio – Densità delle pallette.

Se l'inclinazione della traiettoria del proietto $\bar{\theta}$ non è troppo piccola, le traiettorie delle pallette possono essere considerate come rettilinee.

Quindi le pallette superiori partono con un angolo $\bar{\theta} - \gamma$ e quelle inferiori con angolo $\bar{\theta} + \gamma$ ed il fascio ha la forma di un cono il cui asse è dato dalla traiettoria che avrebbe percorso il proietto inerte (fig. 80).

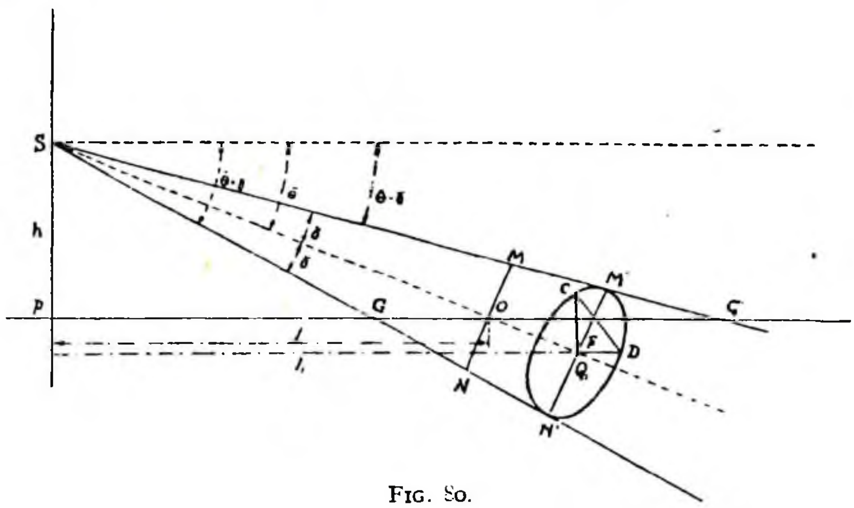


Fig. 80.

Se S è il punto di scoppio l'altezza

$$SP = h = y_s$$

chiamasi altezza di scoppio e la distanza $PO = I$ è l'intervallo di scoppio.

Il raggio della sezione retta del cono in O è dato da

$$R = SO\, tg\, \gamma = \frac{I}{\cos\theta}\, tg\, \gamma$$

La determinazione di R viene fatta in modo da avere una certa densità di pallette per ogni m² di superficie normale al cono è ciò per un dato I e per un dato y_s quindi noto N (numero di pallette), la densità Δ per m² sarà data da

$$\Delta = \frac{N}{\pi R^2}$$

Fissata perciò la densità delle pallette è possibile ricavare R in modo che questa sia verificata e quindi si deduce

$$I = \frac{R \cos\theta}{tg\, \gamma}$$

e ponendo per R il valore trovato precedentemente si deduce

$$I = \frac{\cos\theta}{\cos\gamma} \sqrt{\frac{N}{\pi \Delta}}$$

I valori di Δ sono fissati per i vari tipi di proietti così ad es. per il cannone da 75/27 è fissato l'intervallo I in modo da avere una densità di 1,6 pallette per m² ed in tale ipotesi si ha $2R = 17$ m.

Per il 65/17 per $2R = 17$ m. si ha $\Delta = 1$.

c) Profondità della zona battuta.

Supposte le traiettorie delle pallette rettilinee, la zona battuta davanti alla traiettoria media è (fig. 81)

$$d = OG = I - h \operatorname{cotg}(\bar{\theta} + \gamma)$$

e quella oltre è

$$d' = OG' = h \operatorname{cotg}(\bar{\theta} - \gamma) - I$$

quindi la profondità totale della zona battuta è

$$d + d' = h\,[\operatorname{cotg}(\theta - \gamma) - \operatorname{cotg}(\bar{\theta} + \gamma)]$$

Però spesso, specialmente alle piccole distanze di tiro, l'angolo $\bar{\theta} - \gamma$ è negativo cioè la palletta superiore del fascio parte dal punto di scoppio con angolo di proiezione positivo, dimodochè d' non può essere calcolato con la formula precedente.

In questo caso, la traiettoria della palletta superiore del fascio si calcola, e si determina il punto in cui questo incontra l'orizzonte cioè il punto in cui la sua ordinata vale y_1.

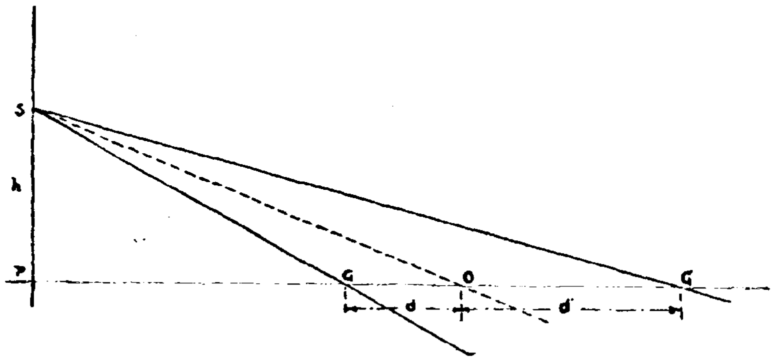


FIG. 81.

Questo calcolo viene eseguito determinando per vari valori di x i corrispondenti y con la relazione

$$y = x \, tg \, \varphi - \frac{C' x}{2 \cos^2 \varphi} f$$

Occorre però osservare se la palletta in questo punto ha ancora la forza viva capace di metter fuori combattimento un uomo od un cavallo: allora si confronterà la x_1 corrispondente ad y_1 con la x calcolata com'è detto precedentemente; se $x_1 < x$ la pallette è ancora efficace, altrimenti si pone il fascio nel punto in cui $x = x_1$.

Per il calcolo della formula ora detta si calcolerà C' e V com'è indicato precedentemente, il valore di f si ha con V ed $\frac{x}{C'}$.

Vediamo quindi in sede di progetto di esperienze come possono essere determinati l'altezza e l'intervallo di scoppio.

Consideriamo la granata a pallette da 75/13 che ha $N = 255$ pallette del peso di 13 gr. ed ha $a = 0{,}013$.

Eseguite esperienze a riposo si è trovato $w_1 = 75$ m/s e supponiamo $w_2 = 0$.

Vediamo ad es. a 4000 m. $V = 309$ quale deve essere y_1 e quale I perchè si abbia sul bersaglio una densità Δ per 2 pallette per m² di superficie.

Per $X = 4000$ si ha $U = 221 = v$.

Intanto se $\Delta = 2$ sarà

$$\Delta = \frac{N}{\pi R^2}$$

da cui

$$R = \sqrt{\frac{N}{\pi \Delta}}$$

$$I = \frac{\cos \theta}{tg \, \gamma} \sqrt{\frac{N}{\pi \Delta}}$$

per θ si assume $\omega_x = 20°29'$

$$\begin{aligned} lg\,N &= 2{,}37107 \\ colg\,\pi &= \bar{1}{,}50285 \\ colg\,\Delta &= \bar{1}{,}69897 \\ lg\,R^2 &= 1{,}57289 \\ lg\,R &= 0{,}78145 \\ R &= 6{,}0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} lg\cos\theta &= \bar{1}{,}97163 \\ colg\,tg\,\gamma &= 0{,}91911 \\ lg\sqrt{\frac{N}{\pi\,\Delta}} &= 0{,}78145 \\ lg\,I &= 1{,}67229 \\ I &= 47 \end{aligned}$$

per ricavare γ si è proceduto come segue

$$tg\,\gamma = \frac{\sqrt{(V\,tg\,i)^2 + w_2{}^2}}{V + w_1} = \frac{V\,tg\,i}{V + w_1}$$

ove

$$tg\,i = \frac{\pi}{n}$$

con $n = 20$; $V + w_1 = 294$; $r = 37$ m/s; $r_1 = 27$ m/s

$$\begin{aligned} lg\,r_1 &= 1{,}43136 \\ colg\,r &= \bar{2}{,}43180 \\ lg\,\frac{r_1}{r} &= \bar{1}{,}86316 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} lg\,\frac{r_1}{r} &= \bar{1}{,}86316 \\ lg\,V &= 2{,}48996 \\ lg\,\pi &= 0{,}49715 \\ colg\,n &= \bar{2}{,}69897 \\ colg\,V + w_1 &= \bar{3}{,}53165 \\ lg\,tg\,\gamma &= \bar{1}{,}08089 \\ \gamma &= 5°\,28' \end{aligned}$$

indi

$$\begin{aligned} y_s &= I\,tg\,\theta \\ lg\,I &= 1{,}67229 \\ lg\,tg\,\theta &= \bar{1}{,}57235 \\ lg\,y_1 &= 1{,}24464 \\ y_1 &= 17{,}8 \\ y_s &= 4^{m}\,4 \end{aligned}$$

d) Larghezza della fronte battuta.

Quando il bersaglio si trova nel punto d'arrivo sul terreno della traiettoria media, la larghezza della fronte battuta è

$$l = 2\,R = \frac{2\,I}{\cos\theta}\,tg\,\gamma$$

Quando non si trova in detto punto, la fronte battuta è la corda della sezione retta del cono che passa per il punto in cui si trova il bersaglio (fig. 82).

12 - Efficacia delle granate a doppio effetto.

Prima della guerra (1915-1918) tale tipo di proietto non era impiegato presso di noi in alcuna delle bocche da fuoco in servizio.

Durante la guerra venne adottato per il cannone da 105/28 una granata a doppio effetto, la cui scarsa efficacia ne consigliò ben presto l'abolizione.

Quasi tutte le bocche da fuoco austriache invece (dal 75/13 al 380/15) facevano uso di granate a doppio effetto.

L'effetto prodotto dallo scoppio di una di tali granate può essere considerato come l'azione combinata di una granata a pallette scoppiante a tempo e di una piccola granata scoppiante a percussione.

La granata a doppio effetto, scoppiando davanti al bersaglio, si divide in due parti di cui una agisce in modo perfettamente analogo alla granata a pallette e l'altra, costituita da un nucleo ogivale comprendente la spoletta, agisce a percussione sul terreno come una comune granata.

Gli effetti nell'uno e nell'altro caso sono del tutto simili a quelli più innanzi esposti per le granate a pallette e per le granate.

Naturalmente, mentre per quanto riguarda il funzionamento della parte granata a pallette si possono produrre effetti uguali o di poco diversi da quelli consueti, per la parte granata, trattandosi di un piccolo nucleo costituito dalla spoletta a tempo e da una piccola carica di alto esplosivo, si hanno effetti alquanto ridotti.